



Universidade de São Paulo (USP), Escola
de Engenharia de Lorena (EEL),
Curso de Engenharia Física



Circuitos Elétricos - teoria e prática (LOM3262)

Prof. Andy Blanco Rodriguez

**Lorena-SP
2025/2**

- **Análise de Malhas em CA;**
- **Análise de Nodal em CA.**



Análise de circuitos em CA

Etapas para análise de circuitos CA:

1. Transformar o circuito para o domínio de fasores ou da frequência.
2. Solucionar o problema usando técnicas de circuitos (análise nodal, análise de malhas, superposição etc.).
3. Transforme o fasor resultante para o domínio do tempo.

Análise de Malhas em CA



Análise de malhas em CA

Procedimento:

1. **Atribua as correntes de malha $i_1, i_2, \dots, i_n$ às n malhas.**
Sugere-se sentido horário.
2. *Identificar as polaridades dos elementos não polarizados, de acordo com o sentido das correntes de malha.*
3. **Aplicar LKT a cada uma das malhas utilizando as correntes de malhas ao invés das correntes nos ramos.**
4. *Obter as equações de malha.*



Análise de malhas em CA

Procedimento:

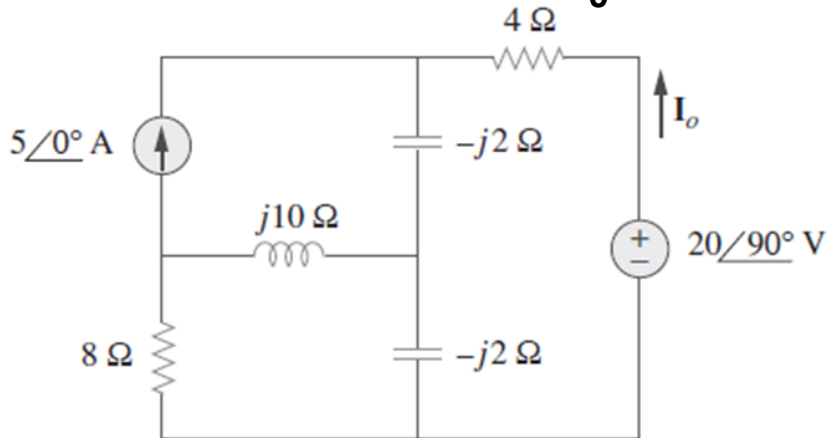
5. Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as correntes de malha.
6. *A partir das correntes de malhas calcular as correntes nos ramos.*
7. Calcular os parâmetros de interesse a partir das i dos ramos.



Análise de malhas em CA

Exemplo:

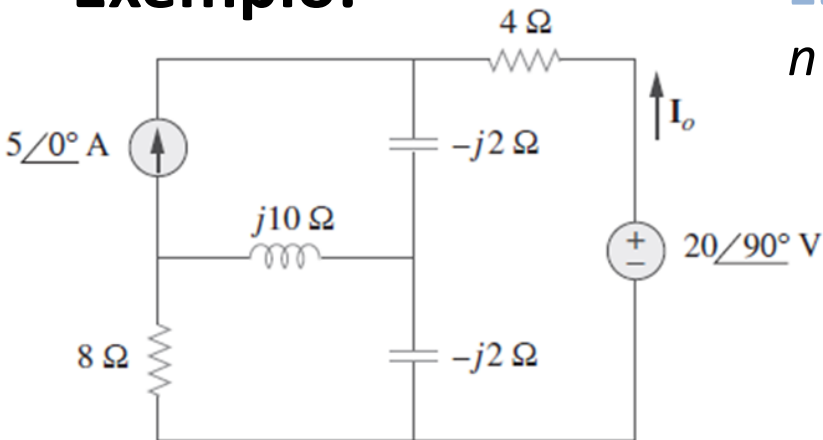
Determine a corrente I_o no circuito da figura abaixo. Use análise de malhas.





Análise de malhas em CA

Exemplo:

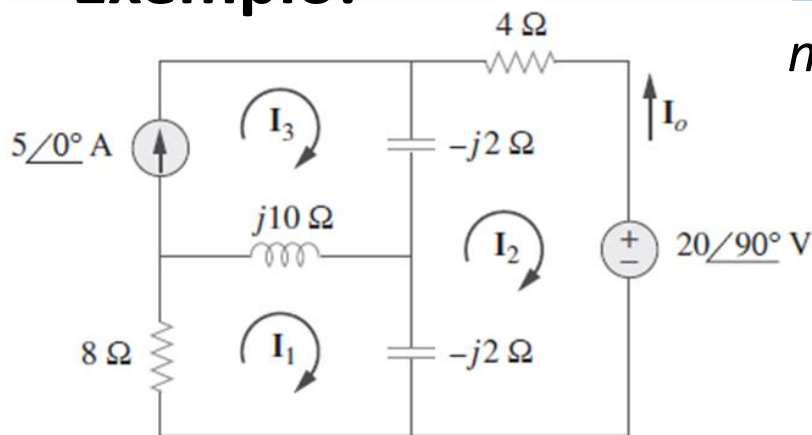


1. Atribua as correntes de malha $I_1, I_2, \dots, I_n$ às n malhas. Sugere-se sentido horário.



Análise de malhas em CA

Exemplo:



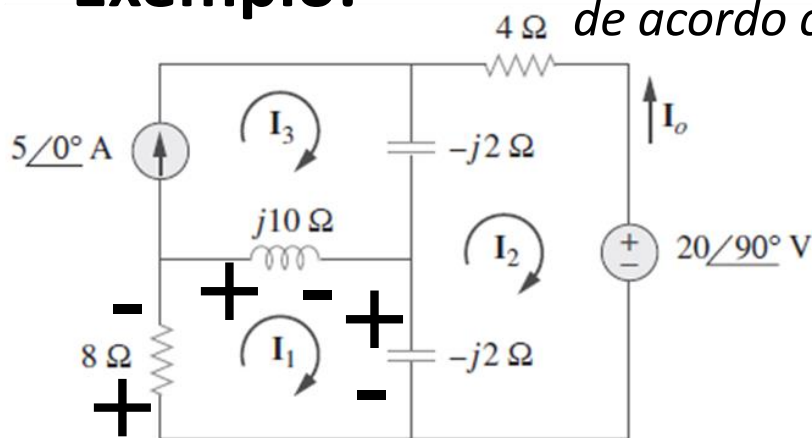
1. Atribua as correntes de malha $I_1, I_2, \dots, I_n$ às n malhas. Sugere-se sentido horário.



Análise de malhas em CA

Exemplo:

2. Identificar as polaridades dos elementos não polarizados, de acordo com o sentido das correntes de malha.

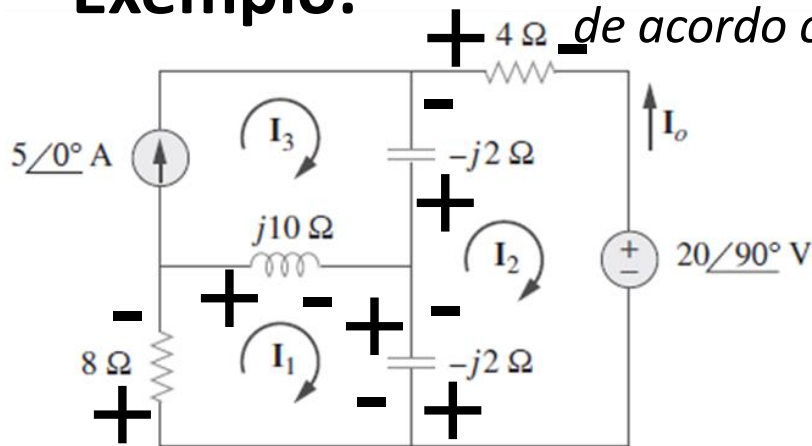




Análise de malhas em CA

Exemplo:

2. Identificar as polaridades dos elementos não polarizados, de acordo com o sentido das correntes de malha.

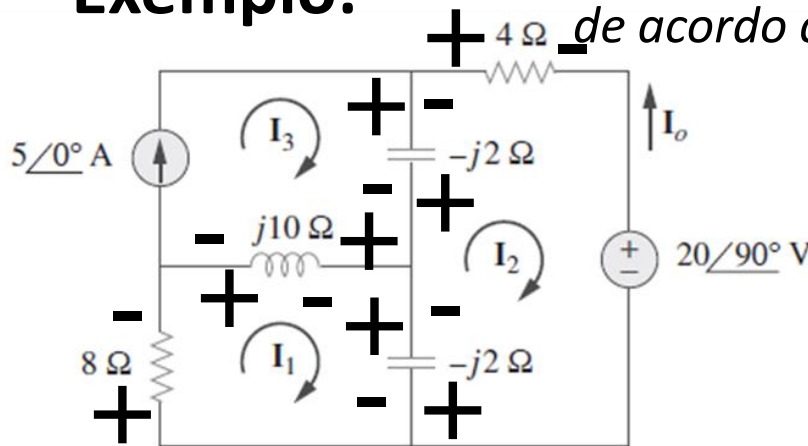




Análise de malhas em CA

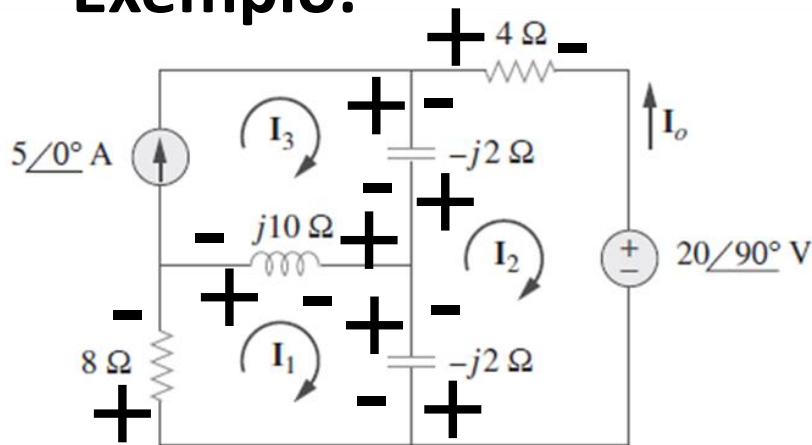
Exemplo:

2. Identificar as polaridades dos elementos não polarizados, de acordo com o sentido das correntes de malha.



Análise de malhas em CA

Exemplo:



3. Aplicar LKT a cada uma das malhas utilizando as correntes de malhas.

Malha 1:

$$(8 + j10 - j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_2 - j10\mathbf{I}_3 = 0 \quad \text{Eq (1)}$$

Malha 2:

Eq (2)

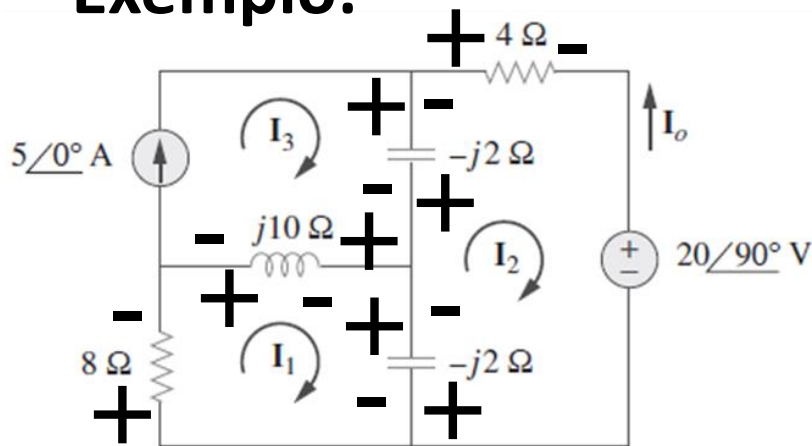
$$(4 - j2 - j2)\mathbf{I}_2 - (-j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_3 + 20\angle 90^\circ = 0$$

Malha 3: $\boxed{\mathbf{I}_3 = 5}$

Eq (3)

Análise de malhas em CA

Exemplo:



4. Obter as equações de malha.

Malha 1:

$$(8 + j10 - j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_2 - j10\mathbf{I}_3 = 0 \quad \text{Eq (1)}$$

Substituindo a Eq (3) na Eq(1):

$$(8 + j8)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = j50 \quad \text{Eq (4)}$$

Malha 2: Eq (2)

$$(4 - j2 - j2)\mathbf{I}_2 - (-j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_3 + 20\angle 90^\circ = 0$$

Substituindo a Eq (3) na Eq(2):

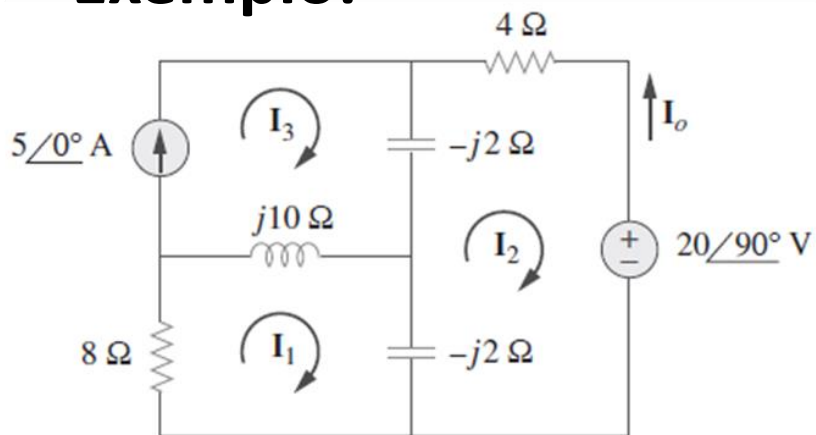
$$j2\mathbf{I}_1 + (4 - j4)\mathbf{I}_2 = -j20 - j10 \quad \text{Eq (5)}$$

Malha 3: $\mathbf{I}_3 = 5$ Eq (3)



Análise de malhas em CA

Exemplo:



Colocando Eq (4) e Eq(5) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 8 + j8 & j2 \\ j2 & 4 - j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j50 \\ -j30 \end{bmatrix}$$

5. Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as correntes de malha.

Malha 1:

$$(8 + j10 - j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_2 - j10\mathbf{I}_3 = 0 \quad \text{Eq (1)}$$

Substituindo a Eq (3) na Eq(1):

$$(8 + j8)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = j50 \quad \text{Eq (4)}$$

Malha 2:

Eq (2)

$$(4 - j2 - j2)\mathbf{I}_2 - (-j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_3 + 20\angle 90^\circ = 0$$

Substituindo a Eq (3) na Eq(2):

$$j2\mathbf{I}_1 + (4 - j4)\mathbf{I}_2 = -j20 - j10 \quad \text{Eq (5)}$$

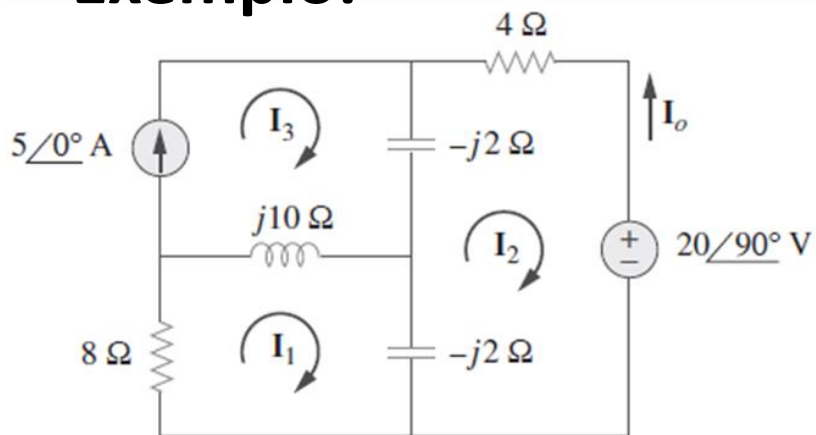
$$\text{Malha 3: } \mathbf{I}_3 = 5$$

Eq (3)



Análise de malhas em CA

Exemplo:



Colocando Eq (4) e Eq(5) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 8 + j8 & j2 \\ j2 & 4 - j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j50 \\ -j30 \end{bmatrix}$$

Obtendo os determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 + j8 & j2 \\ j2 & 4 - j4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 32(1 + j)(1 - j) + 4$$

$$\Delta = 68$$

5. Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as correntes de malha.

Malha 1:

$$(8 + j10 - j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_2 - j10\mathbf{I}_3 = 0 \quad \text{Eq (1)}$$

Substituindo a Eq (3) na Eq(1):

$$(8 + j8)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = j50 \quad \text{Eq (4)}$$

Malha 2:

Eq (2)

$$(4 - j2 - j2)\mathbf{I}_2 - (-j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_3 + 20\angle 90^\circ = 0$$

Substituindo a Eq (3) na Eq(2):

$$j2\mathbf{I}_1 + (4 - j4)\mathbf{I}_2 = -j20 - j10 \quad \text{Eq (5)}$$

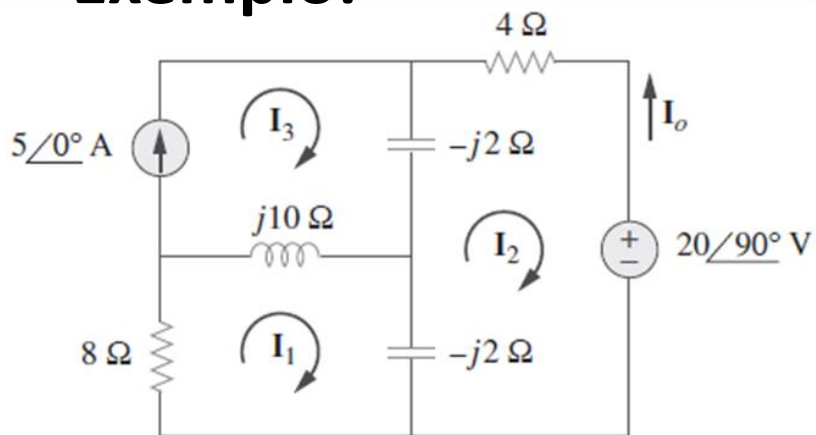
$$\text{Malha 3: } \mathbf{I}_3 = 5$$

Eq (3)



Análise de malhas em CA

Exemplo:



5. Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as correntes de malha.

Malha 1:

$$(8 + j10 - j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_2 - j10\mathbf{I}_3 = 0 \quad \text{Eq (1)}$$

Substituindo a Eq (3) na Eq(1):

$$(8 + j8)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = j50 \quad \text{Eq (4)}$$

Malha 2:

Eq (2)

$$(4 - j2 - j2)\mathbf{I}_2 - (-j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_3 + 20\angle 90^\circ = 0$$

Substituindo a Eq (3) na Eq(2):

$$j2\mathbf{I}_1 + (4 - j4)\mathbf{I}_2 = -j20 - j10 \quad \text{Eq (5)}$$

Malha 3:

$$\mathbf{I}_3 = 5$$

Eq (3)

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 8 + j8 & j50 \\ j2 & -j30 \end{vmatrix} = -j240 - (-1)240 - (-1)100 \\ &= 340 - j240 \\ &= 416,17\angle -35,22^\circ \end{aligned}$$

Colocando Eq (4) e Eq(5) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 8 + j8 & j2 \\ j2 & 4 - j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j50 \\ -j30 \end{bmatrix}$$

Obtendo os determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 + j8 & j2 \\ j2 & 4 - j4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 32(1 + j)(1 - j) + 4$$

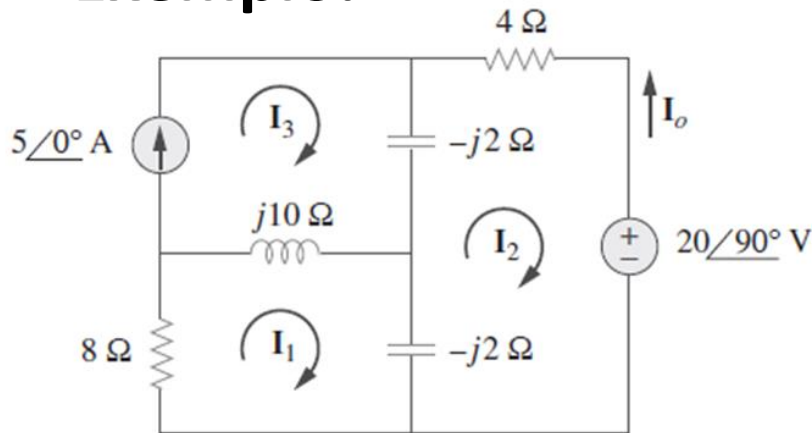
$$\Delta = 68$$



Análise de malhas em CA

Exemplo:

5. Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as correntes de malha.



$$\Delta = 68$$

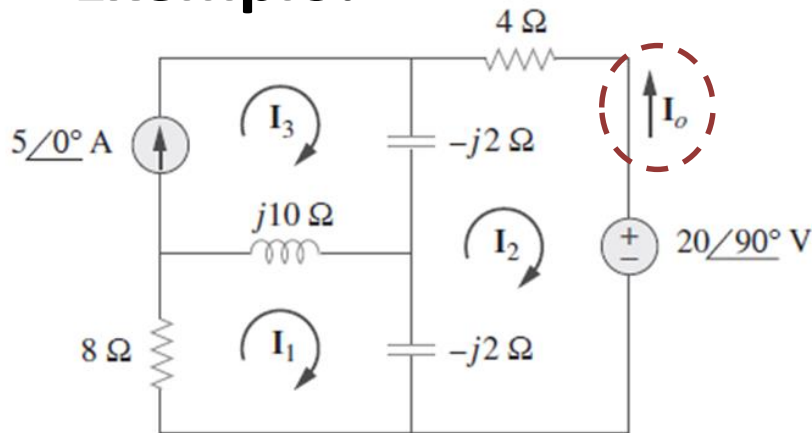
$$\Delta_2 = 416,17 \angle -35,22^\circ$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{416,17 \angle -35,22^\circ}{68}$$

$$I_2 = 6,12 \angle -35,22^\circ \text{ A}$$

Análise de malhas em CA

Exemplo:



6. A partir das correntes de malhas calcular as correntes nos ramos (*neste caso I_0*).

$$\Delta = 68$$

$$\Delta_2 = 416,17 \angle -35,22^\circ$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{416,17 \angle -35,22^\circ}{68}$$

$$I_2 = 6,12 \angle -35,22^\circ \text{ A}$$

A corrente I_0 do circuito é:

$$I_0 = -I_2 = 6,12 \angle 144,78^\circ \text{ A}$$

Análise Nodal em CA



Análise nodal em CA

Procedimento:

- 1. Selecione um nó como referência.** Atribua tensões $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ aos $n - 1$ nós restantes. As tensões são medidas em relação ao nó de referência.
- 2. *Designar as tensões nodais, aos nós restantes.***
- 3. Nomear as correntes em cada ramo do circuito.**
- 4. *Aplicar LKC a cada um dos $n-1$ nós que não são de referência.***



Análise nodal em CA

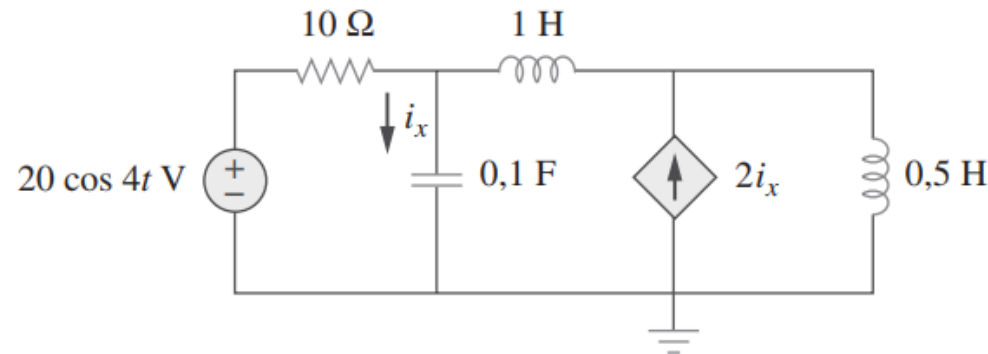
Procedimento:

5. Expressar as correntes nos ramos em termos de tensões nodais.
6. *Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as tensões nodais.*
7. A partir das tensões nodais **obter os parâmetros necessários.**

Análise nodal em CA

Exemplo:

Calcule as tensões nodais do circuito da figura abaixo. Use análise nodal.

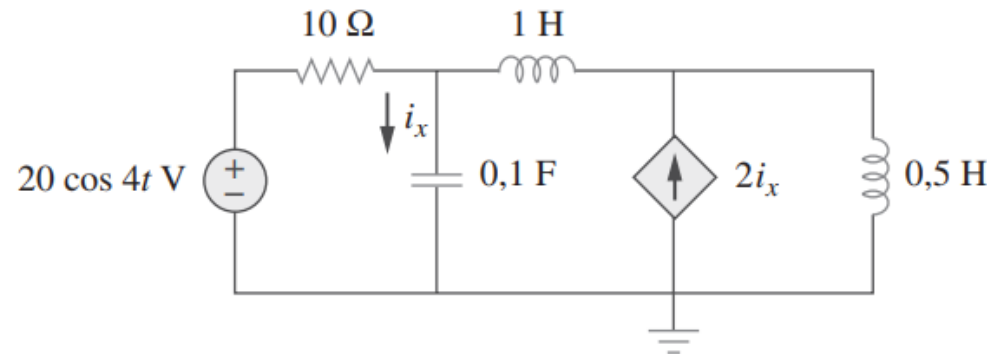




Análise nodal em CA

Exemplo:

Calcule as tensões nodais do circuito da figura abaixo. Use análise nodal.



$$20 \cos 4t \Rightarrow 20 \angle 0^\circ, \quad \omega = 4 \text{ rad/s}$$

$$1 \text{ H} \Rightarrow j\omega L = j4$$

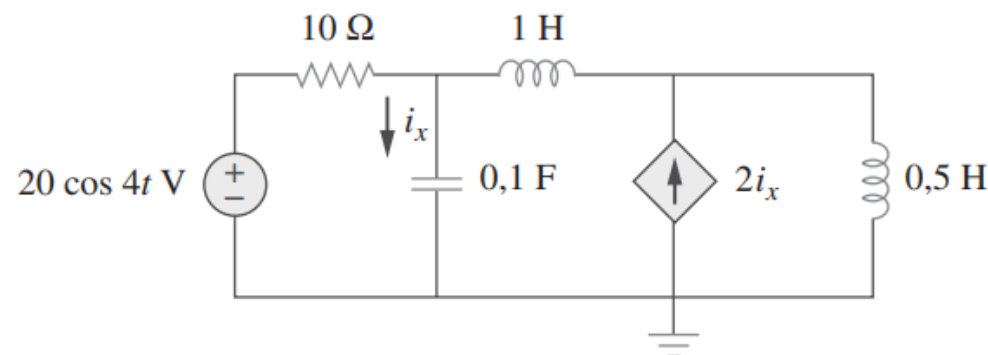
$$0,5 \text{ H} \Rightarrow j\omega L = j2$$

$$0,1 \text{ F} \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j2,5$$

Análise nodal em CA

Exemplo:

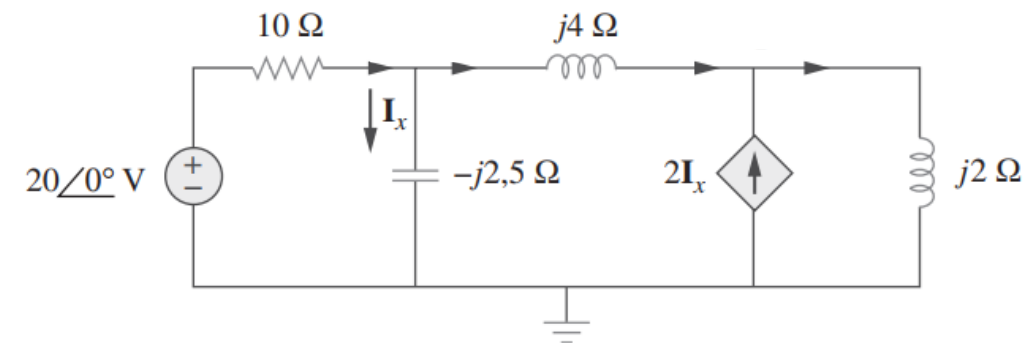
Calcule as tensões nodais do circuito da figura abaixo. Use análise nodal.



$$\begin{aligned}
 20 \cos 4t &\Rightarrow 20 \angle 0^\circ, & \omega &= 4 \text{ rad/s} \\
 1 \text{ H} &\Rightarrow j\omega L = j4 \\
 0,5 \text{ H} &\Rightarrow j\omega L = j2 \\
 0,1 \text{ F} &\Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j2,5
 \end{aligned}$$

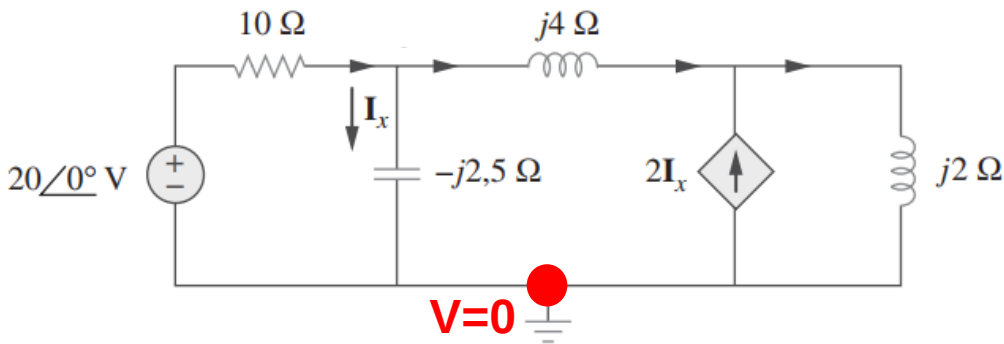


Circuito equivalente no domínio da frequência



Análise nodal em CA

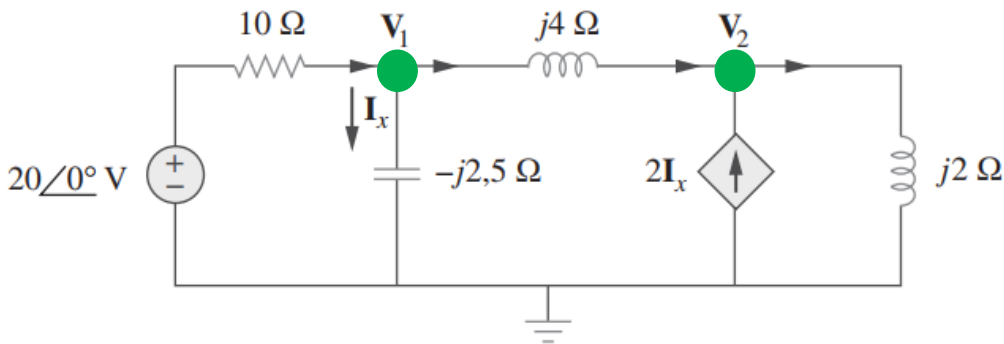
Exemplo:



1. Selecione um nó como referência.
Atribua tensões $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ aos $n - 1$ nós restantes.

Análise nodal em CA

Exemplo:

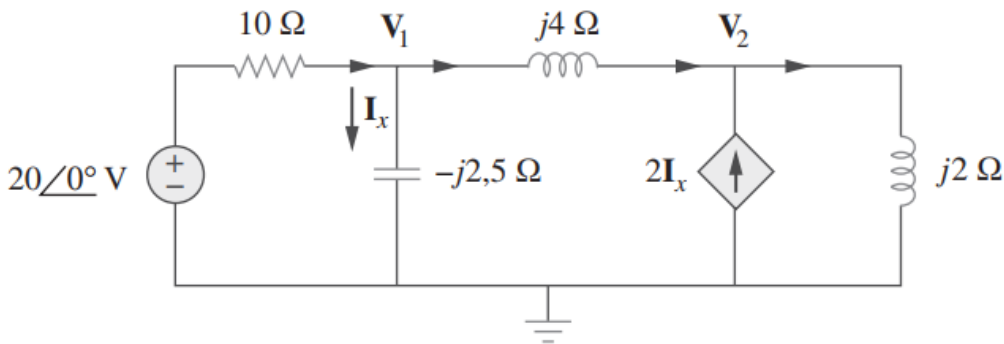


2. *Designar as tensões nodais, aos nós restantes.*



Análise nodal em CA

Exemplo:



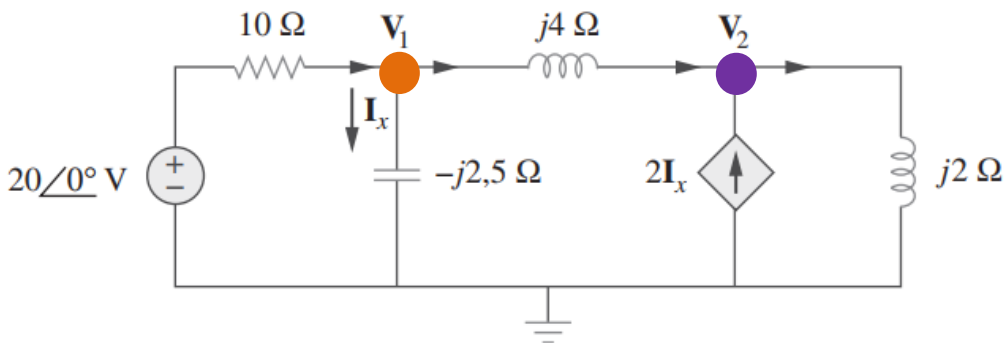
3. Nomear as correntes em cada ramo do circuito (caso necessário).

4. Aplicar LKC a cada um dos $n-1$ nós que não são de referência.



Análise nodal em CA

Exemplo:



3. Nomear as correntes em cada ramo do circuito (caso necessário).

4. Aplicar LKC a cada um dos $n-1$ nós que não são de referência.

Nó 1:

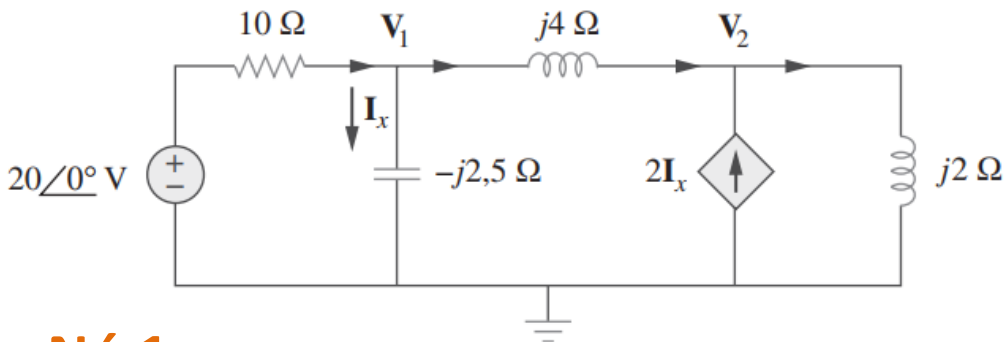
$$\frac{20 - V_1}{10} = \frac{V_1}{-j2,5} + \frac{V_1 - V_2}{j4}$$

Nó 2:

$$\frac{V_1 - V_2}{j4} + 2I_x = \frac{V_2}{j2}$$

Análise nodal em CA

Exemplo:



5. Expressar as correntes nos ramos em termos de tensões nodais.

Nó 1:

$$\frac{20 - V_1}{10} = \frac{V_1}{-j2,5} + \frac{V_1 - V_2}{j4}$$

$$2 - \frac{V_1}{10} = \frac{V_1}{-j2,5} + \frac{V_1}{j4} - \frac{V_2}{j4}$$

$$2 = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{-j2,5} + \frac{1}{j4} \right) V_1 + \frac{1}{-j4} V_2$$

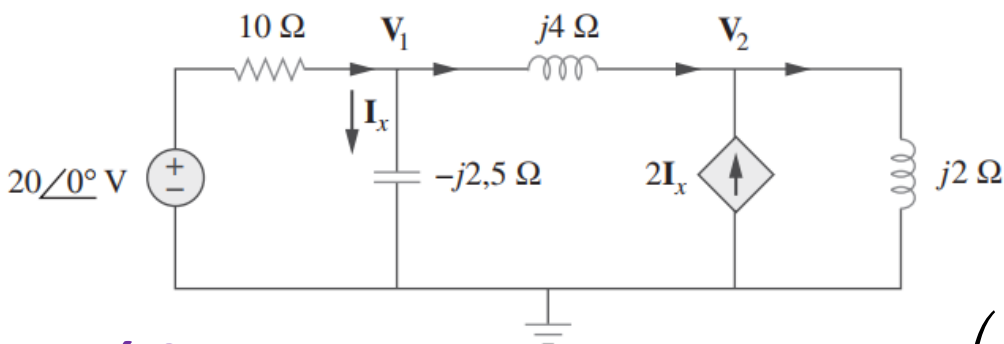
$$(0,1 + j0,4 - j0,25)V_1 + j0,25V_2 = 2 \quad \times 10$$

$$(1 + j1,5)V_1 + j2,5V_2 = 20$$



Análise nodal em CA

Exemplo:



Nó 2:

$$\frac{V_1 - V_2}{j4} + 2I_X = \frac{V_2}{j2}$$

$$2I_X = \left(\frac{1}{j4} + \frac{1}{j2} \right) V_2 - \frac{1}{j4} V_1$$

$$2 \left(\frac{V_1}{-j2,5} \right) = -\frac{1}{j4} V_1 + \left(\frac{1}{j4} + \frac{1}{j2} \right) V_2$$

5. Expressar as correntes nos ramos em termos de tensões nodais.

$$0 = \left(\frac{2}{j2,5} - \frac{1}{j4} \right) V_1 + \left(\frac{1}{j4} + \frac{1}{j2} \right) V_2$$

$$0 = \left(\frac{1}{j} 0,8 - \frac{1}{j} 0,25 \right) V_1 + \left(\frac{1}{j} 0,25 + \frac{1}{j} 0,5 \right) V_2$$

$$0 = (-j0,8 + j0,25) V_1 + (-j0,25 - j0,5) V_2$$

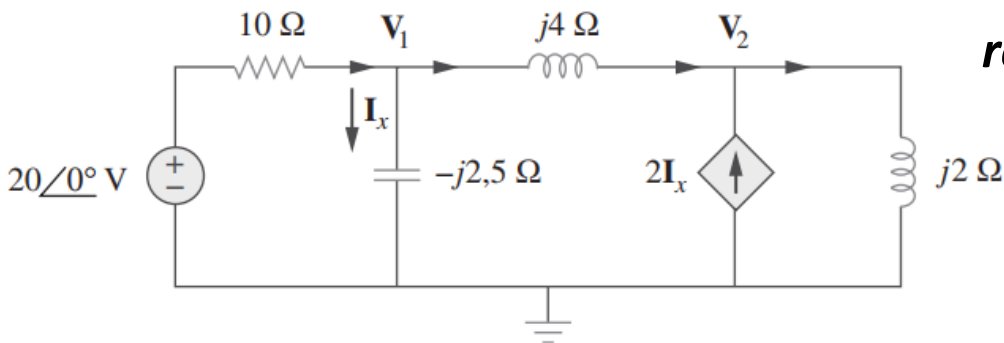
$$0 = (-j0,55) V_1 + (-j0,75) V_2 \quad \times \frac{1}{-j0,05}$$

$$0 = 11V_1 + 15V_2$$



Análise nodal em CA

Exemplo:



6. Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as tensões nodais.

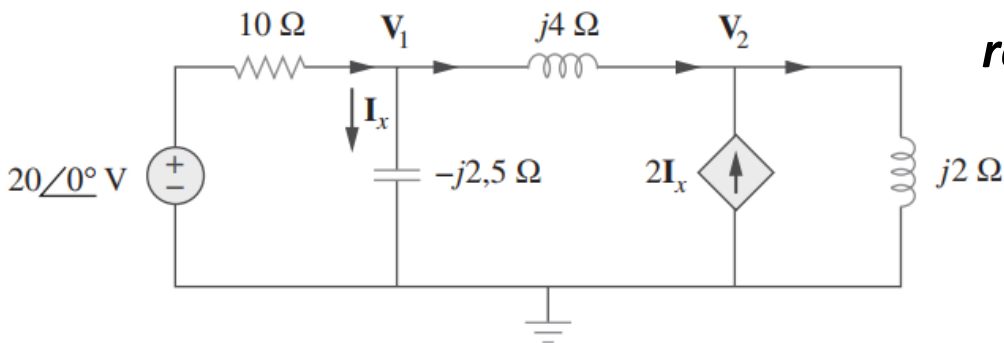
7. A partir das tensões nodais obter os parâmetros necessários.

$$(1 + j1,5)V_1 + j2,5V_2 = 20$$

$$11V_1 + 15V_2 = 0$$

Análise nodal em CA

Exemplo:



6. Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as tensões nodais.

7. A partir das tensões nodais obter os parâmetros necessários.

$$(1 + j1,5)V_1 + j2,5V_2 = 20$$

$$11V_1 + 15V_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 + j1,5 & j2,5 \\ 11 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = (1 + j1,5)(15) - (11)(j2,5)$$

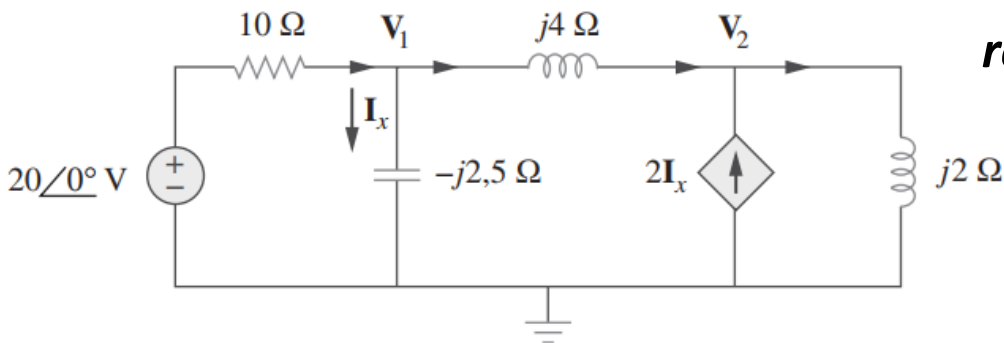
$$\Delta = 15 - j22,5 - j27,5$$

$$\Delta = 15 - j5$$



Análise nodal em CA

Exemplo:



6. Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as tensões nodais.

7. A partir das tensões nodais obter os parâmetros necessários.

$$(1 + j1,5)V_1 + j2,5V_2 = 20$$

$$11V_1 + 15V_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 20 & j2,5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + j1,5 & 20 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = (20)(15) - 0 \quad \Delta_2 = 0 - (11)(20)$$

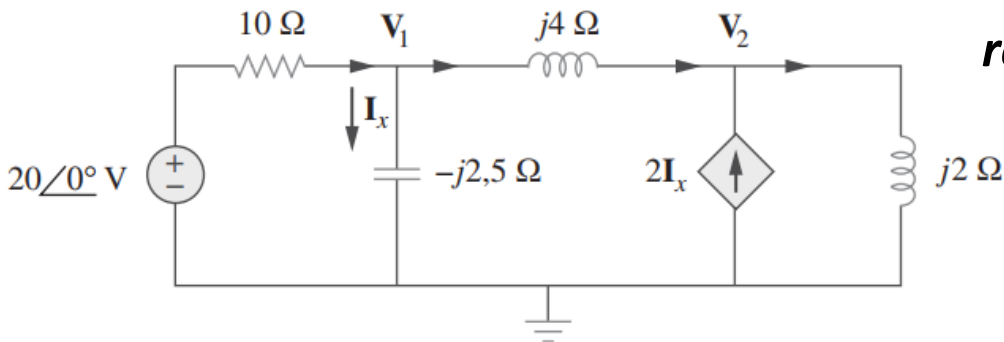
$$\Delta_1 = 300$$

$$\Delta_2 = -220$$



Análise nodal em CA

Exemplo:



6. Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as tensões nodais.

7. A partir das tensões nodais obter os parâmetros necessários.

$$(1 + j1,5)V_1 + j2,5V_2 = 20$$

$$\begin{bmatrix} 20 & j2,5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + j1,5 & 20 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$11V_1 + 15V_2 = 0$$

$$\Delta_1 = (20)(15) - 0 \quad \Delta_2 = 0 - (11)(20)$$

$$\Delta_1 = 300$$

$$\Delta_2 = -220$$

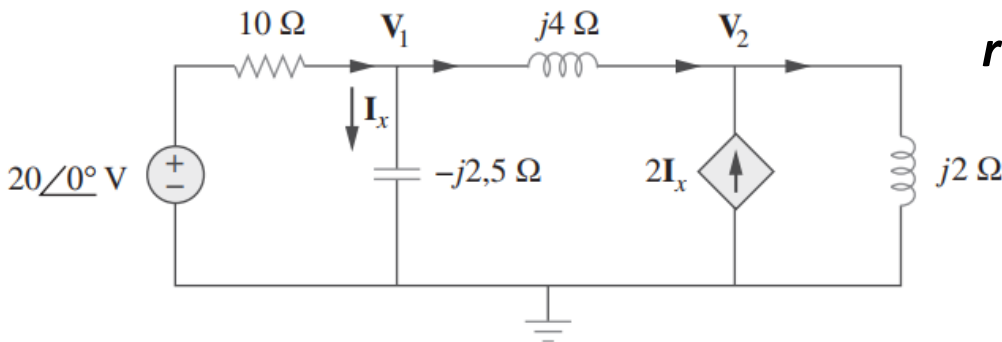
$$\Delta = 15 - j5$$

$$V_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{300}{15 - j5} = \frac{300\angle 0^\circ}{15,81\angle -18,43^\circ} = 18,97\angle 18,43^\circ \text{ V}$$



Análise nodal em CA

Exemplo:



6. Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as tensões nodais.

7. A partir das tensões nodais obter os parâmetros necessários.

$$(1 + j1,5)V_1 + j2,5V_2 = 20$$

$$\begin{bmatrix} 20 & j2,5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + j1,5 & 20 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$11V_1 + 15V_2 = 0$$

$$\Delta_1 = (20)(15) - 0 \quad \Delta_2 = 0 - (11)(20)$$

$$\Delta_1 = 300$$

$$\Delta_2 = -220$$

$$\Delta = 15 - j5$$

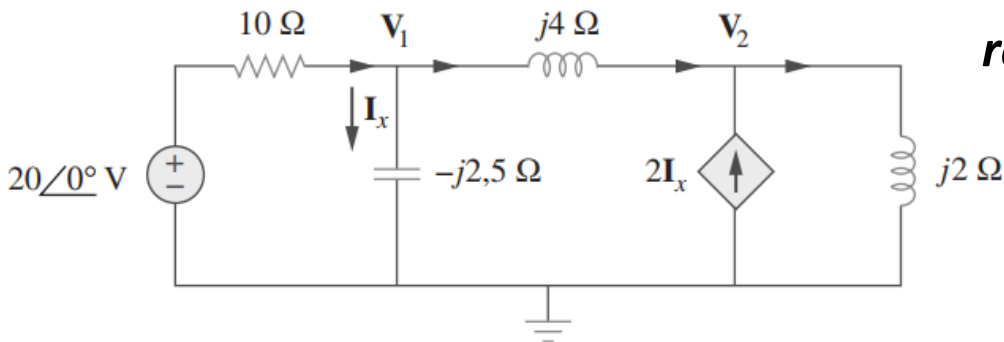
$$V_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{300}{15 - j5} = \frac{300\angle 0^\circ}{15,81\angle -18,43^\circ} = 18,97\angle 18,43^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-220}{15 - j5} = \frac{-220\angle 180^\circ}{15,81\angle -18,43^\circ} = 13,91\angle 198,43^\circ \text{ V}$$



Análise nodal em CA

Exemplo:



6. Resolver as n equações simultâneas resultantes para obter as tensões nodais.

7. A partir das tensões nodais obter os parâmetros necessários.

$$(1 + j1,5)V_1 + j2,5V_2 = 20$$

$$\begin{bmatrix} 20 & j2,5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + j1,5 & 20 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$11V_1 + 15V_2 = 0$$

$$\Delta_1 = (20)(15) - 0 \quad \Delta_2 = 0 - (11)(20)$$

$$\Delta_1 = 300$$

$$\Delta_2 = -220$$

$$\Delta = 15 - j5$$

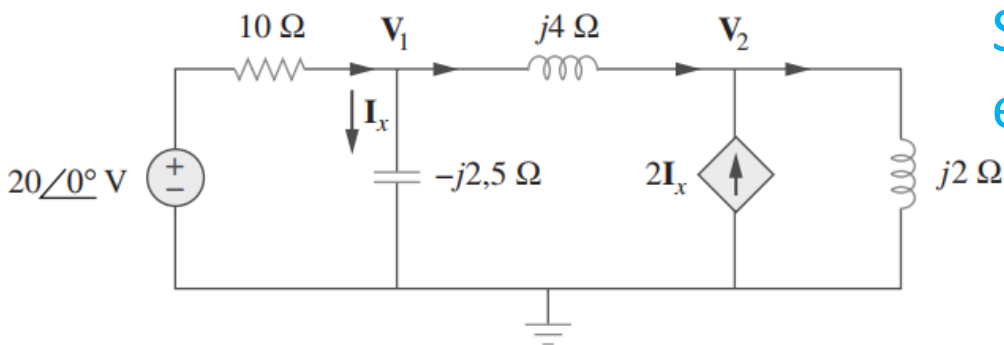
$$V_1 = 18,97 \angle 18,43^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = 13,91 \angle 198,43^\circ \text{ V}$$



Análise nodal em CA

Exemplo:



Se eu quisesse calcular, por exemplo, a corrente i_x no tempo:

$$V_1 = 18,97 \angle 18,43^\circ \text{ V}$$

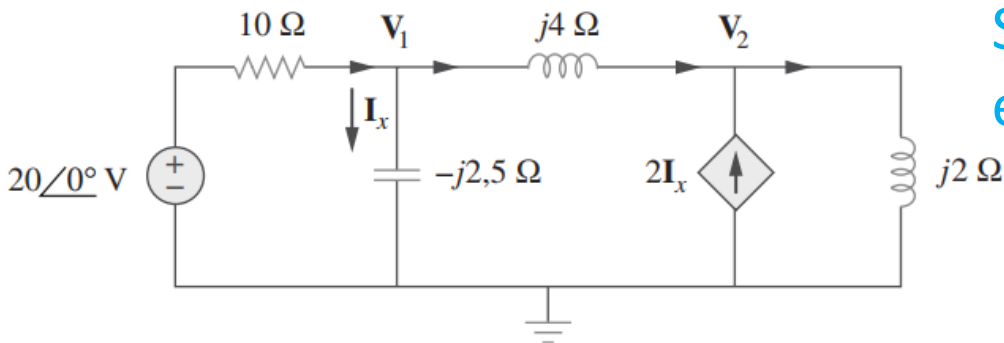
$$V_2 = 13,91 \angle 198,43^\circ \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{-j2,5} = \frac{18,97 \angle 18,43^\circ}{2,5 \angle -90^\circ} = 7,59 \angle -71,57^\circ = 7,59 \angle 108,43^\circ \text{ A}$$



Análise nodal em CA

Exemplo:



Se eu quisesse calcular, por exemplo, a corrente i_x no tempo:

$$V_1 = 18,97 \angle 18,43^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = 13,91 \angle 198,43^\circ \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{-j2,5} = \frac{18,97 \angle 18,43^\circ}{2,5 \angle -90^\circ} = 7,59 \angle -71,57^\circ = 7,59 \angle 108,43^\circ \text{ A}$$

$$i_x = 7,59(\cos 4t + 108,43^\circ) \text{ A}$$



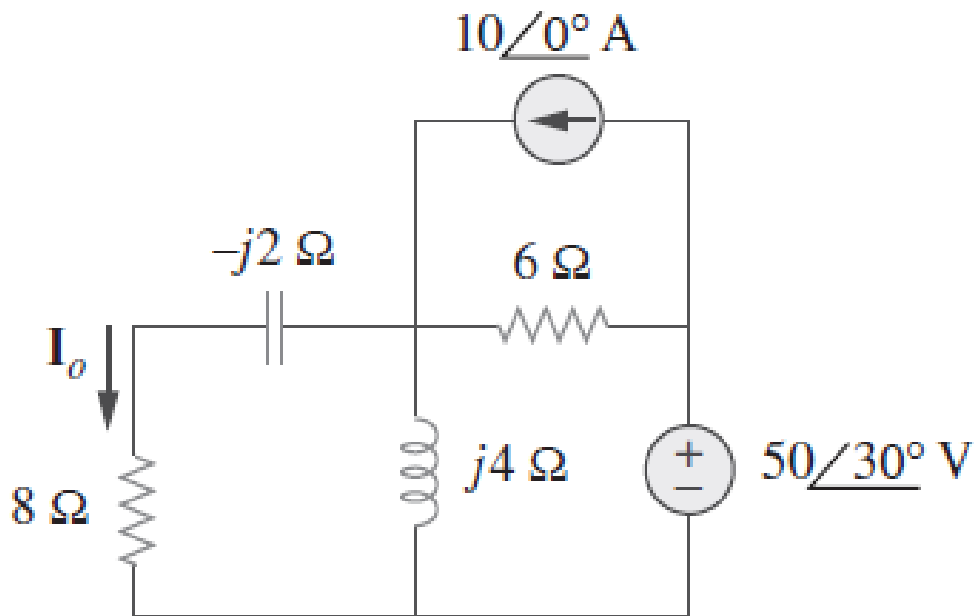
Exercícios

1. Estudar o conteúdo estudado na aula. Desenvolver passo a passo os exemplos de análise de malhas e análise nodal em CA.



Exercícios

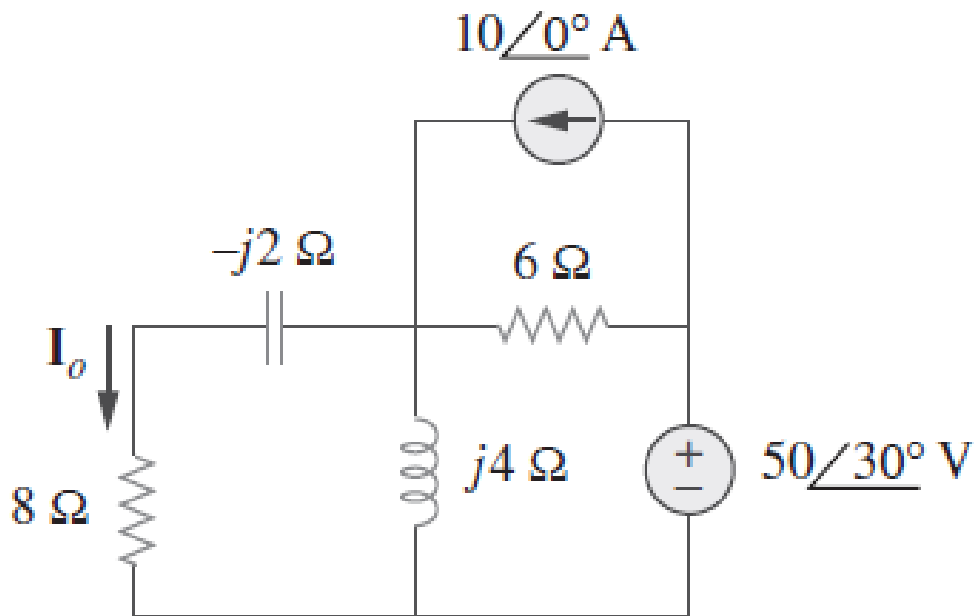
2. Usando a análise de malhas, determine I_o no circuito da figura abaixo:





Exercícios

2. Usando a análise de malhas, determine I_0 no circuito da figura abaixo:



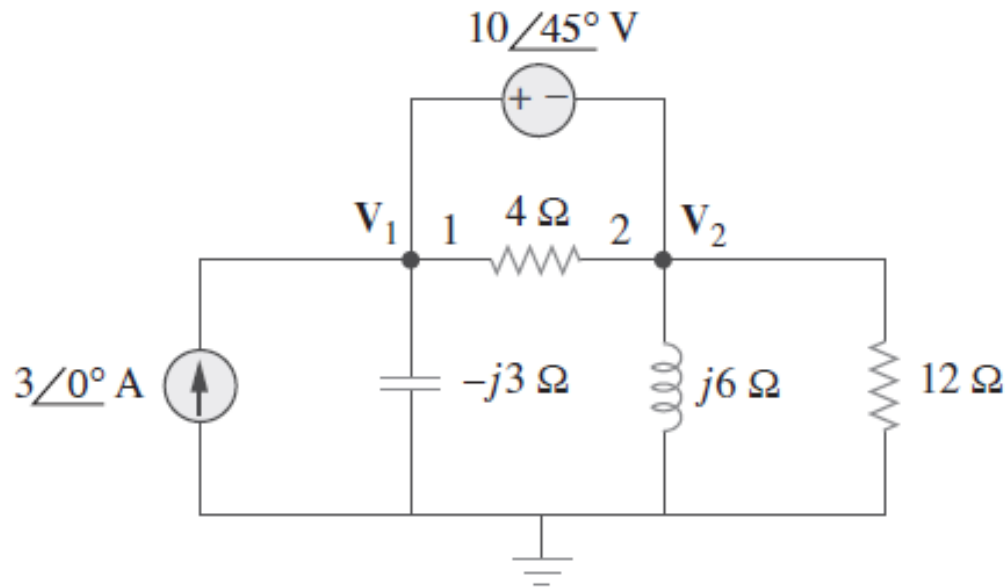
Resposta:

$$I_0 = 5,96 \angle 65,45^\circ \text{ A}$$



Exercícios

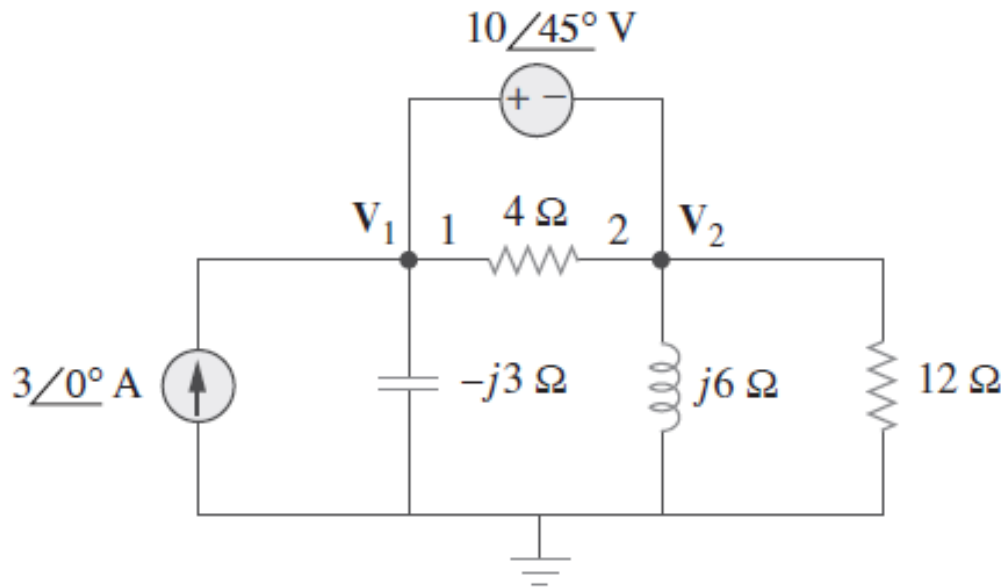
3. Através da análise de nodal, calcule V_1 e V_2 no circuito da figura abaixo:





Exercícios

3. Através da análise de nodal, calcule V_1 e V_2 no circuito da figura abaixo:



Resposta:

$$V_1 = 25,84\angle -70,52^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = 31,48\angle -87,17^\circ \text{ V}$$

Referências

Boylestad, R., L. Introdução à análise de circuitos, 12nd ed. Pearson, 2012.

Alexader, C. K., Sadiku, M., N., O. Fundamentos Circuitos Elétricos , 5ta ed. Mc Graw Hill, 2013.



Universidade de São Paulo (USP), Escola
de Engenharia de Lorena (EEL),
Curso de Engenharia Física



Obrigado

Prof. Dr. Andy Blanco Rodriguez

andy.blanco@usp.br

**Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR), Sala A 53C, Área II da EEL-USP,
Estrada Chiquito de Aquino, N° 1000, Lorena, São Paulo, Brasil.**