



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #25

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

19/11/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Equações diferenciais de equilíbrio (efeito da força normal)
2. Equações para determinar a linha elástica e cargas críticas
3. Flambagem de barras simplesmente apoiadas
4. Carga crítica de Euler



1. Equações Diferenciais de Equilíbrio *(Efeito da Força Normal)*

Objetivo: Determinar as equações diferenciais de equilíbrio de uma viga-coluna submetida a carregamentos transversais e esforços axiais de compressão.

Hipóteses:

1. Barra prismática, com eixo central reto;
2. Plano de flexão é um plano de simetria das seções transversais (não há, portanto, torção da barra);
3. Material homogêneo, isótropo e com comportamento elástico-linear;
4. Deslocamentos e deformações são pequenos (hipótese de L.G.), mas o equilíbrio será feito na configuração deformada.

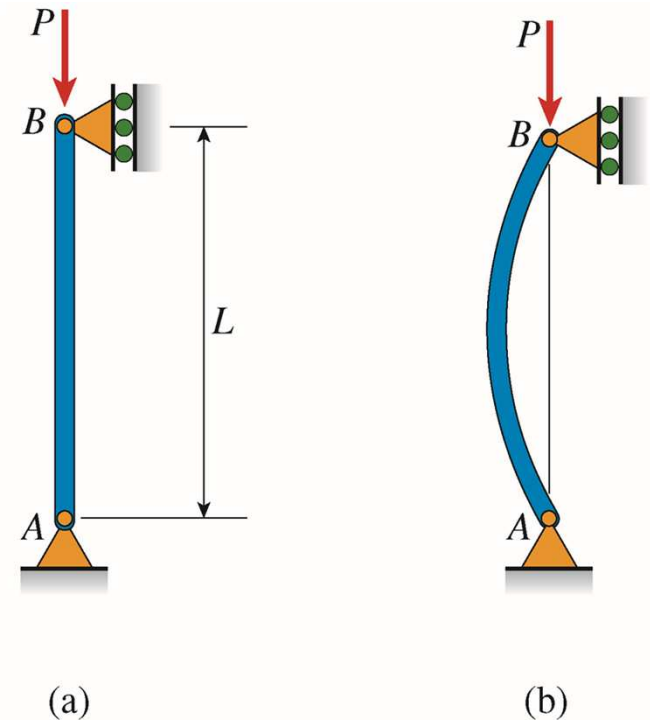
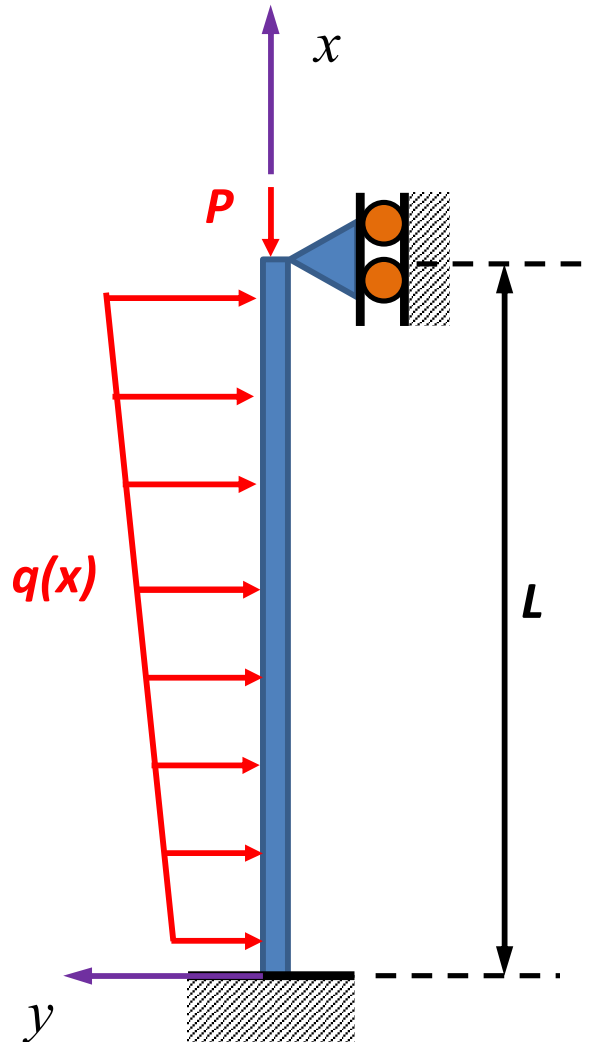


FIG. 11-1 Buckling of a slender column due to an axial compressive load P



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Sejam dados:

P = força de compressão aplicada à viga-coluna

$q(x)$ = carregamento distribuído (transversal) aplicado à viga-coluna

EI = rigidez flexional da viga (podendo ser constante ou variável)

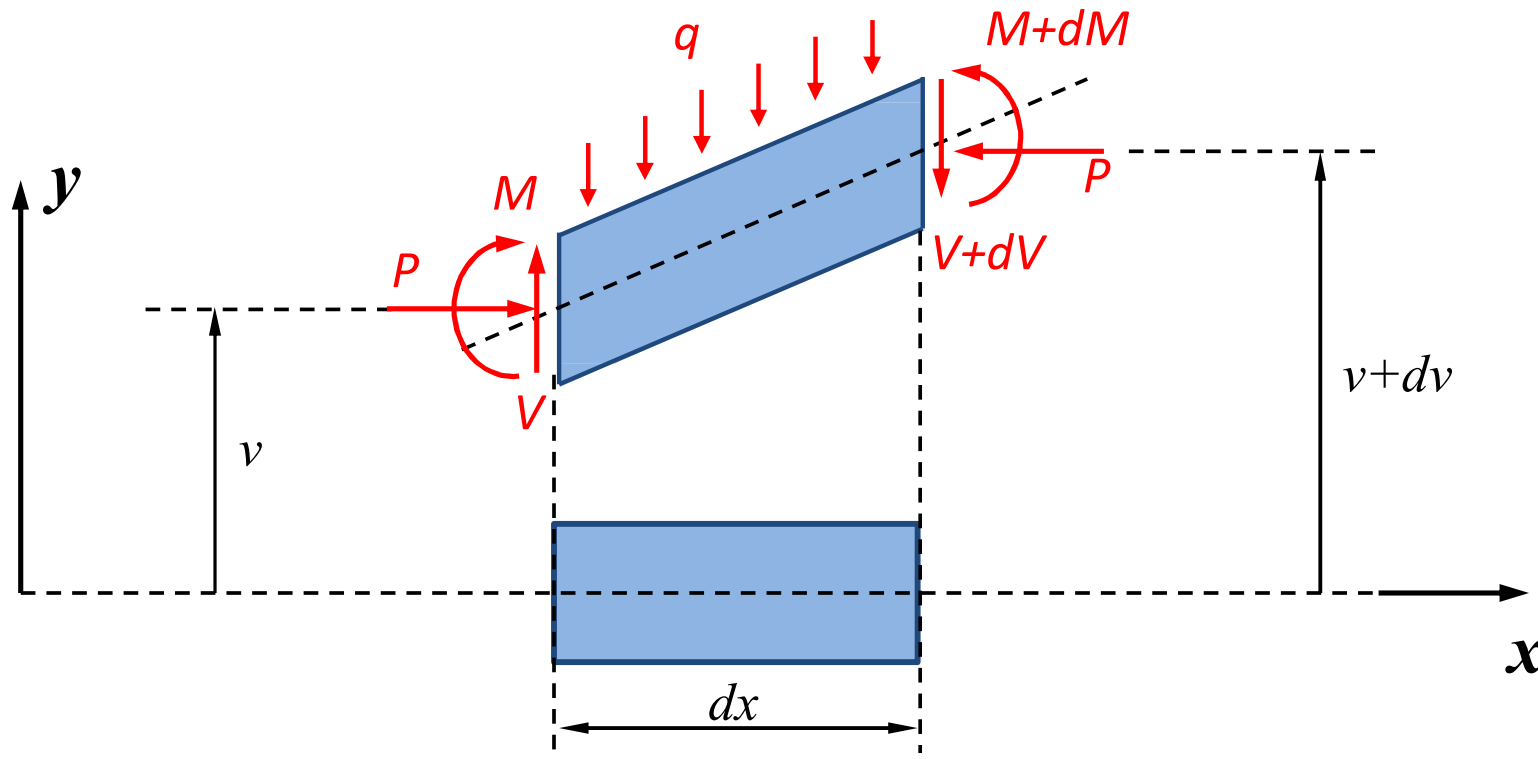
L = comprimento da viga-coluna

As condições de contorno podem ser de diferentes tipos (a figura ao lado indica apenas uma dentre várias possibilidades), e são fundamentais para determinar a carga crítica da estrutura.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Consideremos um elemento infinitesimal de comprimento dx retirado da viga-coluna (na configuração deformada), como indicado abaixo (o elemento está girado apenas para aproveitar melhor o espaço). Observamos também que os deslocamentos e rotações estão exageradamente ampliados para facilitar a visualização...





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Estando o equilíbrio de forças na direção horizontal garantido (forças de magnitude P são iguais e opostas nas duas faces), basta impor o equilíbrio de forças na direção vertical e o equilíbrio de momentos:

Equilíbrio de forças na direção vertical:

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V(x) - [V(x) + dV] - q(x)dx = 0 \Leftrightarrow \frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \quad (1)$$

Equilíbrio de momentos (tomando como polo o centroide da face à direita):

$$\sum M = 0 \Leftrightarrow M(x) + dM - M(x) + \frac{q(x)(dx)^2}{2} + Pdv - Vdx = 0$$

$$Vdx = dM + Pdv \Leftrightarrow V(x) = \frac{dM(x)}{dx} + P \frac{dv(x)}{dx} \quad (2)$$



2. Equações para determinar a linha elástica e cargas críticas

Relembrando as últimas aulas de PME-3210, as equações necessárias para determinar a linha elástica de vigas são:

- Equações diferenciais de equilíbrio;
- Equações constitutivas;
- Relações geométricas (entre a curvatura e as derivadas de $v(x)$).

Assim, resultam:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \\ V(x) = \frac{dM(x)}{dx} + P \frac{dv(x)}{dx} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{d^2 M(x)}{dx^2} + P \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -q(x) \quad (3)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Mas, da hipótese de que o material possui comportamento elástico-linear e da hipótese de que seções planas e ortogonais ao eixo central (antes da deformação) permanecem planas e ortogonais ao eixo central (após a deformação), sai a relação:

$$M(x) = EI(x)\kappa(x) \quad (4)$$

Onde a curvatura $\kappa(x)$ é dada por:

$$\kappa(x) = \frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}} \quad (5)$$

Considerando que a rigidez flexional seja constante (viga prismática) e que os deslocamentos e rotações sejam pequenos (L.G.), virá:

$$M(x) = EI\kappa(x) \cong EIv''(x) \quad (6)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Então, substituindo Eq.(6) em Eq.(3), teremos a equação governante:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{q(x)}{EI} \quad (7)$$

Os problemas mais simples de estabilidade de vigas-coluna, envolvendo a determinação das cargas críticas de flambagem e dos modos de flambagem podem ser resolvidos por meio de:

1. Uso da equação governante linearizada (Eq.(7)) ou
2. Uso da relação Momento Fletor \times Curvatura linearizada (Eq.(6)).

Nota: Com a linearização da equação governante (decorrente da linearização da expressão da curvatura), só é possível determinar os deslocamentos do eixo central nos casos em que $q(x) \neq 0$ (de forma análoga ao que vimos no estudo de estruturas idealizadas).



3. Flambagem de barras simplesmente apoiadas

Retomando o problema de determinação da carga crítica de flambagem de uma barra biapoiada, com base nas hipóteses estabelecidas anteriormente, apresentaremos a solução do problema pelas duas formas possíveis, ressaltando as vantagens e desvantagens de cada método de solução.

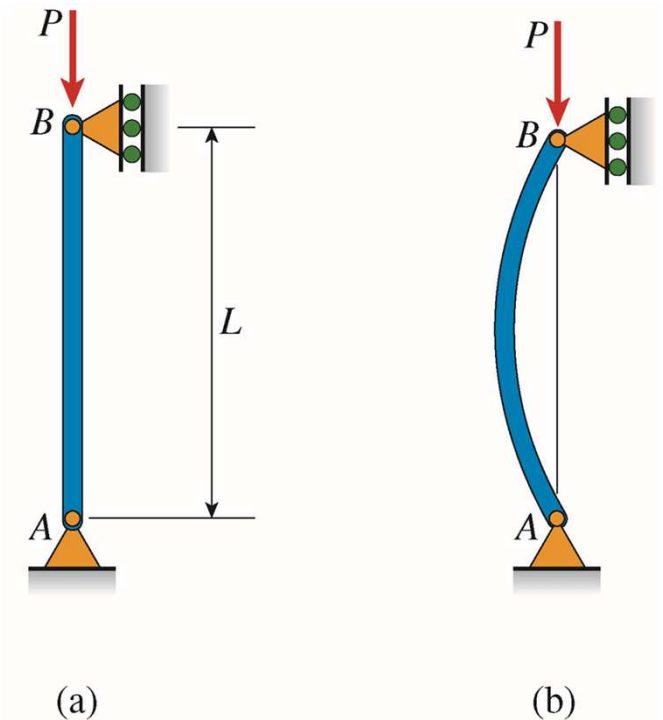


FIG. 11-1 Buckling of a slender column due to an axial compressive load P



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.1. Solução pela uso da equação governante linearizada (Eq.(7)):

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{q(x)}{EI}$$

Neste caso, observando que $q(x) = 0$, e denominando: $k^2 = \frac{P}{EI} > 0$,

virá:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 0 \quad (8)$$

A busca de soluções possíveis para E.D.O.s lineares com coeficientes constantes (como é o caso) sugere o emprego de soluções exponenciais da forma:

$$v(x) = C e^{\lambda x} \quad (9)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Substituindo Eq.(9) em Eq.(8), teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 0 \\ v(x) = C e^{\lambda x} \end{array} \right. \Rightarrow C e^{\lambda x} (\lambda^4 + k^2 \lambda^2) = 0$$

Vê-se que a solução $v(x) = C e^{\lambda x} = 0$ é uma solução natural do problema (é denominada solução trivial), mas não tem interesse (pois não informa se há outras formas de solução, nem o valor da carga crítica). Desta forma, devemos impor que:

$$\lambda^4 + k^2 \lambda^2 = \lambda^2 (\lambda^2 + k^2) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \quad (\text{raiz de multipl. 2}) \\ \lambda = \pm ik \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim, a solução da E.D.O. de 4ª ordem dada é da forma:

$$v(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{ikx} + C_4e^{-ikx}$$

Lembrando que (fórmula de Euler): $e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$

Então:

$$\begin{aligned} C_3e^{ikx} + C_4e^{-ikx} &= C_3(\cos(kx) + i\text{sen}(kx)) + C_4(\cos(kx) - i\text{sen}(kx)) \\ &= (C_3 + C_4)\cos(kx) + i(C_3 - C_4)\text{sen}(kx) \end{aligned}$$

Denominando: $A_3 = C_3 + C_4$ $A_4 = i(C_3 - C_4)$

E impondo que A_3 e A_4 sejam números reais (já que a solução precisa ser real), encontramos:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\left\{ \begin{array}{l} C_3 + C_4 = A_3 \\ -C_3 + C_4 = iA_4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_3 = \frac{1}{2}(A_3 - iA_4) \\ C_4 = \frac{1}{2}(A_3 + iA_4) \end{array} \right.$$

o que mostra que é possível encontrar constantes imaginárias C_3 e C_4 de modo a obter uma solução real para $v(x)$. No caso, as constantes C_3 e C_4 devem ser números complexos conjugados.

Na forma real (rescrevendo todos os coeficientes como A_i):

$$v(x) = A_1 + A_2x + A_3\cos(kx) + A_4\sin(kx) \quad (10)$$

Eq.(10) é, portanto, a solução geral (válida para qualquer condição de contorno) da E.D.O. de 4ª ordem, linear e homogênea, dada por Eq.(8).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como veremos a seguir, a aplicação das condições de contorno permitirão determinar alguns (mas não todos) coeficientes A_i .

Para o caso em tela (viga-coluna biapoçada e uso da E.D.O. de 4ª ordem) aplicaremos 4 condições de contorno:

- 2 condições para a extremidade inferior A:

$$v(0) = 0, \quad v''(0) = 0$$

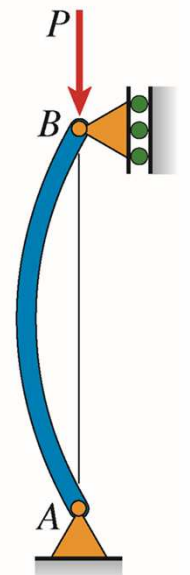
- 2 condições para a extremidade superior B:

$$v(L) = 0, \quad v''(L) = 0$$

$$v(x) = A_1 + A_2x + A_3\cos(kx) + A_4\sin(kx)$$

$$v'(x) = A_2 - A_3k\sin(kx) + A_4k\cos(kx)$$

$$v''(x) = -A_3k^2\cos(kx) - A_4k^2\sin(kx)$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\left[\begin{array}{l} v(0) = A_1 + A_3 = 0 \\ v''(0) = -A_3 k^2 = 0 \\ v(L) = A_1 + A_2 L + A_3 \cos(kL) + A_4 \operatorname{sen}(kL) = 0 \\ v''(L) = -A_3 k^2 \cos(kL) - A_4 k^2 \operatorname{sen}(kL) = 0 \end{array} \right.$$

Como $k^2 = P/EI \neq 0$, resulta da 2ª equação: $A_3 = 0$

E, portanto, da 1ª equação: $A_1 = 0$

E, assim, a 3ª e 4ª equações ficam:

$$\left[\begin{array}{l} A_2 L + A_4 \operatorname{sen}(kL) = 0 \\ A_4 \operatorname{sen}(kL) = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A_2 = 0 \\ \operatorname{sen}(kL) = 0 \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim, os modos de flambagem serão da forma:

$$v(x) = A_4 \text{sen}(kx)$$

mas a amplitude dos deslocamentos fica indeterminada (preço pago pela linearização da equação governante).

A equação: $\text{sen}(kL) = 0$ é denominada equação característica e sua solução permite determinar as cargas críticas e os modos de flambagem associados.

Neste caso: $\text{sen}(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Assim: $k^2 = \frac{P}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Leftrightarrow P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$



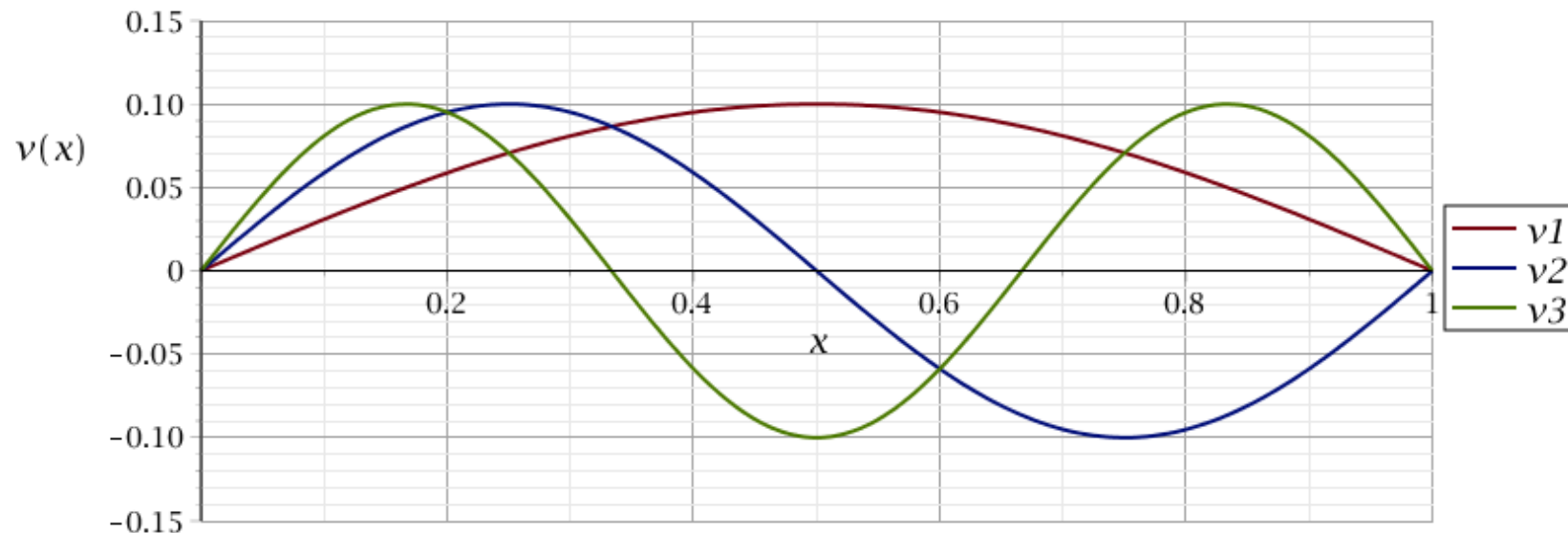
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$n = 1: \quad P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad v_1(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (1^\circ \text{ modo de flambagem})$$

$$n = 2: \quad P_{cr2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}, \quad v_2(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (2^\circ \text{ modo de flambagem})$$

$$n = 3: \quad P_{cr3} = \frac{9\pi^2 EI}{L^2}, \quad v_3(x) = A \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \quad (3^\circ \text{ modo de flambagem})$$

E assim por diante...



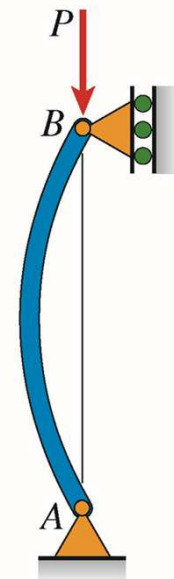


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.2. Solução pela relação Momento Fletor \times Curvatura linearizada (Eq.(6)):

Neste caso, é preciso obter a expressão do momento fletor atuante em uma posição genérica da viga-coluna, ou seja, é preciso determinar a função $M(x)$. Esta forma de solução requer as seguintes passagens:

1. Apresentar o D.C.L. da viga, com todas as reações de apoio;
2. Determinar as reações de apoio (note que, se a estrutura for hiperestática, não será possível determinar todas as reações de apoio apenas com as equações de equilíbrio estático);
3. Cortar a estrutura em uma posição (x) arbitrária e impor as equações de equilíbrio do trecho para encontrar $M(x)$;
4. Utilizar a relação Momento Fletor \times Curvatura e aplicar as condições de contorno necessárias.

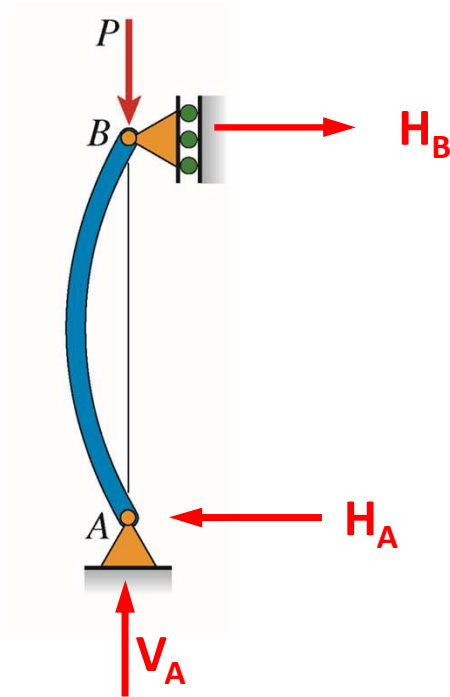




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo:

Passo 1:



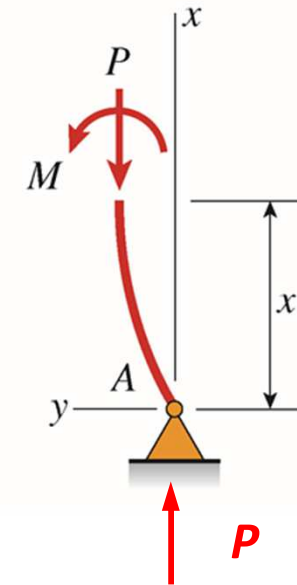
Passo 2:

Encontramos:

$$H_A = H_B = 0$$

$$V_A = P$$

Passo 3:



$$M(x) + Pv(x) = 0$$

$$M(x) = -Pv(x)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Passo 4:

$$M(x) = -Pv(x) = EIv''(x)$$

$$v''(x) + \frac{P}{EI}v(x) = 0$$

$$v''(x) + k^2v(x) = 0$$

$$v(x) = A\text{sen}(kx) + B\cos(kx)$$

Condições de Contorno:

$$v(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow A\text{sen}(kL) = 0$$

Como devemos ter $A \neq 0$,
resulta:

$$\text{sen}(kL) = 0$$

$$kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.3. Observações

A determinação das cargas críticas e dos modos de flambagem de vigas-coluna é mais um exemplo de problemas de autovalores e autovetores encontrados na Engenharia, como podemos ver pela própria natureza das equações utilizadas na solução, como a equação governante dada por Eq.(8):

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 0$$

Ou ainda pela relação (válida no caso da viga-coluna biapoiada):

$$M(x) = -Pv(x) = EIv''(x) \quad \Rightarrow \quad v''(x) = -\frac{P}{EI}v(x) = -k^2v(x)$$

Neste caso, as cargas críticas são os autovalores e os modos de flambagem (associados a cada carga crítica) são os autovetores (ou autofunções).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4. Carga Crítica de Euler

A flambagem de uma viga-coluna biapoiada no 1º modo é denominada de caso fundamental de flambagem.

O tipo de flambagem descrito nesta aula é denominado “flambagem de Euler”, e o carregamento crítico associado é denominado carregamento de Euler (ou carga crítica de Euler).

Leonhard Euler (1707-1783), geralmente reconhecido como o maior matemático de todos os tempos, foi a primeira pessoa a investigar a flambagem de uma coluna esbelta e determinar seu carregamento crítico. Seus resultados nesta área foram publicados em 1744.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap. 11 (seção 11.3)
- [2] Timoshenko, S.P., Gere, J.M. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, 1961, 541p.