

APROXIMAÇÕES LINEARES E DIFERENCIAIS

Disciplina: Cálculo I LOB1003

Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais – EEL/USP

OBJETIVO DO TÓPICO

- 1- Definir e calcular a aproximação linear de uma função derivável;
- 2- Utilizar diferenciais para estimar pequenas variações em grandezas e analisar erros aproximados;
- 3- Resolver problemas práticos envolvendo aproximação numérica, erros de medição e variações de grandezas físicas.

1- APROXIMAÇÃO LINEAR

Assim, consideraremos os valores calculados da função linear L , cujo gráfico é a reta tangente a f em $(a, f(a))$.

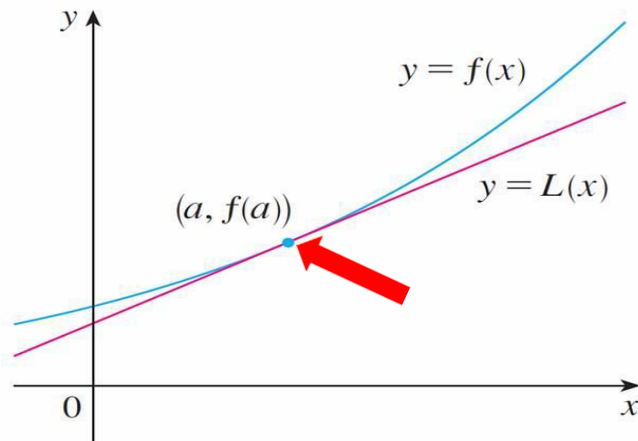


Figura 1- Função relacionada $y = f(x)$

Usaremos a reta tangente em $(a, f(a))$ como uma aproximação para a curva $y = f(x)$ quando x estiver próximo de a . A equação para a reta tangente é :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (1)$$

E a aproximação será:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2)$$

denominada aproximação linear ou aproximação pela reta tangente de f em a .

A função linear, cujo gráfico é a reta tangente, ou seja,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (3)$$

é denominada linearização de f em a .

Exemplo 1: Encontre a linearização da função $f(x) = \sqrt{x+3}$ em $a = 1$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{3,98}$ e $\sqrt{4,05}$. Essas aproximações estão superestimadas ou subestimadas?

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

$$f(1) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Com base na equação da reta tangente, tem-se:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 1)$$

$$y = 2 + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}$$

Substituindo os valores na equação (3),

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$L(x) = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}$$

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{x}{4} + \frac{7}{4}$$

$$\sqrt{3,98} \approx \frac{0,98}{4} + \frac{7}{4} = 1,995$$

1,994993734326 – Valor Real

$$\sqrt{4,05} \approx \frac{1,05}{4} + \frac{7}{4} = 2,0125$$

2,012461179749 – Valor Real

A aproximação linear está ilustrada na Figura 2,

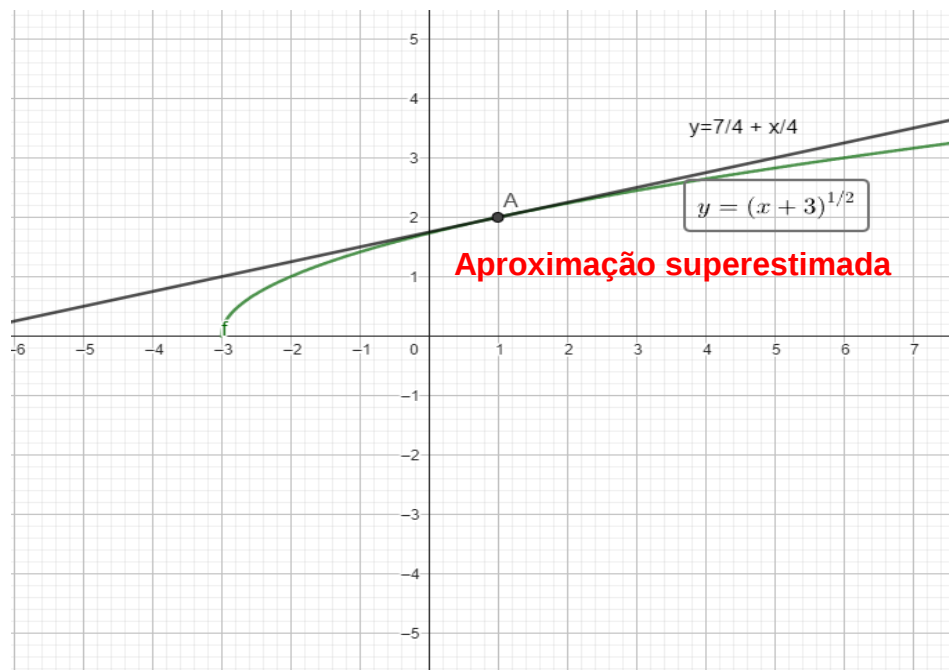


Figura 2- Gráfico relacionando a aproximação linear

Na tabela a seguir, comparamos as estimativas da aproximação linear com os valores verdadeiros:

	x	$L(x)$	<i>Valor Real</i>
$\sqrt{3,9}$	0,9	1,975	1,97484176
$\sqrt{3,98}$	0,98	1,995	1,99499373
$\sqrt{4}$	1	2	2,00000000
$\sqrt{4,05}$	1,05	2,0125	2,01246117
$\sqrt{4,1}$	1,1	2,025	2,02484567
$\sqrt{5}$	2	2,25	2,23606797
$\sqrt{6}$	3	2,5	2,44948974

2- DIFERENCIAIS

Durante o estudo apresentado, destacamos que $\frac{dy}{dx}$ representa apenas um notação de derivada. O que faremos a seguir é interpretar $\frac{dy}{dx}$ como um quociente entre dois acréscimos.

Se $y = f(x)$, onde f é uma função derivável, então a diferencial dx é uma variável independente, ou seja, a dx pode ser dado um valor qualquer. A diferencial dy é então definida em termos de dx pela equação:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

2.1- INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DIFERENCIAL

Assim dy é uma variável dependente; depende dos valores de x e dx . Se a dx for dado um valor específico e x for algum número específico no domínio de f , então o valor numérico de dy estará determinado. O significado geométrico das diferenciais está apresentado na Figura 3:

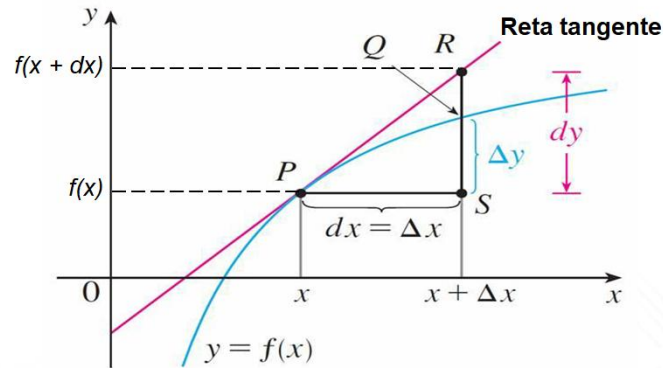


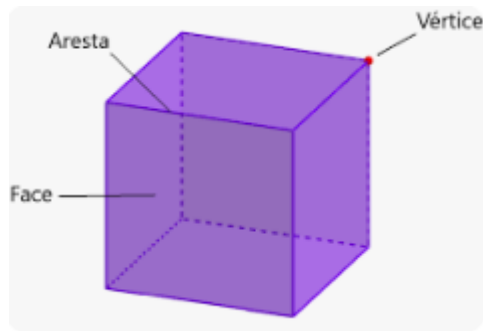
Figura 3- Significado geométrico das diferenciais

EXEMPLO 1- O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 cm.

- a- Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada do disco;
- b- Determinar o erro relativo e o percentual.

EXEMPLO 2- A aresta de um cubo tem 10 cm, com possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível no cálculo:

- A- Do volume do cubo;
- B- Da área da superfície do cubo



Erro absoluto – Valor real – Valor aproximado

Erro relativo – $\frac{\text{Erro absoluto}}{\text{Valor medido}}$

Erro percentual – Erro relativo x 100