



EEL
USP

Escola de Engenharia de Lorena

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAIS

Disciplina: Cálculo I LOB1003

Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais – EEL-USP

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

OBJETIVO DO TÓPICO

1º- Encontrar a derivada de uma função inversa

2º- Analisar a relação entre ângulos e razões trigonométricas de forma bidirecional (função direta e inversa)

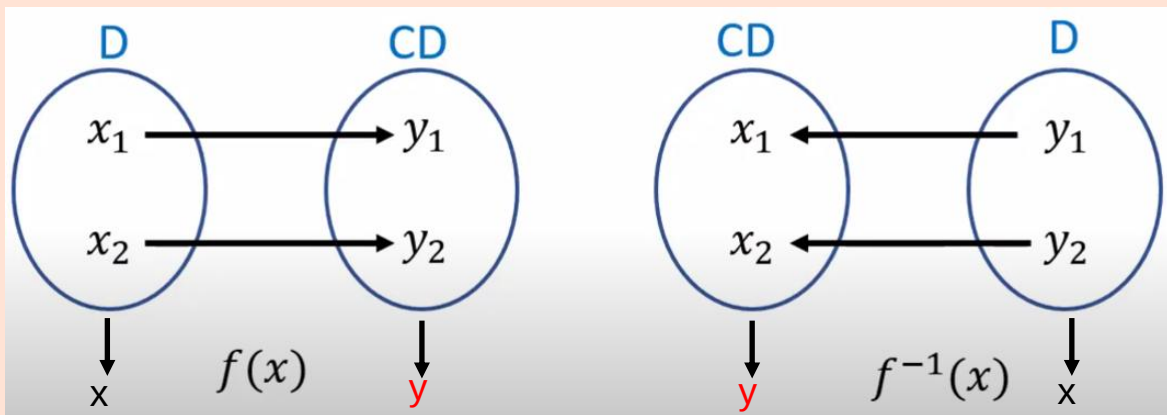
APLICAÇÕES PRÁTICAS

- **Geometria e trigonometria – para determinar ângulos em triângulos a partir de lados conhecidos.**
- **Física e engenharia – para calcular ângulos de inclinação, direção de forças, ou fase de ondas.**
- **Navegação e arquitetura – para encontrar orientação ou inclinação de trajetórias e estruturas.**
- **Computação gráfica e robótica – para determinar ângulos de rotação e posicionamento espacial.**

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Definição de função inversa

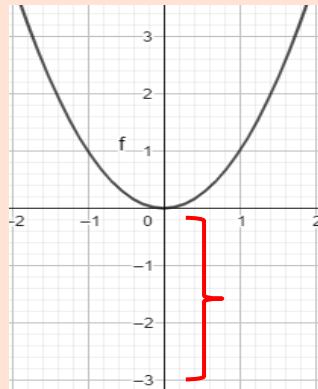
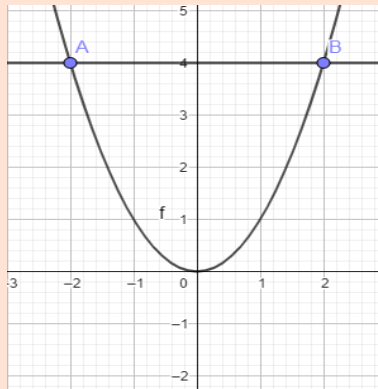
A função inversa de determinada função $f(x)$ é denotada por $f(x)^{-1}$, fazendo o inverso da função da $f(x)$ tem – se:



DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Para uma função ser invertível, ela deverá ser bijetora, ou seja:

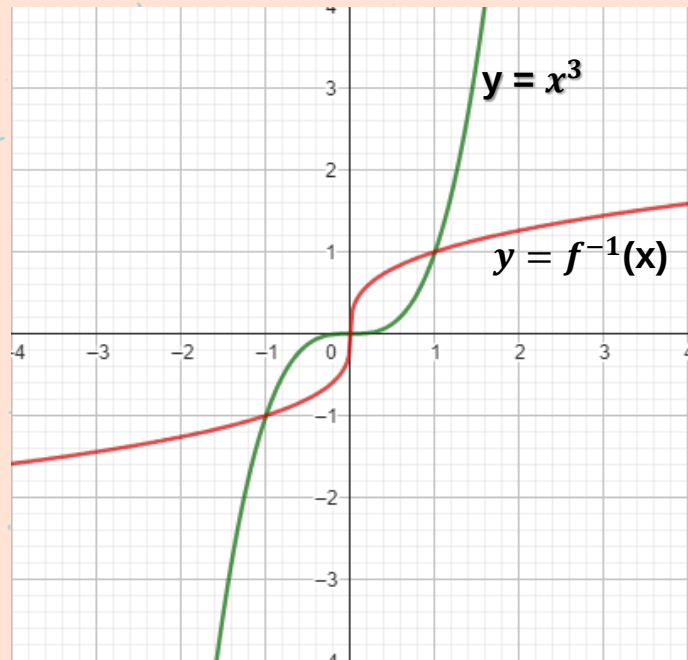
- Para todo x_1 e no domínio da função, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1)$ deve ser diferente de $f(x_2)$, ou seja, um mesmo valor de y não pode ser associado a dois valores de x .
- Todo valor de y no contradomínio deve ter um x correspondente, ou seja, não podemos ter nenhum $y \in \text{CD}$ que não tenha nenhum x para ele.



DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Como encontrar a função inversa?

Exemplo: Encontre a função inversa de $f(x) = x^3$.



DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

TEOREMAS

Teorema 1- Continuidade e diferenciabilidade das funções inversas

Se f é uma função cujo domínio está em um intervalo I . Se f tem uma função inversa, então as seguintes considerações são verdadeiras:

1º- f é contínua em seu domínio, então f^{-1} é contínua em seu domínio;

2º- f é diferenciável em um intervalo contendo c e $f'(c) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $f(c)$.

Teorema 2- A derivada de uma função inversa

Seja f uma função diferenciável em um intervalo I . Se f tem uma função inversa g , então g é diferenciável em qualquer x para o qual $f'(g(x)) \neq 0$. Então,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}; f'(g(x)) \neq 0$$

Teorema 3- Seja f inversível $g = f^{-1}$ é contínua, se f é derivável em $g(p) = q$ e $f'(q) \neq 0$, então g é derivável em p .

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONÔMETRICAS INVERSA

Exemplos:

a- $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

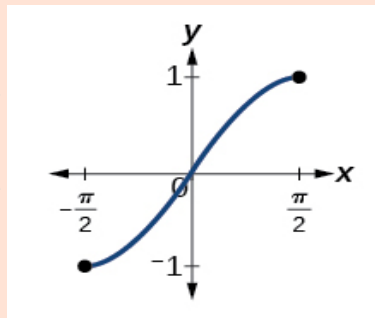


Figura 1- Função senoidal com domínio restrito

B- $f(x) = \cos x$, $x \in]0, \pi[$

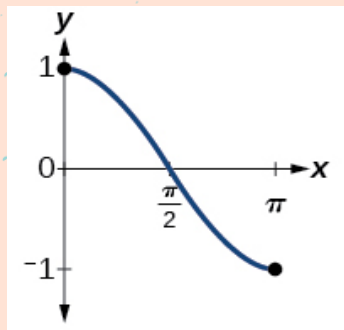


Figura 3- Função cosseno com domínio restrito

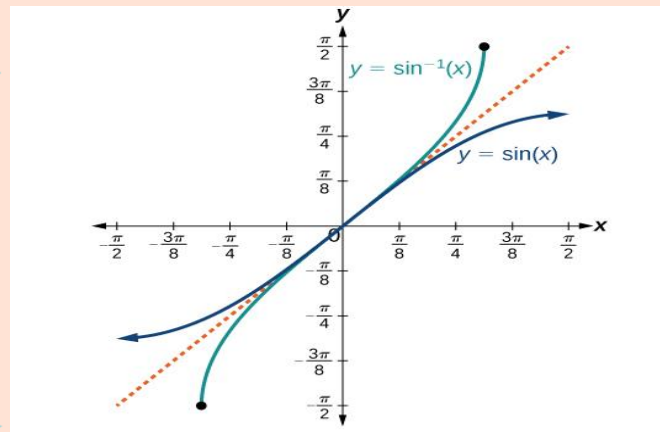


Figura 2- Função inversa do seno

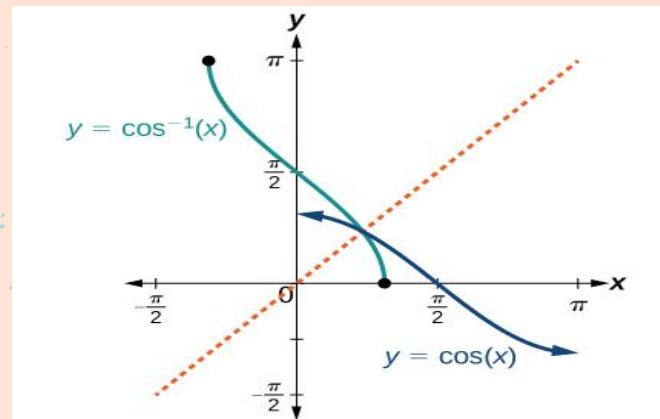


Figura 4- Função inversa do cosseno

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Formulário das funções trigonométricas inversas

Funções	Derivadas
$\text{sen}^{-1}(u)$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
$\text{cos}^{-1}(u)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
$\text{tan}^{-1}(u)$	$\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
$\text{sec}^{-1}(u)$	$\frac{1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
$\text{cossec}^{-1}(u)$	$\frac{-1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
$\text{cotg}^{-1}(u)$	$\frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Nome	Notação 1	Notação 2	Definição	Domínio como função real	Imagem (em radianos)
arco seno	$y = \arcsen(x)$	$y = \sin^{-1}(x)$	$x = \text{sen}(y)$	$[-1, +1]$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$
arco cosseno	$y = \arccos(x)$	$y = \cos^{-1}(x)$	$x = \text{cos}(y)$	$[-1, +1]$	$0 \leq y \leq \pi$
arco tangente	$y = \text{arctg}(x)$	$y = \text{tg}^{-1}(x)$	$x = \text{tg}(y)$	$\mathbf{R}$	$-\pi/2 < y < \pi/2$
arco cotangente	$y = \text{arccot}(x)$	$y = \text{cot}^{-1}(x)$	$x = \text{cotg}(y)$	$\mathbf{R}$	$0 < y < \pi$
arco secante	$y = \text{arcsec}(x)$	$y = \sec^{-1}(x)$	$x = \text{sec}(y)$	$[1, +\infty[\text{ ou }]-\infty, -1]$	$0 \leq y < \pi/2 \text{ ou } \pi/2 < y \leq \pi$
arco cossecante	$y = \text{arccosec}(x)$	$y = \text{cosec}^{-1}(x)$	$x = \text{cosec}(y)$	$] -\infty, -1] \text{ ou } [1, +\infty[$	$-\pi/2 \leq y < 0 \text{ ou } 0 < y \leq \pi/2$