FORMAS INDETERMINADAS E REGRA DE L'HOSPITAL

Disciplina: Cálculo I LOB1003
Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais – EEL-USP

REGRA DE L'HOSPITAL

OBJETIVO DO ESTUDO

- ✓ identificar corretamente situações em que a regra pode ser aplicada (formas 0/0 e ∞/∞);utilize derivadas para transformar limites indeterminados em limites determináveis;
- ✓ Interpretar o resultado do limite como um comportamento local da função;
- ✓ Resolver problemas envolvendo taxas de variação, crescimento, decrescimento e comparação entre funções.

REGRA DE L'HOSPITAL

Suponha que estejamos tentando analisar o comportamento da função:

$$f(x) = \frac{lnx}{x-1}$$

Como f(x) não é definida em x = 1, é preciso saber como f(x) se comporta próxima a 1. Determinando o limite tem-se:

$$\lim_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} \qquad \textbf{(1)}$$

REGRA DE L'HOSPITAL

De fato, embora o limite em (1) exista, seu valor não é óbvio, porque, tanto o numerador como o denominador tendem a 0 e $\frac{0}{0}$ não está definido.

Em geral se tivermos um limite da forma:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Em que *f(x)*$\rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow a$, então o limite pode ou não existir, sendo denominado forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$.

REGRA DE L'HOSPITAL

Porém, estes métodos não funcionam para limites tais como (1), de modo, que nesta seção introduziremos um método sistemático, denominado Regra de L'Hospital, para o cálculo de formas indeterminadas.

Considerando o limite apresentado anteriormente,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Em que $\boldsymbol{f(x) \to \infty\ ou\ (-\infty) e\ g(x) \to \infty\ ou\ (-\infty)}$, então o limite pode existir ou não existir, e é denominado forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

REGRA DE L'HOSPITAL

Regra de l'Hôspital Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

REGRA DE L'HOSPITAL

<u>OBSERVAÇÃO 1:</u> A Regra de L'Hospital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É importante verificar as condições relativas ao limite de *f* e *g* antes de usar a referida regra.

<u>OBSERVAÇÃO 2:</u> A Regra de L'Hospital é válida para os limites laterais e para os limites no infinito ou no infinito negativo, isto é, $x \to a$ pode ser substituído por quaisquer dos símbolos a seguir: $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

REGRA DE L'HOSPITAL

<u>OBSERVAÇÃO 3:</u> Para o caso especial no qual f(a) = g(a) = 0, f' e g' são contínuas e g'(a) ≠ 0, é possível constatar que a Regra de L'Hospital é verdadeira. De fato, usando a forma da definição de derivada tem-se:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

REGRA DE L'HOSPITAL

PRODUTO INDETERMINADO

Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \; e \; o \; \lim_{x\to a} g(x) = \infty \; ou \; (-\infty)$, então não está claro o valor de $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]$. Neste caso ocorrerá uma disputa entre f e g. Se f ganhar a disputa, a resposta será igual a 0; se g vencer, a resposta será igual a ∞ ou $(-\infty)$. Porém, poderá ocorrer um equilíbrio, e então a resposta será correspondente a um número finito diferente de zero. Este tipo de limite é denominado forma indeterminada do tipo $0 \times \infty$.

$$\boxed{fg = \frac{f}{1/g}} \quad \text{ou} \quad \boxed{fg = \frac{g}{1/f}}$$

REGRA DE L'HOSPITAL

DIFERENÇAS INDETERMINADAS

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, então o limite

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)]$$

É denominada forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$. Análogo ao item apresentado haverá um disputa entre f e g. A resposta será ∞ (se f ganhar) ou será $-\infty$ (se g ganhar), ou haverá entre as funções um equilíbrio, resultando num número finito. Então a diferença será convertida em quociente, de maneira a termos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

REGRA DE L'HOSPITAL

POTÊNCIAS INDETERMINADAS

Várias formas indeterminadas surgem do limite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0.
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0,
3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞.

REGRA DE L'HOSPITAL

POTÊNCIAS INDETERMINADAS

Cada um dos três casos pode ser tratado tanto tomando o logaritmo natural:

seja $y = [f(x)]^{g(x)}$, então $\boxed{\ln y = g(x) \ln f(x)}$,

quanto escrevendo a função como uma exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = \boxed{e^{g(x) \ln f(x)}}$$