

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS

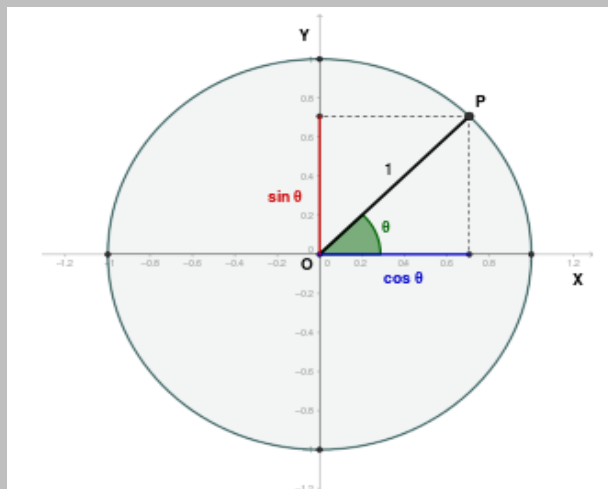
Disciplina: Cálculo I LOB1003

Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais – EEL-USP

O nome Funções Hiperbólicas, dado a combinação das funções exponenciais, se referem à relação que possuem com a hipérbole.

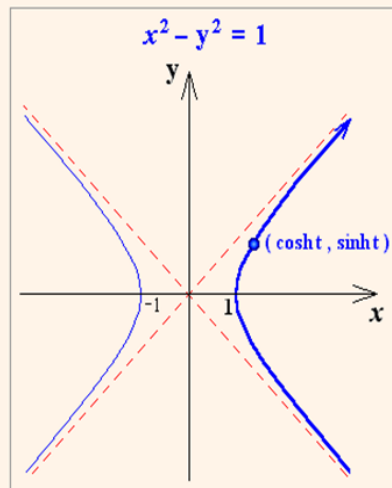
Funções Trigonômicas ou circulares



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

Funções Hiperbólicas



$$\left. \begin{aligned} x &= \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y &= \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - y^2 =$$

$$= \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} \right) - \left(\frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} \right) =$$

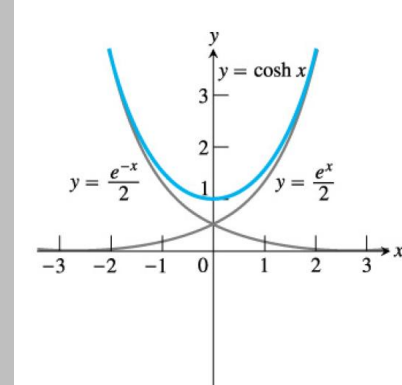
$$= \left(\frac{e^{2t} + 2 \cdot 1 + e^{-2t}}{4} \right) - \left(\frac{e^{2t} - 2 \cdot 1 + e^{-2t}}{4} \right) =$$

$$= \left(\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} \right) - \left(\frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} \right) = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t}}{4} = \frac{2 + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

DEFINIÇÕES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS

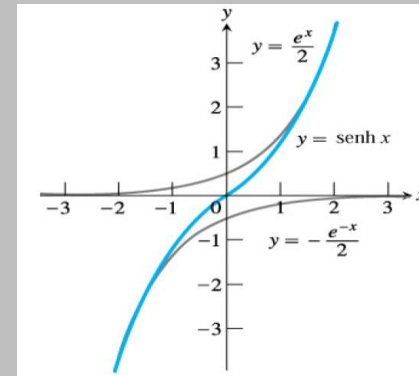
Cosseno hiperbólico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Seno hiperbólico

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



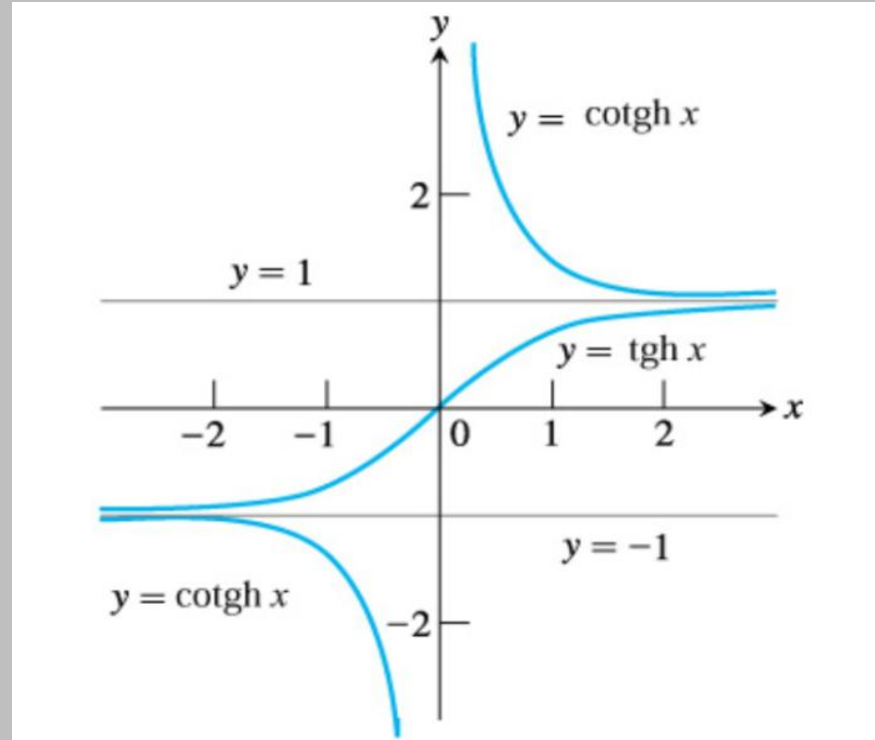
DEFINIÇÕES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS

Tangente hiperbólica

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Cotangente hiperbólica

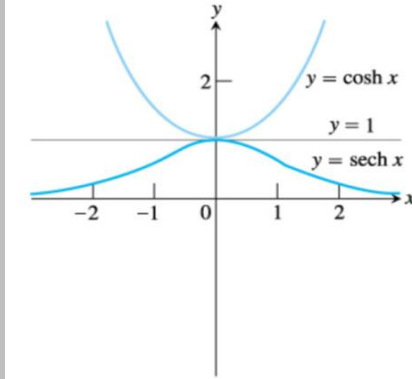
$$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



DEFINIÇÕES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS

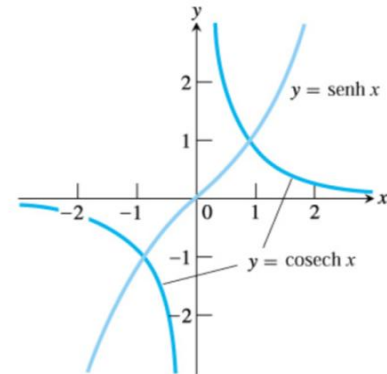
Secante hiperbólica

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$



Cossecante hiperbólica

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$



APLICAÇÃO DA FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA COSSENO HIPERBÓLICO

- ✓ As combinações de funções exponenciais surgem frequentemente em diversas aplicações matemáticas e por isso merecem nomes especiais.
- ✓ A aplicação mais famosa é o uso do cosseno hiperbólico para descrever a forma de um fio dependurado (Catenária).

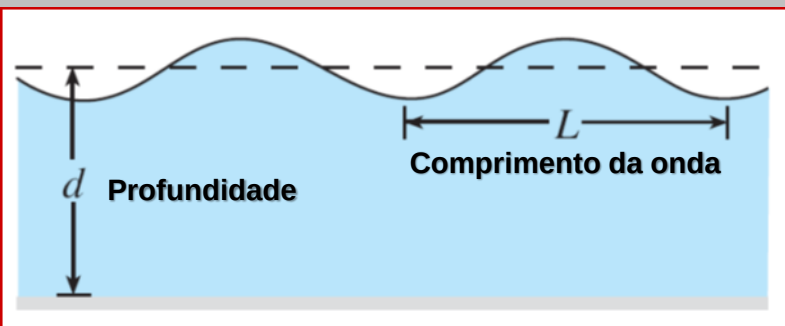
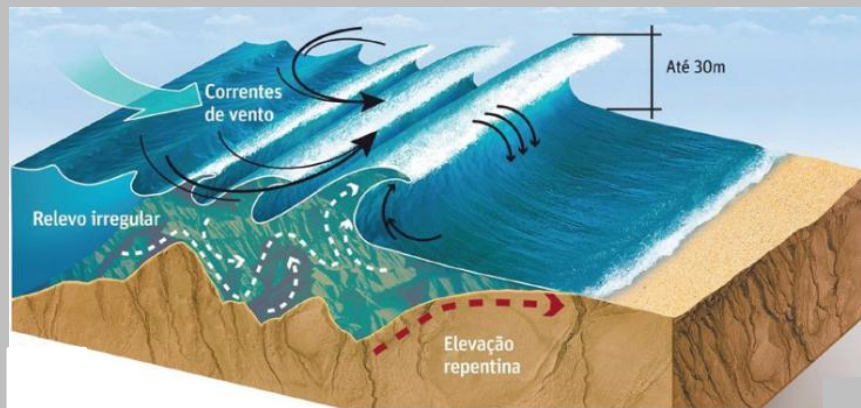
$$Y = C + ACOSH\left(\frac{X}{A}\right)$$

← **CATENÁRIA** →

↓



APLICAÇÃO DA FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA ONDA DO MAR



$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

APLICAÇÃO DA FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA COSSENO HIPERBÓLICO

TOP OF THE ARCH



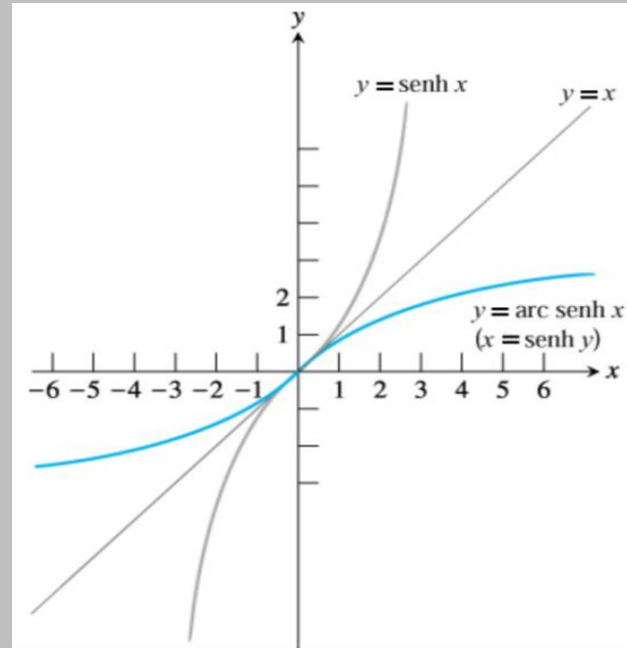
Gateway Arch em St. Louis foi um projeto que usou a função do cosseno hiperbólico

DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS

Funções	Derivadas
$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$
$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$
$y = \tanh x$	$y' = \operatorname{sech}^2 x$
$y = \operatorname{cotanh} x$	$y' = -\operatorname{cosech}^2 x$
$y = \operatorname{sech} x$	$y' = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$
$y = \operatorname{cosech} x$	$y' = -\operatorname{cosech} x \cdot \operatorname{cotanh} x$

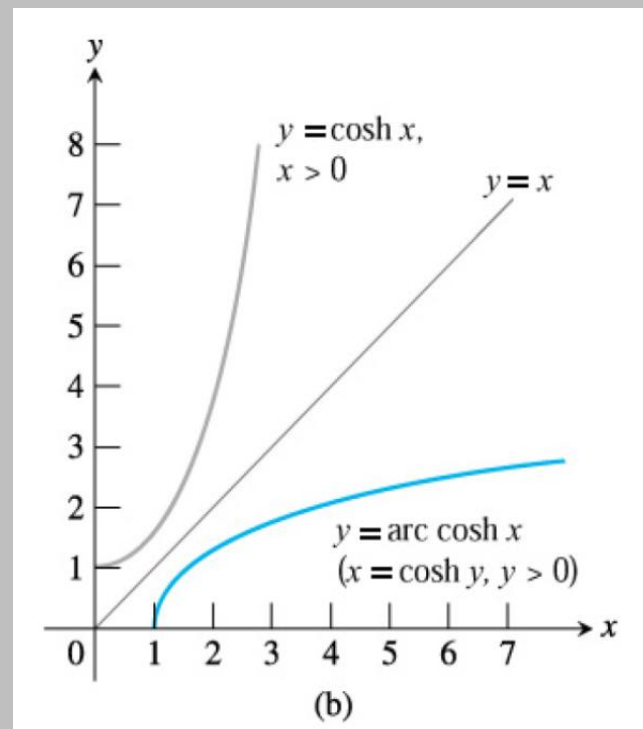
FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA INVERSA

$$y = \sinh^{-1}x \longrightarrow x = \sinh y$$



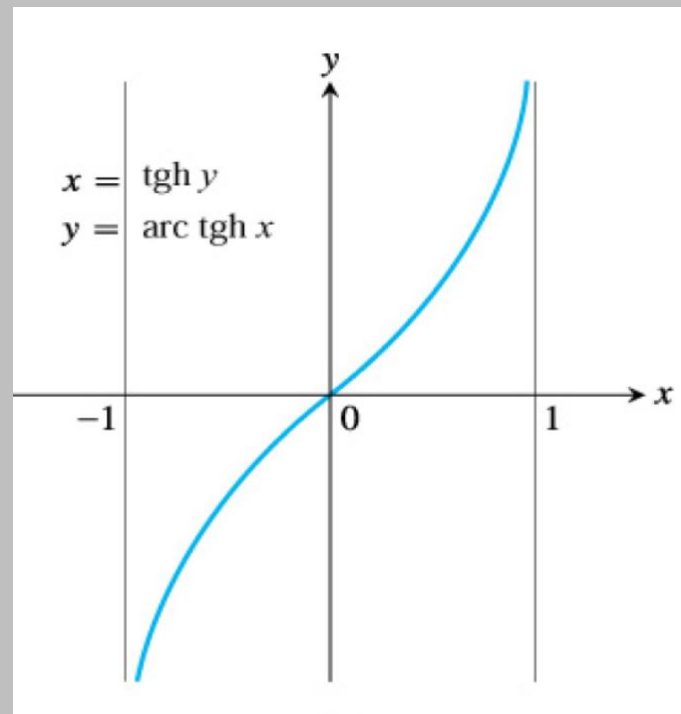
FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA INVERSA

$$y = \cosh^{-1}x \longrightarrow x = \cosh y$$



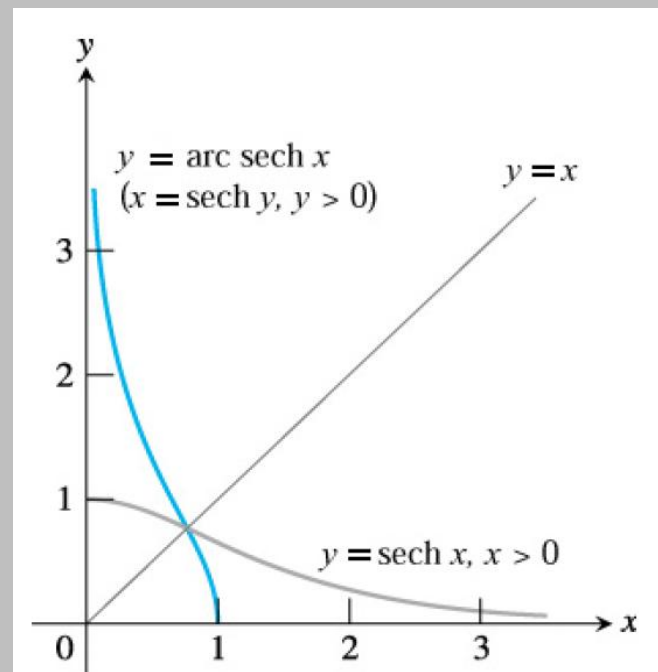
FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA INVERSA

$$y = \operatorname{tgh}^{-1}x \longrightarrow x = \operatorname{tgh} y$$



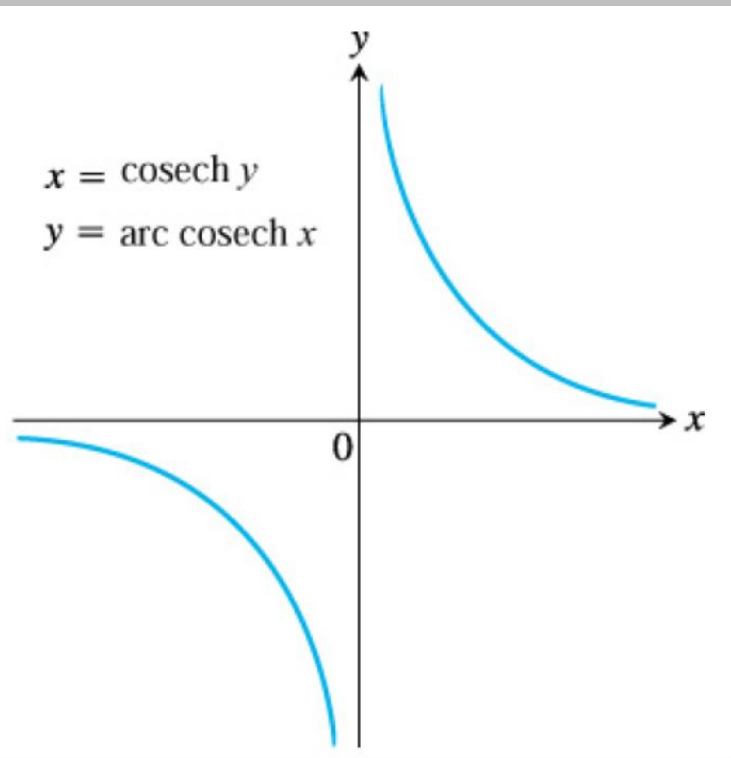
FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA INVERSA

$$y = \operatorname{sech}^{-1}x \longrightarrow x = \operatorname{sech} y$$



FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA INVERSA

$$y = \operatorname{cosech}^{-1}x \longrightarrow x = \operatorname{cosech} y$$

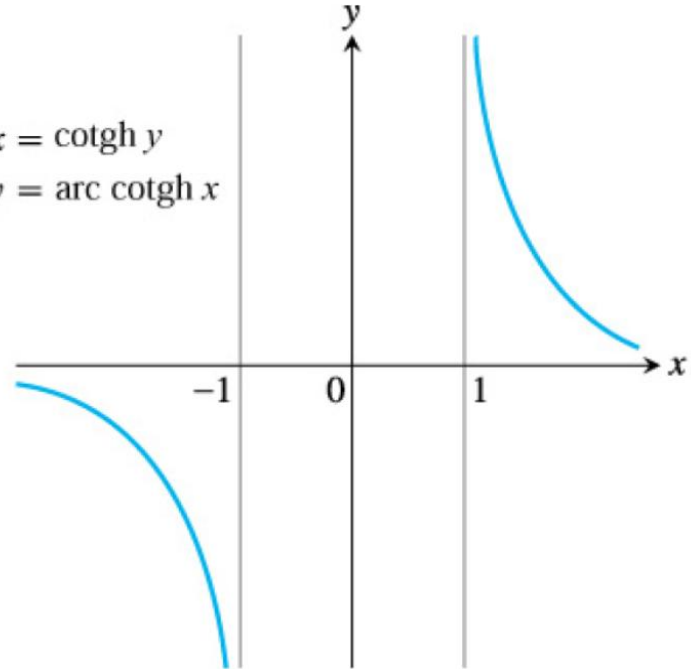


FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA INVERSA

$$y = \operatorname{cotgh}^{-1}x \longrightarrow x = \operatorname{cotgh} y$$

$$x = \operatorname{cotgh} y$$

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{cotgh} x$$



DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONÔMETRICAS HIPERBÓLICAS INVERSAS

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \sinh u(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{d}{dx} u(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \cosh u(x)) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{d}{dx} u(x) \quad u(x) > 1$$

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{tgh} u(x)) = \frac{1}{1-u^2} \frac{d}{dx} u(x) \quad |u(x)| < 1$$

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{cossech} u(x)) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2+1}} \frac{d}{dx} u(x) \quad u(x) \neq 0$$

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{sech} u(x)) = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{d}{dx} u(x) \quad 0 < u(x) < 1$$

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{cotgh} u(x)) = \frac{1}{1-u^2} \frac{d}{dx} u(x) \quad |u(x)| > 1$$

FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA INVERSA

EXEMPLOS

1- Usando os princípios da Física, pode ser mostrado que quando um cabo é pendurado entre dois postes, ele toma a forma de uma curva $y = f(x)$ que satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Onde ρ é a densidade linear do cabo, g é a aceleração da gravidade e T é a tensão no cabo no ponto mais baixo, e o sistema de coordenadas é apropriadamente escolhido. Verifique se a função,

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g}{T} x\right)$$

é uma solução dessa equação diferencial.

FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA INVERSA

2- Uma linha de telefone é pendurada entre dois postes separados a 14 m, na forma de catenária:

$$y = 20\cosh\left(\frac{x}{20}\right) - 15$$

em que x e y são medidos em metros.

a- Determinar a inclinação dessa curva onde ela encontra o poste à direita;

B- Encontre o ângulo θ entre a reta tangente e o poste.

