



Universidade de São Paulo (USP), Escola
de Engenharia de Lorena (EEL),
Curso de Engenharia Física



Circuitos Elétricos - teoria e prática (LOM3262)

Prof. Dr. Andy Blanco Rodriguez

**Lorena-SP
2025/2**

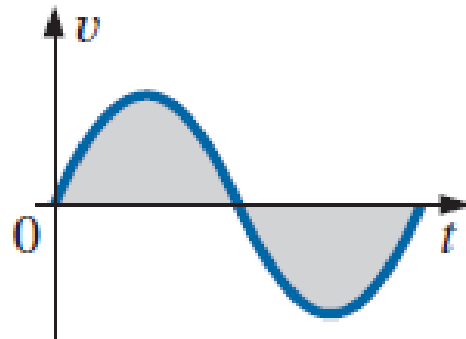


- Senoides;
- Números complexos;
- Fasores;
- Fasores e elementos de circuitos.

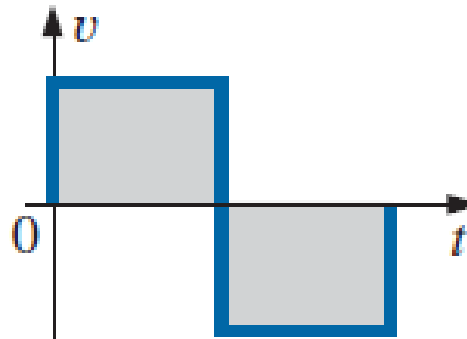


Sinais senoidais

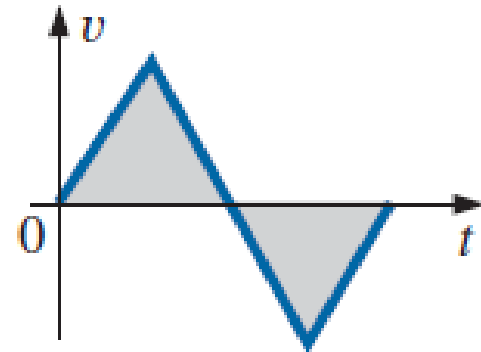
Formas de onda alternadas



Senóide



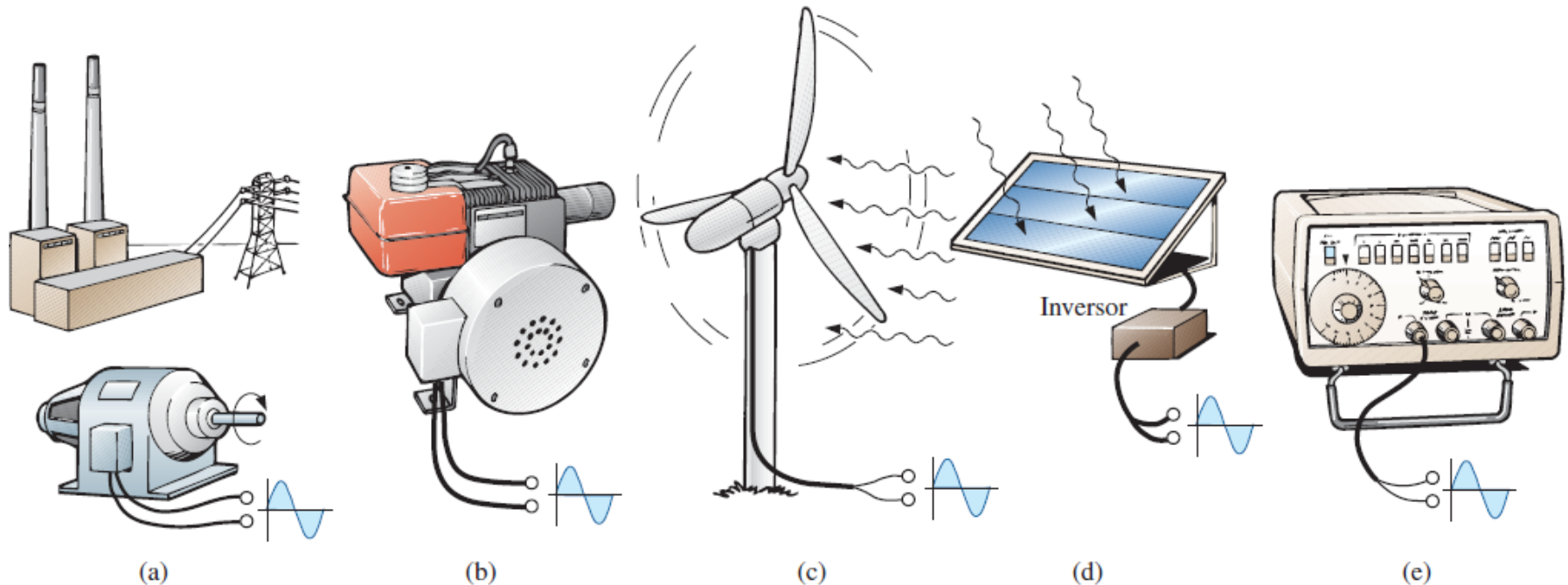
Onda quadrada



Onda triangular

O termo **alternada** indica apenas que o valor da tensão ou da corrente se alterna, ao longo do tempo, regularmente entre dois níveis predefinidos. Para ser precisos, temos de usar os termos *senoidal*, quadrada ou triangular.

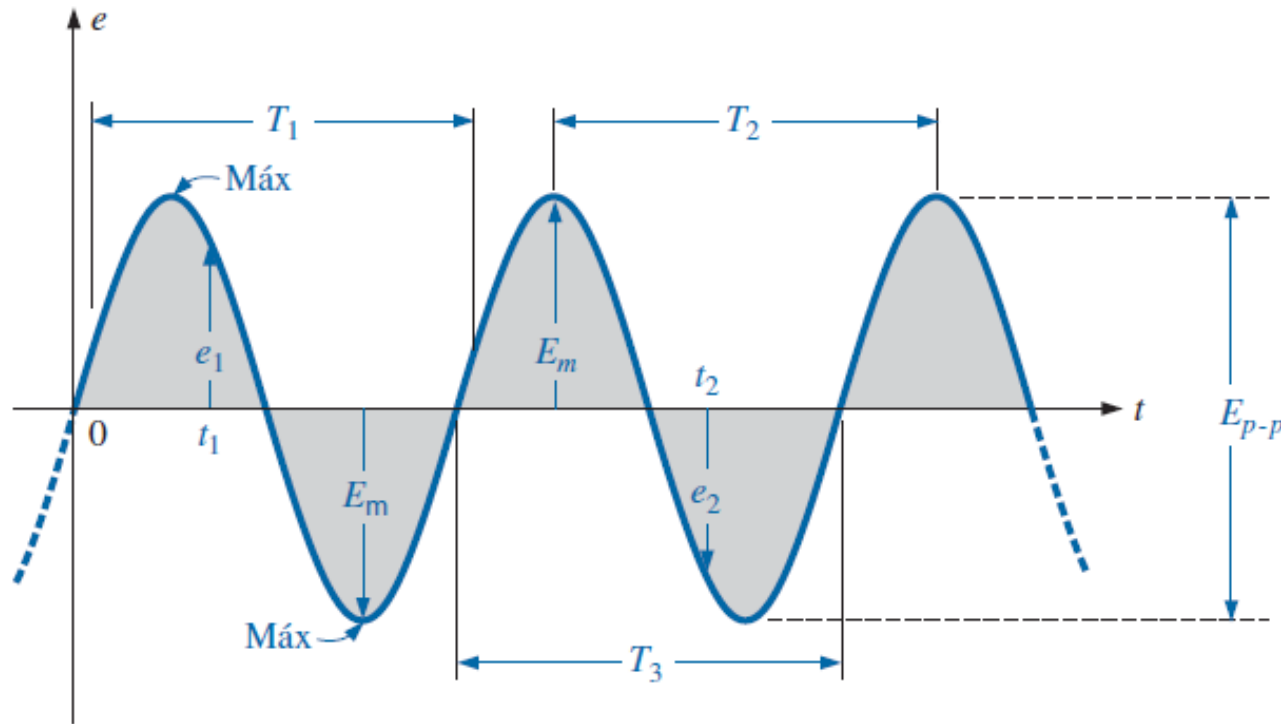
Sinais senoidais



Fontes de corrente alternada: (a) usina geradora; (b) gerador CA portátil; (c) gerador eólico; (d) painel solar; (e) gerador de sinais.

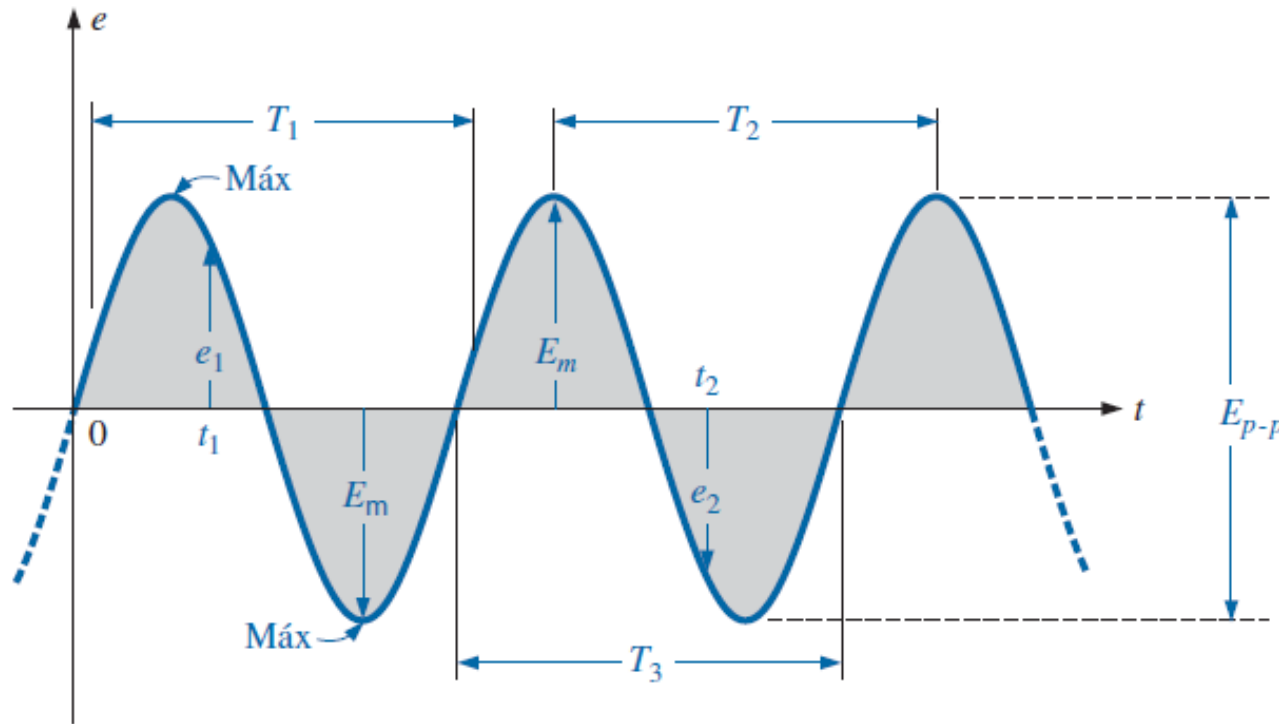


Sinais senoidais



Senoide é um sinal que possui a forma da função seno ou cosseno.

Sinais senoidais

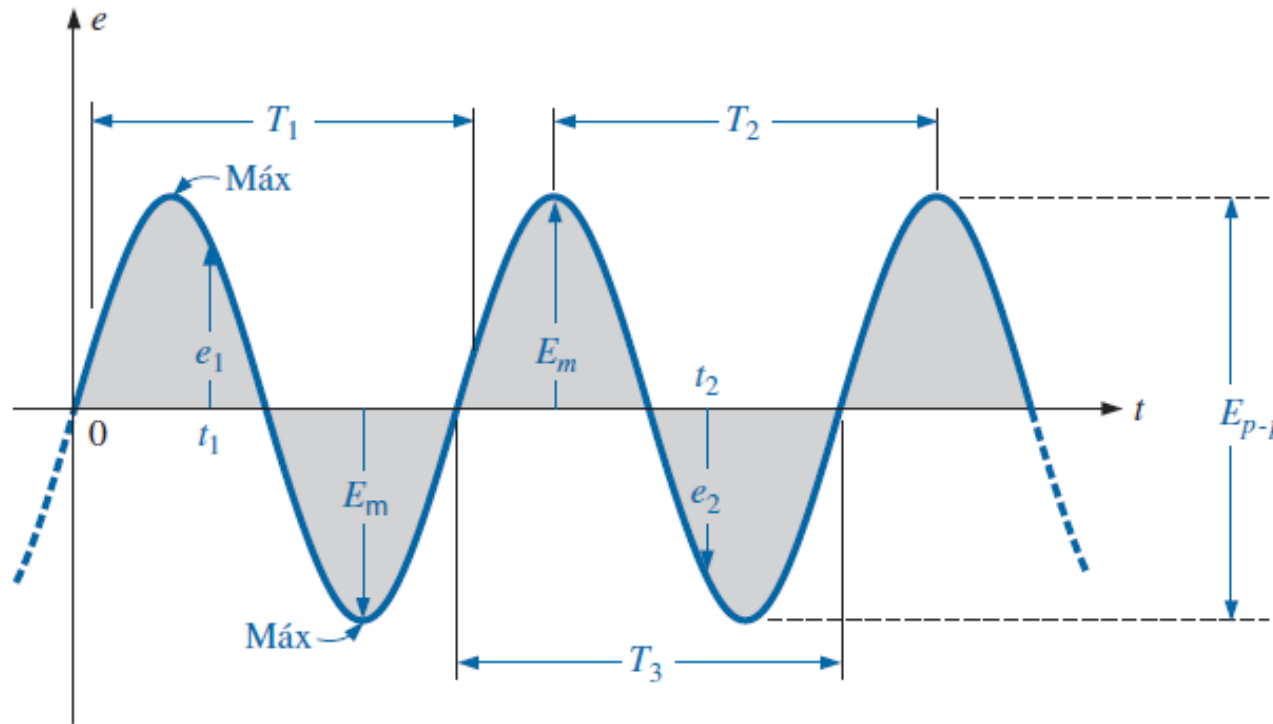


Valor instantâneo:

Amplitude de uma forma de onda em um instante de tempo qualquer. É representado por letras minúsculas (e_1 , e_2 , etc)

Forma de onda: Gráfico de uma grandeza, como a tensão em função de uma variável como o tempo (como na figura), posição, graus, radianos, temperatura, entre outras.

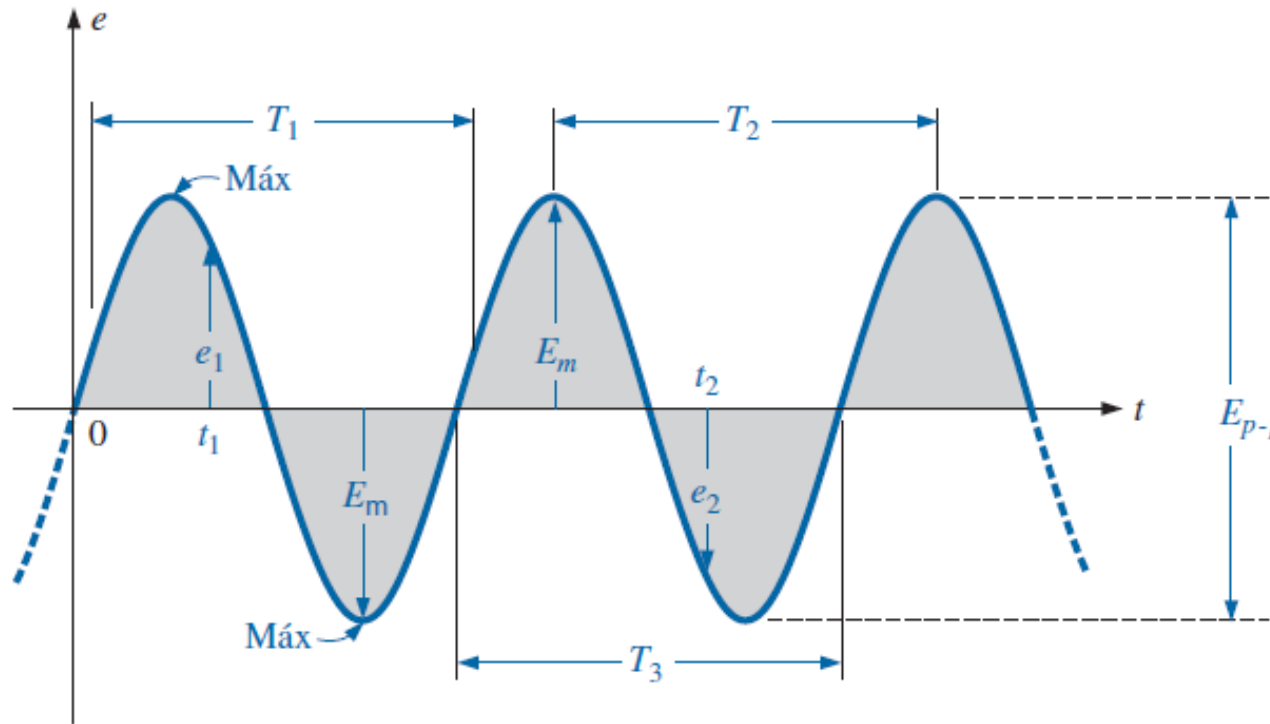
Sinais senoidais



Valor de pico: Valor máx instantâneo de uma função medido a partir de 0 volt. Na figura, a amplitude de pico e o valor de pico são iguais, pois o valor médio da função é 0 volt.

Amplitude pico: Valor máximo de uma forma de onda em relação ao valor médio. É representado por letras maiúsculas (E_m ou V_m). Na forma de onda na figura acima, o valor médio é zero volt e E_m é a amplitude indicada na figura.

Sinais senoidais

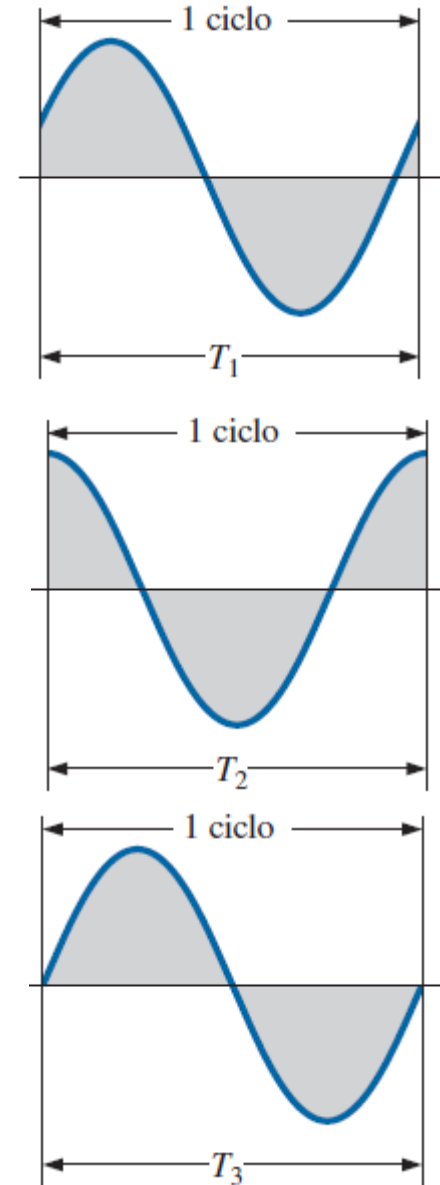
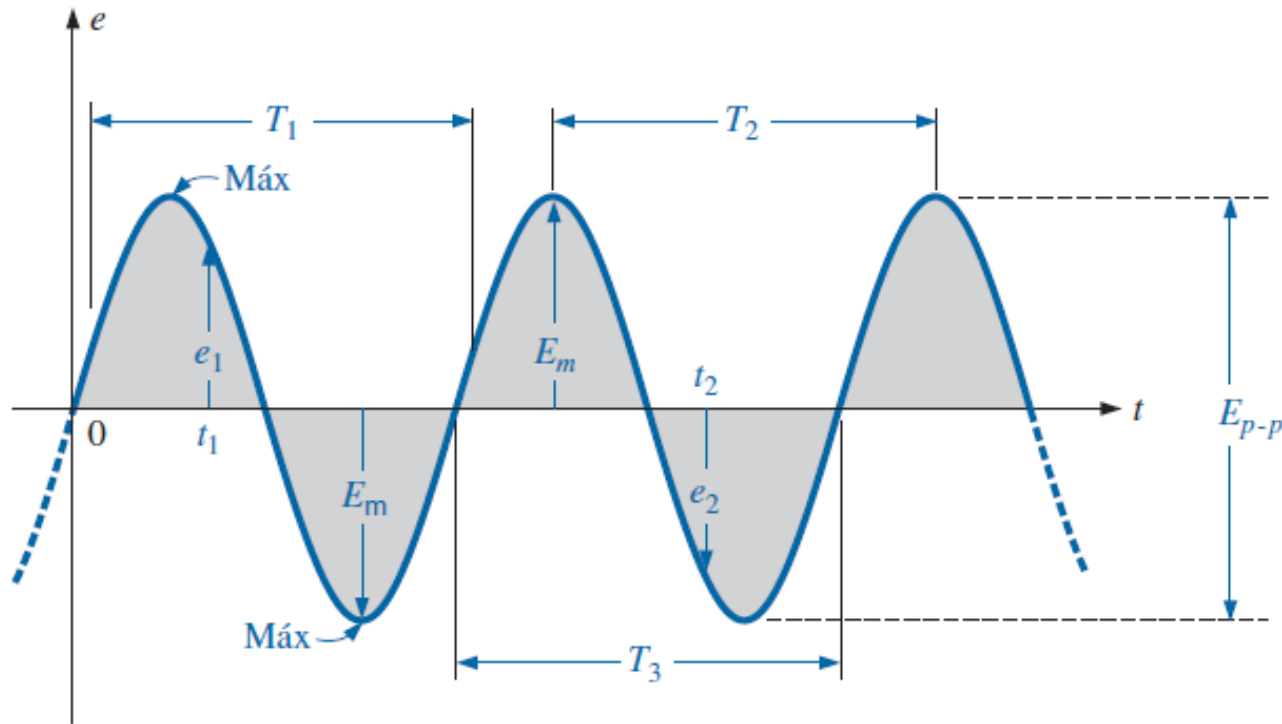


Valor pico a pico: É a diferença entre os valores dos picos positivo e negativo, isto é, a soma dos módulos das amplitudes positiva e negativa (E_{p-p} ou V_{p-p}).

Período (T): Intervalo de tempo entre repetições sucessivas de uma forma de onda periódica.



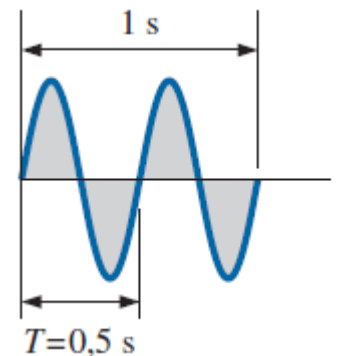
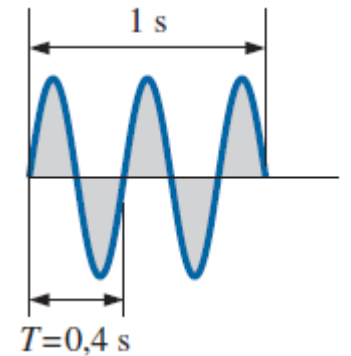
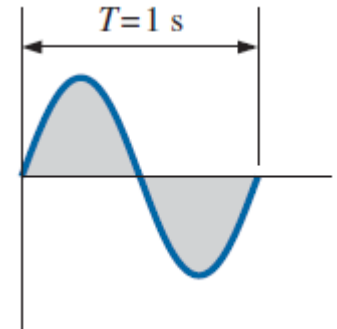
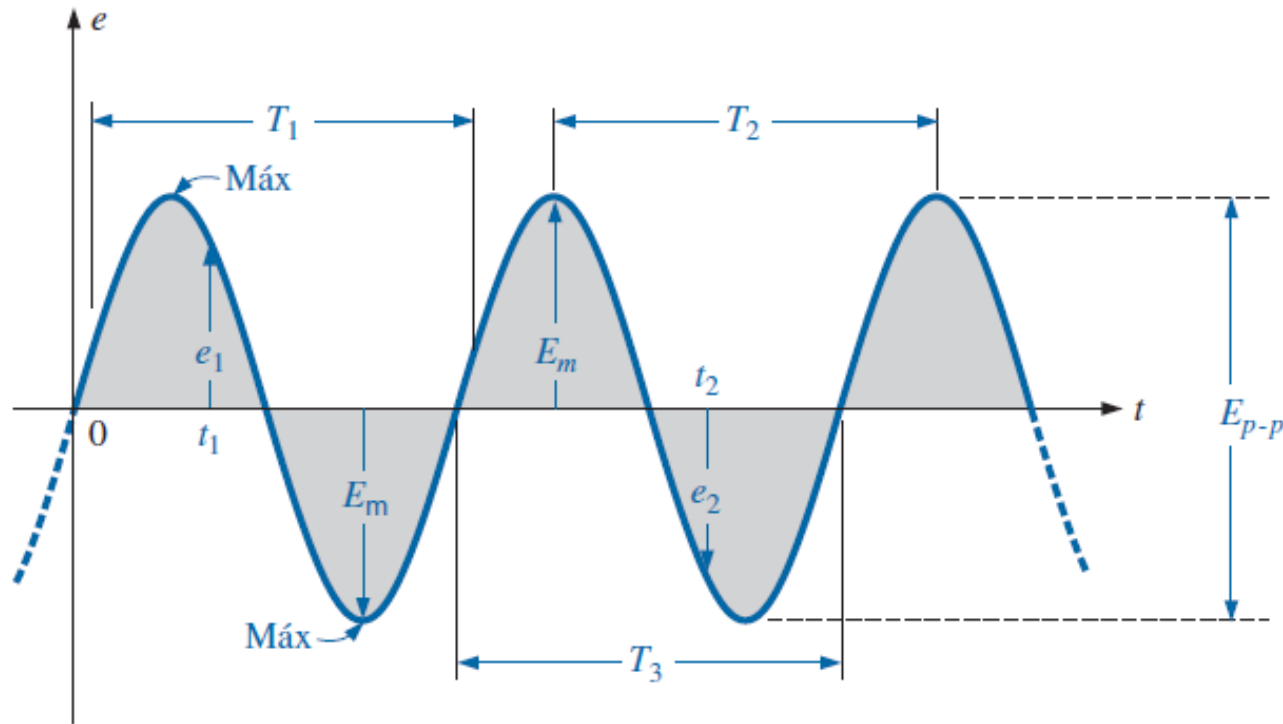
Sinais senoidais



Ciclo: Parte de uma forma de onda contida em um intervalo de tempo igual a um período (T_1 , T_2 e T_3).



Sinais senoidais



Frequência (f): O número de ciclos que ocorrem em 1 s. A frequência da forma de onda da Fig a) é 1 ciclo por seg, e a da Fig b), $2\frac{1}{2}$ (2,5) ciclos por seg, e na Fig. c) 2 ciclos por segundo.



Sinais senoidais

Frequência (f): A unidade de frequência é o hertz (Hz), onde:

$$1 \text{ hertz (Hz)} = 1 \text{ ciclo por segundo (c/s)}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

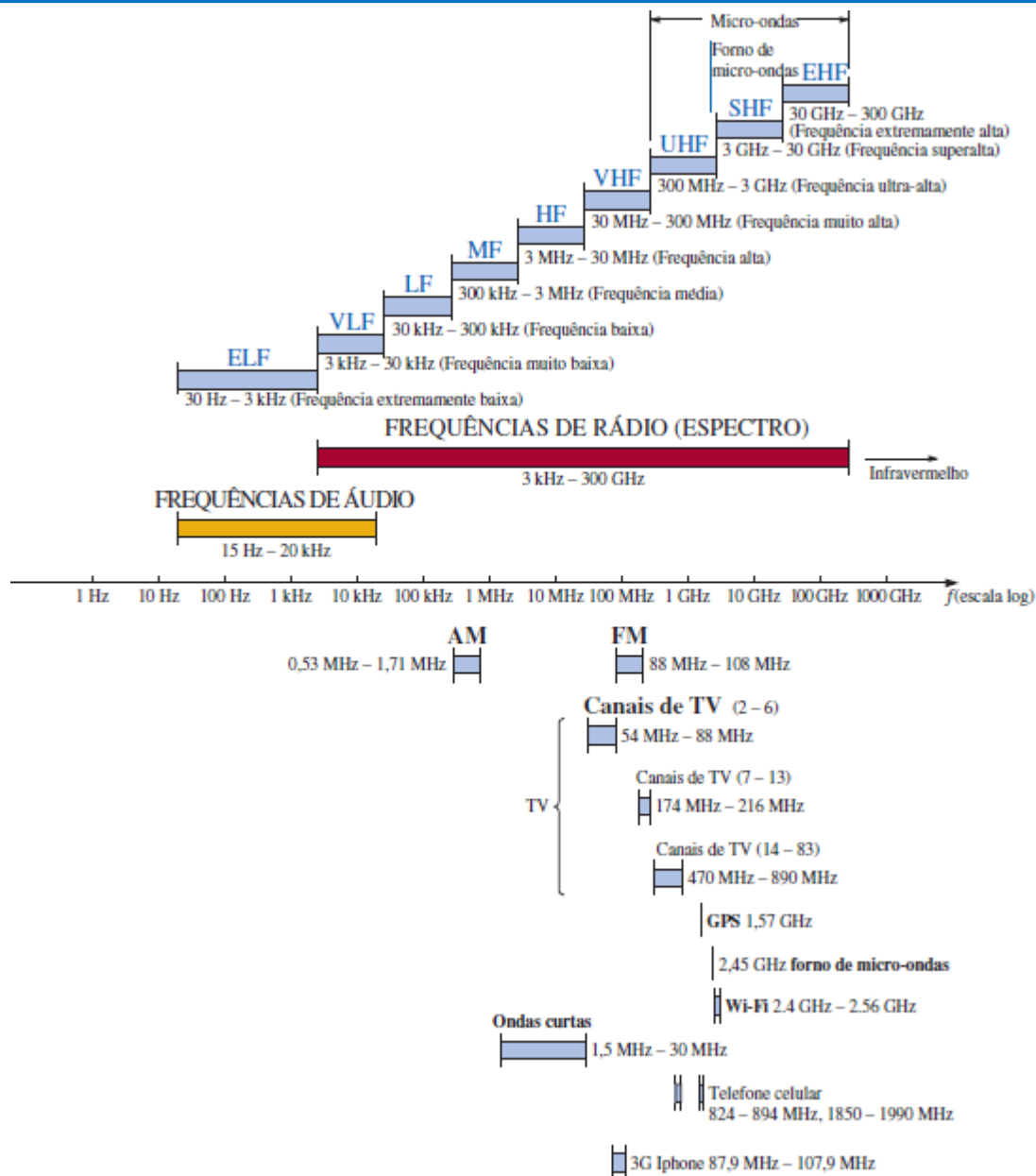
$$T = \frac{1}{f}$$

$$f = \text{Hz}$$

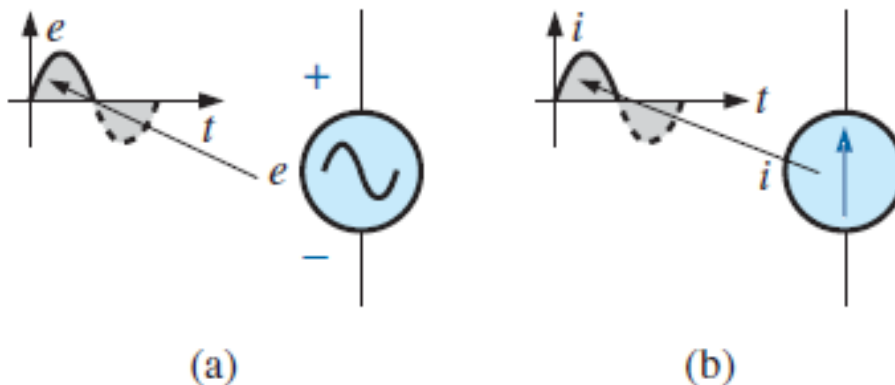
$$T = \text{segundos (s)}$$

O nome hertz é uma homenagem a Heinrich Rudolph Hertz (Alemanha, 1857-1894), que realizou pesquisas de importância fundamental sobre correntes e tensões alternadas e seus efeitos sobre resistores, indutores e capacitores.





Sinais senoidais



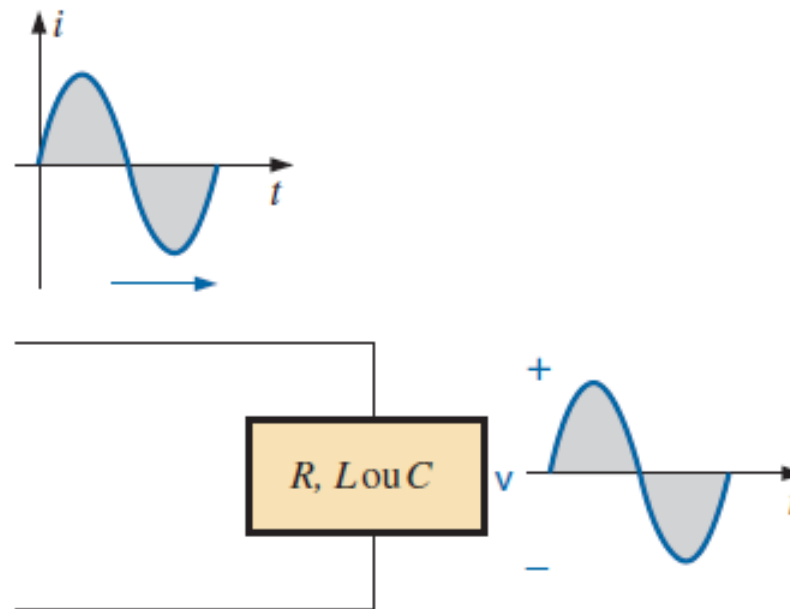
(a) Fonte de tensão alternada senoidal; (b) fonte de corrente alternada senoidal.

Para qualquer quantidade que não mude com o tempo, é utilizada uma letra maiúscula, como **V** ou **I**.

Para expressões que dependem do tempo ou que representam um instante de tempo em particular, é utilizada uma letra minúscula, como **v** ou **i**.



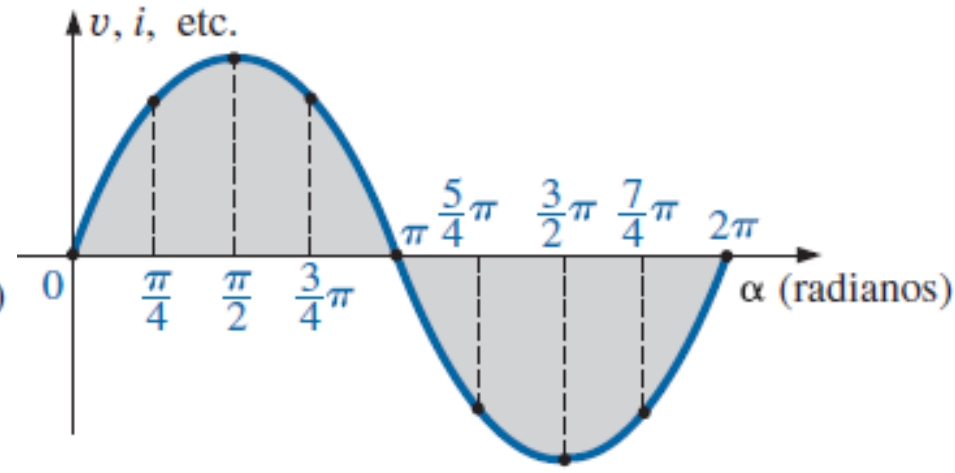
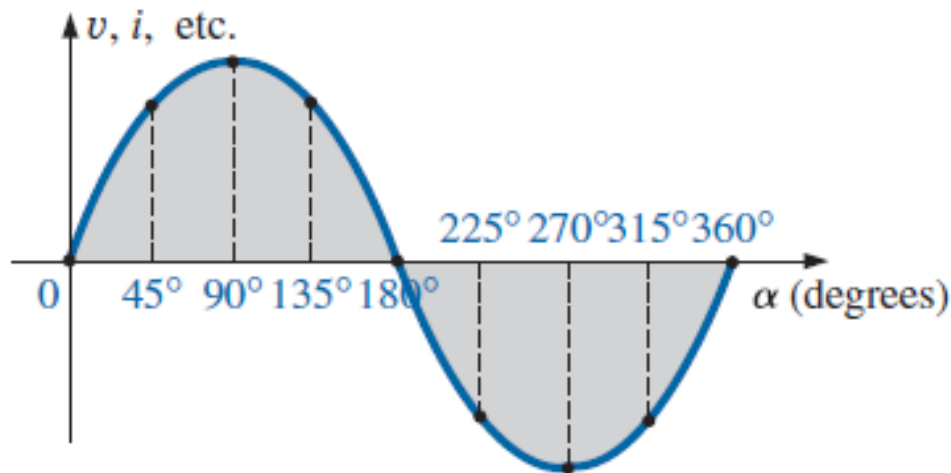
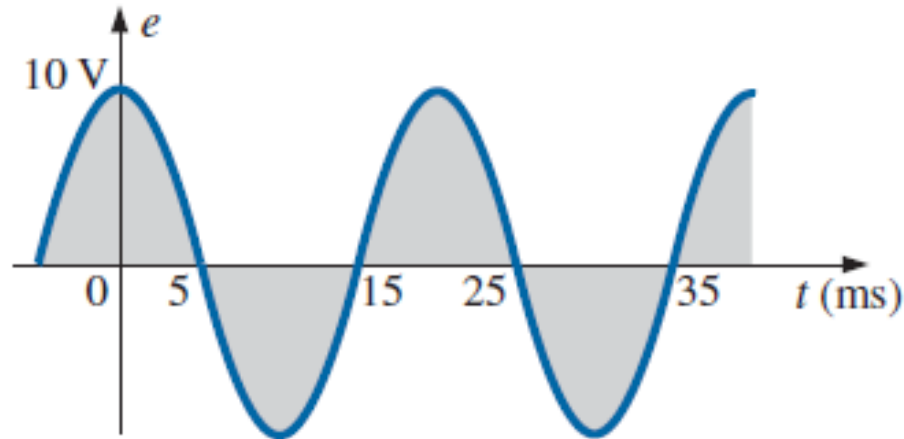
Sinais senoidais



A senoide é a única forma de onda alternada cuja forma não se altera ao ser aplicada a um circuito contendo resistores, indutores e capacitores.

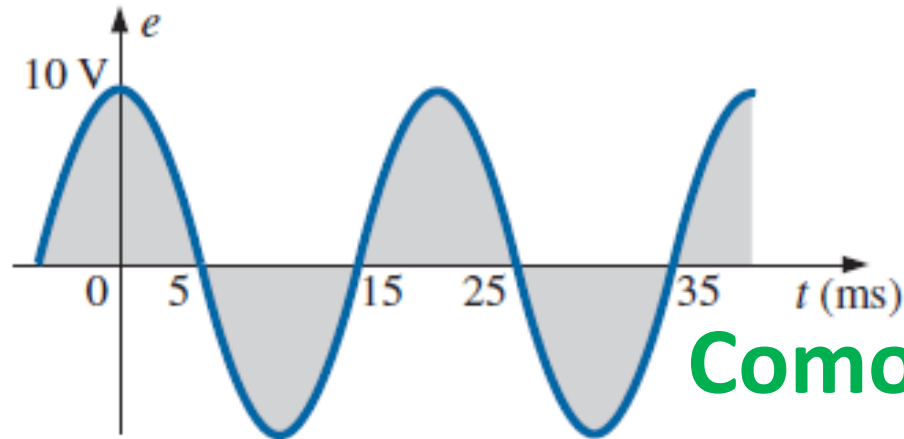


Sinais senoidais

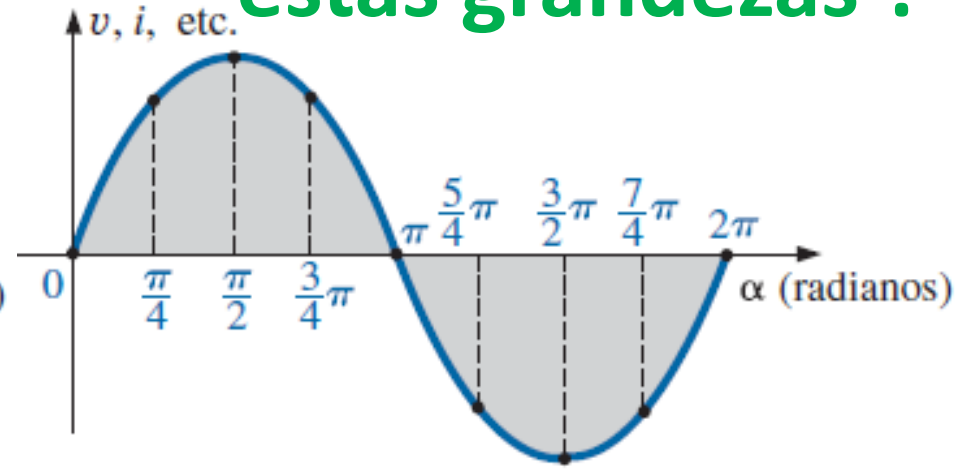
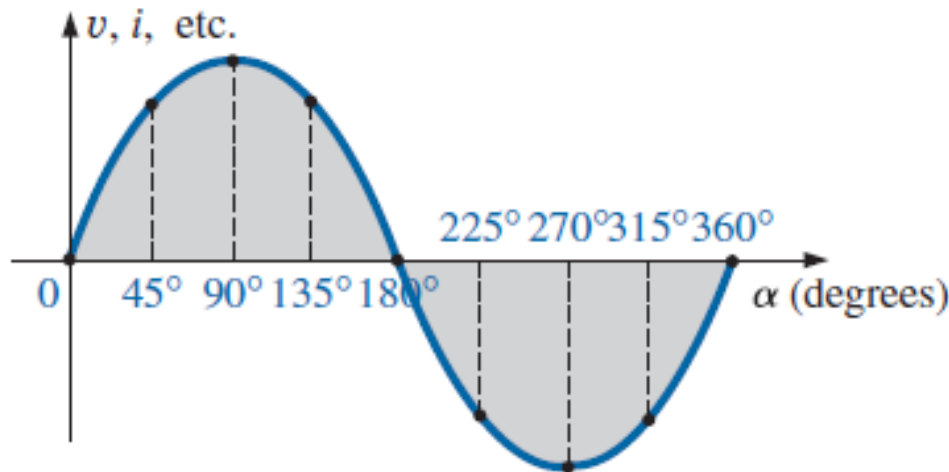




Sinais senoidais

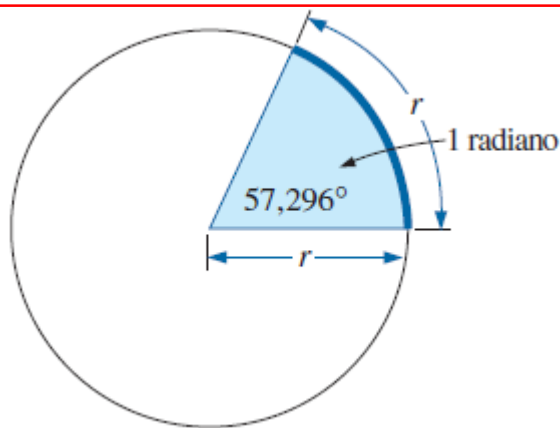


Como relacionar estas grandezas ?



Sinais senoidais

Radiano



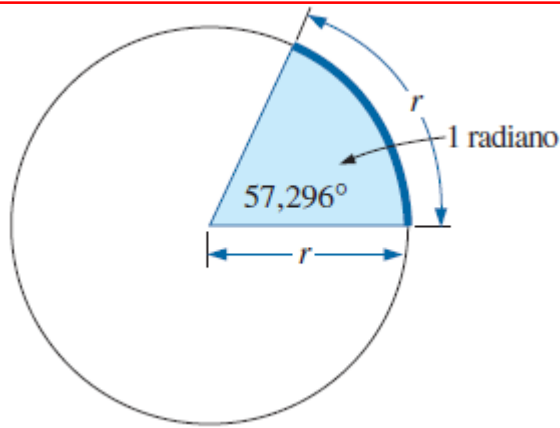
Radiano pode ser **definido** da seguinte forma: se demarcarmos uma parte da circunferência de um círculo por uma extensão igual ao raio do círculo, o ângulo resultante é chamado de 1 radiano.

$$1 \text{ rad} = 57,296^\circ \cong 57,3^\circ$$



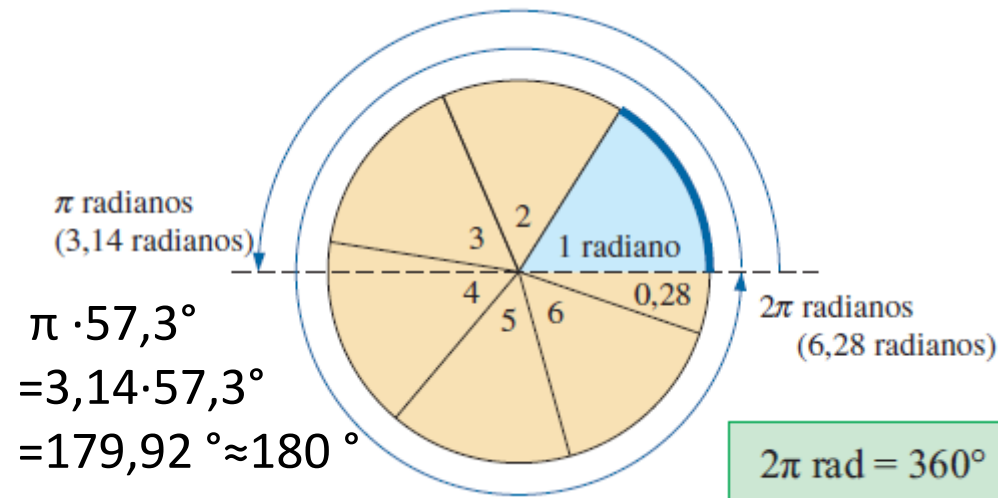
Sinais senoidais

Radiano



Radiano pode ser **definido** da seguinte forma: se demarcarmos uma parte da circunferência de um círculo por uma extensão igual ao raio do círculo, o ângulo resultante é chamado de 1 radiano.

$$1 \text{ rad} = 57,296^\circ \cong 57,3^\circ$$



$$2\pi(57,3^\circ) = 6,28(57,3^\circ) = 359,84^\circ \cong 360^\circ$$

O **número π** é a razão entre o comprimento da circunferência de um círculo e o seu diâmetro.

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$



Sinais senoidais

Radiano

$$\text{Radianos} = \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) \times (\text{graus})$$

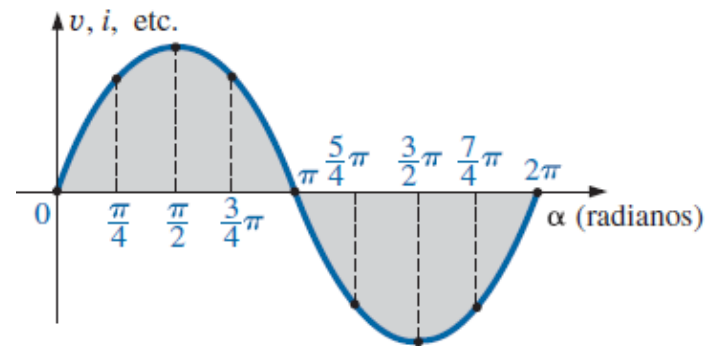
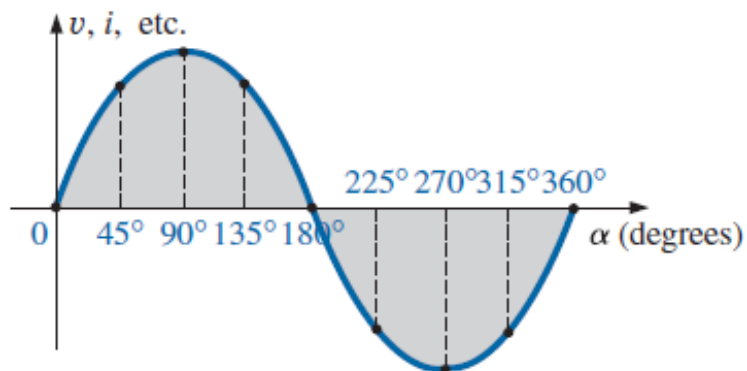
$$\text{Graus} = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \times (\text{radianos})$$

$$90^\circ : \text{Radianos} = \frac{\pi}{180^\circ} (90^\circ) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$30^\circ : \text{Radianos} = \frac{\pi}{180^\circ} (30^\circ) = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} : \text{Graus} = \frac{180^\circ}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} \right) = 60^\circ$$

$$\frac{3\pi}{2} \text{ rad} : \text{Graus} = \frac{180^\circ}{\pi} \left(\frac{3\pi}{2} \right) = 270^\circ$$





Sinais senoidais

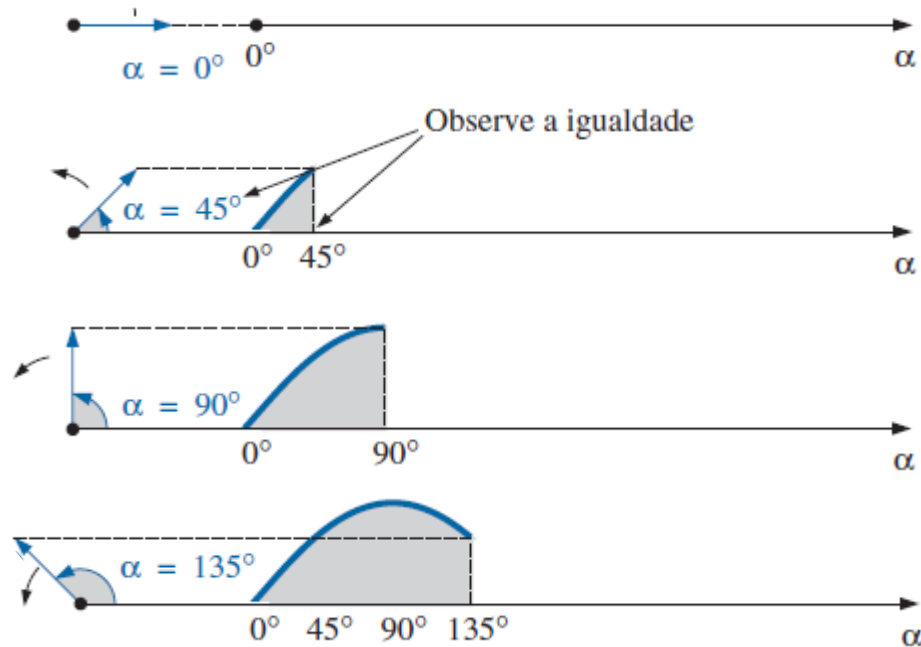
Há um interesse particular no fato de a **forma de onda senoidal** poder ser **obtida** a partir do **comprimento da projeção vertical de um vetor radial girando com movimento circular uniforme em torno de um ponto fixo.**

<https://jackschaedler.github.io/circles-sines-signals/sincos.html>



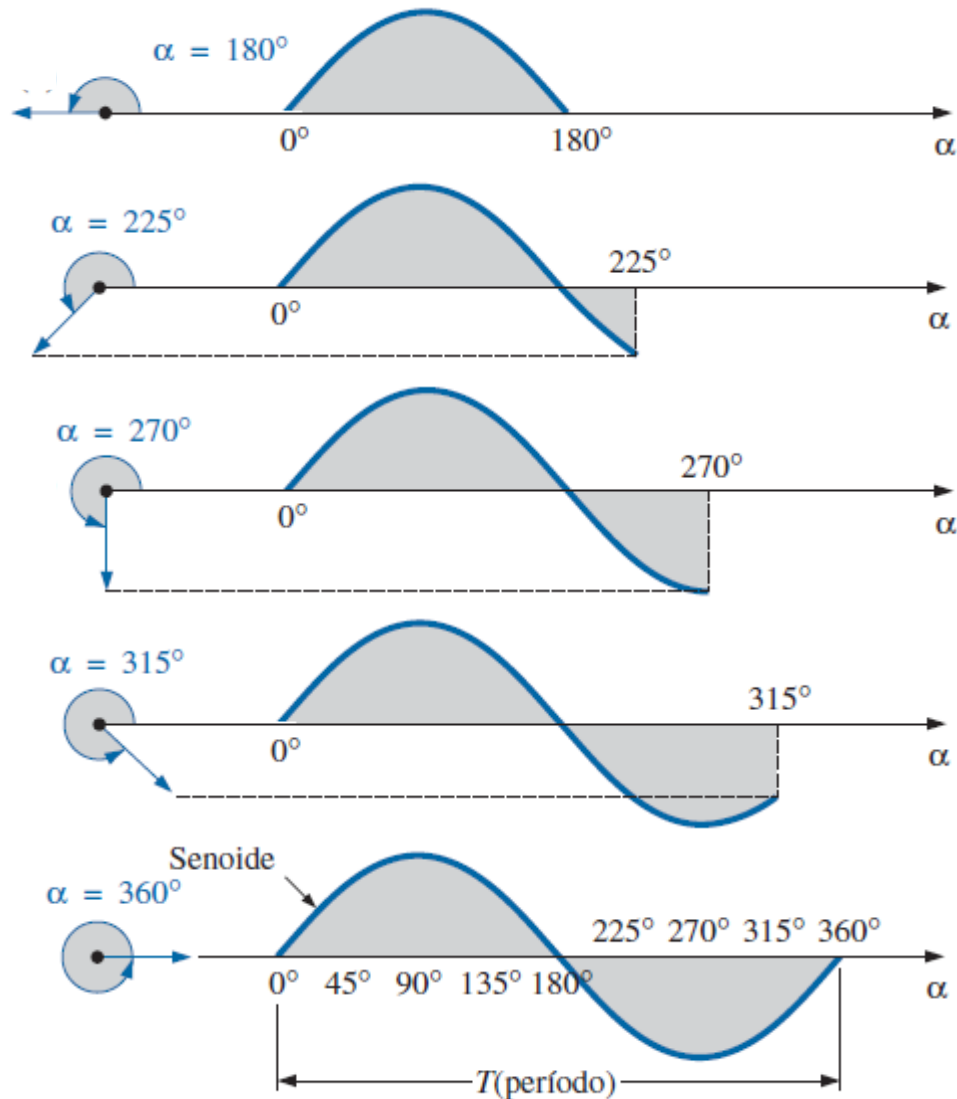
Sinais senoidais

Há um interesse particular no fato de a **forma de onda senoidal** poder ser **obtida** a partir do comprimento da projeção vertical de um vetor radial girando com movimento circular uniforme em torno de um ponto fixo.





Sinais senoidais





Sinais senoidais

Velocidade angular

A **velocidade** com que o vetor gira em torno do centro, denominada **velocidade angular (ω)**, pode ser determinada a partir da seguinte equação:

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

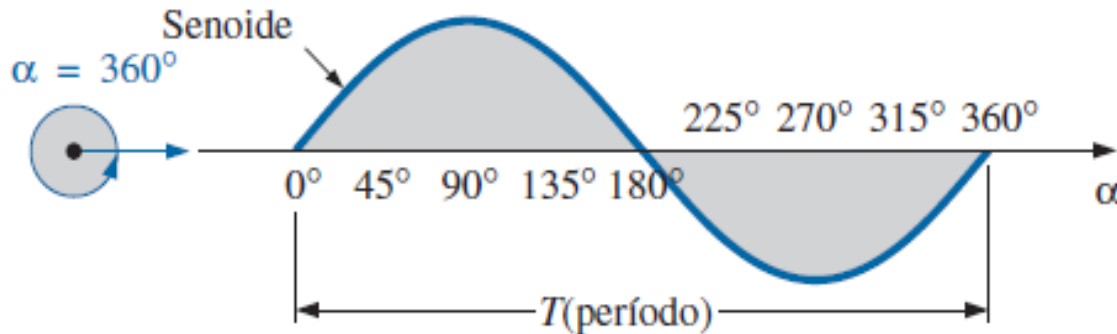
$$\text{Velocidade angular} = \frac{\text{distância (graus ou radianos)}}{\text{tempo(segundos)}}$$

$$\alpha = \omega t$$



Sinais senoidais

Velocidade angular



$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

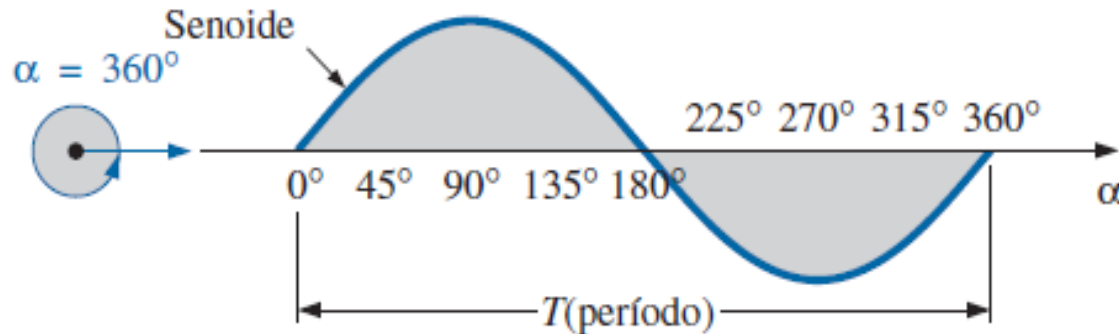
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ (rad/s)}$$

$$\omega = 2\pi f \text{ (rad/s)}$$



Sinais senoidais

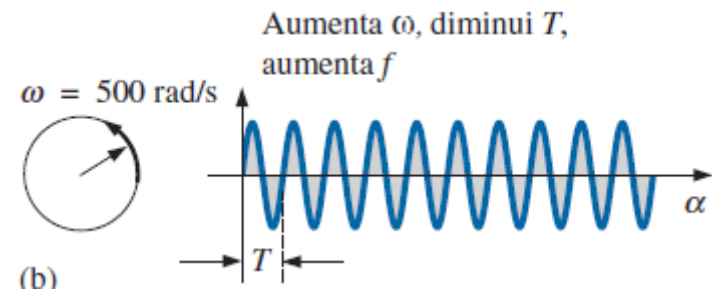
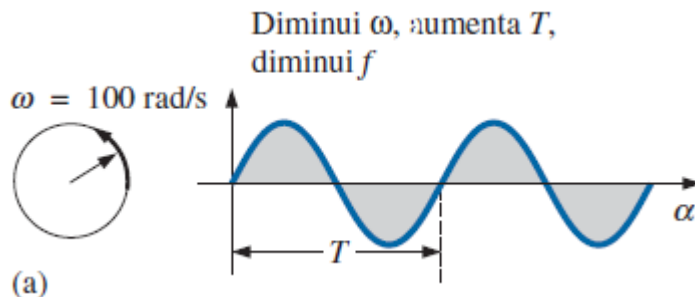
Velocidade angular



$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ (rad/s)}$$

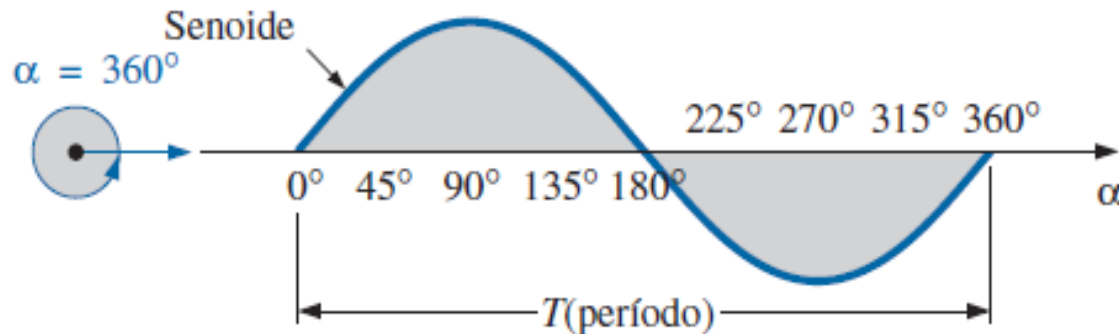
$$\omega = 2\pi f \text{ (rad/s)}$$





Sinais senoidais

Velocidade angular



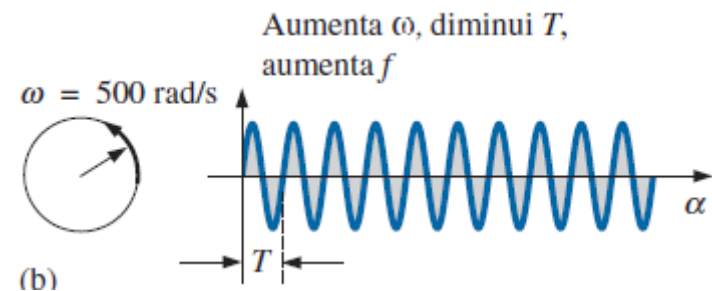
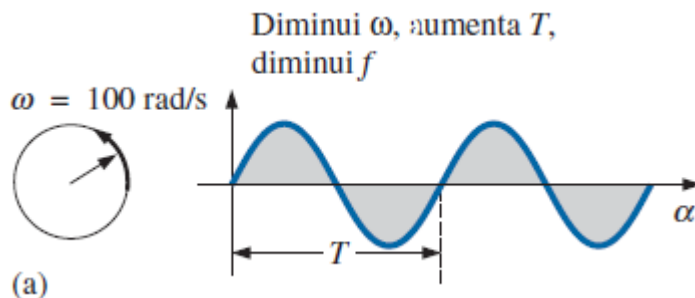
$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ (rad/s)}$$

$$\omega = 2\pi f \text{ (rad/s)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{500 \text{ rad/s}} = 12,57 \text{ ms}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{12,57 \times 10^{-3} \text{ s}} = 79,58 \text{ Hz}$$





Sinais senoidais

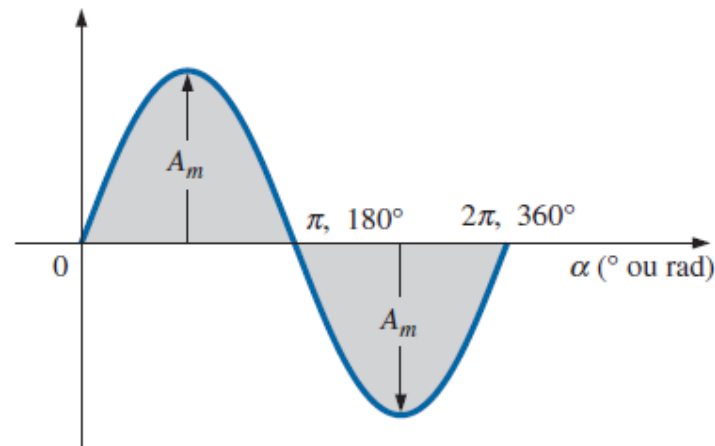
Expressão geral para tensões ou correntes senoidais

A expressão matemática geral para uma forma de onda senoidal é:

$$A_m \text{ sen } \alpha$$

A_m : valor de pico da onda;

α : ângulo na unidade do eixo horizontal.





Sinais senoidais

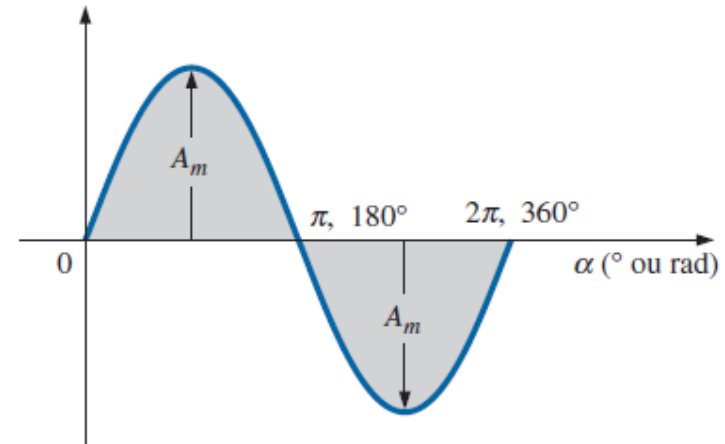
Expressão geral para tensões ou correntes senoidais

A expressão matemática geral para uma forma de onda senoidal é:

$$A_m \text{ sen } \alpha$$

A_m : valor de pico da onda;

α : ângulo na unidade do eixo horizontal.



Como: $\alpha = \omega t$ (argumento), então:

$$A_m \text{ sen } \omega t$$

ωt tendo a unidade de medida do eixo horizontal.

$$i = I_m \text{ sen } \omega t = I_m \text{ sen } \alpha$$

$$e = E_m \text{ sen } \omega t = E_m \text{ sen } \alpha$$



Sinais senoidais

Relações de fase

Se a forma de onda for deslocada para a direita ou para a esquerda de 0° , a expressão é:

$$A_m \sin(\omega t \pm \theta)$$

A_m : valor de pico da onda;

ω : velocidade angular em rad/s;

ωt : argumento em rad;

t : tempo em s;

θ : ângulo em $^\circ$ ou radianos.

Sinais senoidais

Relações de fase

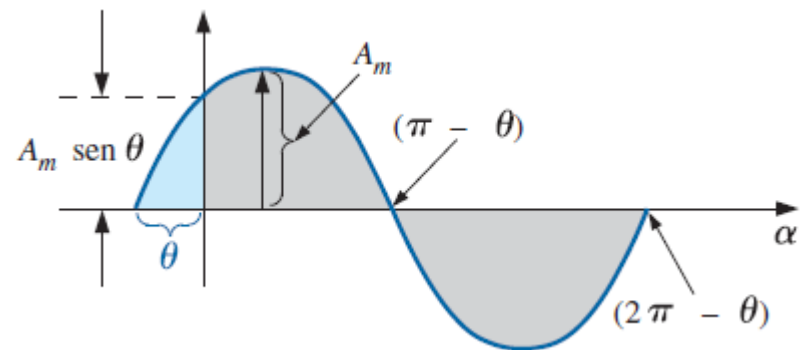
Se a forma de onda for deslocada para a direita ou para a esquerda de 0° , a expressão é:

$$A_m \sen(\omega t \pm \theta)$$

A_m : valor de pico da onda;
 ω : velocidade angular em rad/s;
 ωt : argumento em rad;
 t : tempo em s;
 θ : ângulo em $^\circ$ ou radianos.

Se a forma de onda intercepta o eixo horizontal à **esquerda da origem** com inclinação positiva (função crescente) antes de 0° :

$$A_m \sen(\omega t + \theta)$$



Sinais senoidais

Relações de fase

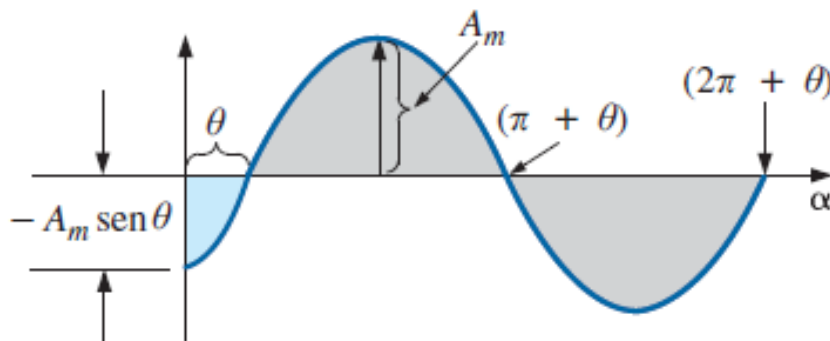
Se a forma de onda for deslocada para a direita ou para a esquerda de 0° , a expressão é:

$$A_m \text{ sen } (\omega t \pm \theta)$$

A_m : valor de pico da onda;
 ω : velocidade angular em rad/s;
 ωt : argumento em rad;
 t : tempo em s;
 θ : ângulo em $^\circ$ ou radianos.

Se o gráfico corta o eixo horizontal com inclinação positiva **após 0°** :

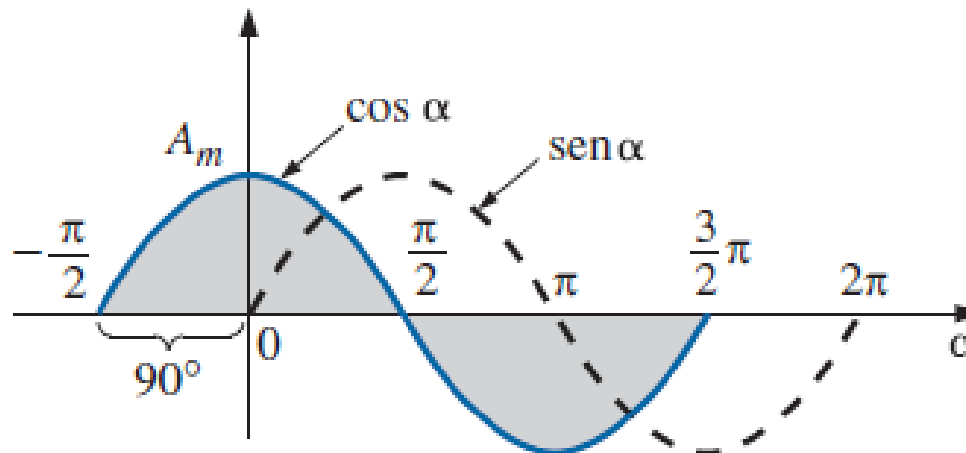
$$A_m \text{ sen } (\omega t - \theta)$$



Sinais senoidais

Relações de fase

Se a forma de onda corta o eixo horizontal com inclinação positiva e adiantada de $90^\circ(\pi/2)$, o gráfico é a função cosseno:



$$\sin\left(\omega t + 90^\circ\right) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t$$

ou

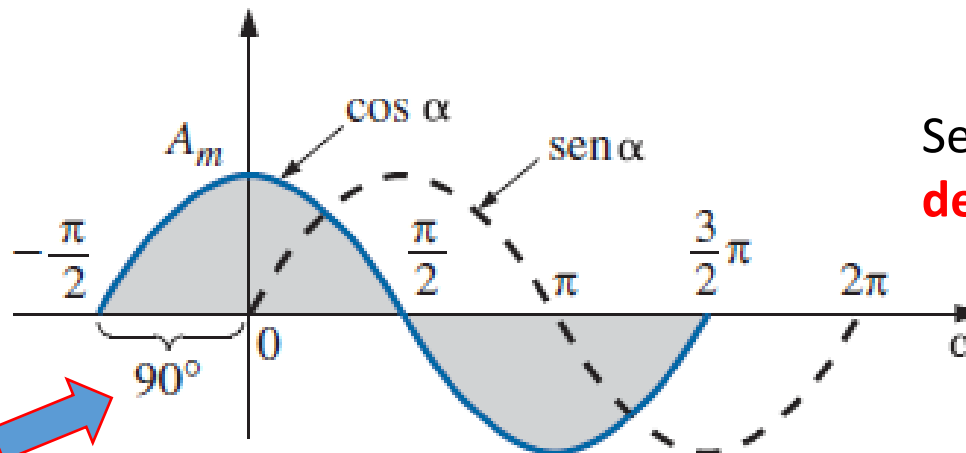
$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - 90^\circ\right) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Sinais senoidais

Relações de fase

Se a forma de onda corta o eixo horizontal com inclinação positiva e adiantada de $90^\circ(\pi/2)$, o gráfico é a função cosseno:



Seno e cosseno estão **defasados 90°**

Θ (aqui é 90°) é a **diferença de fase**

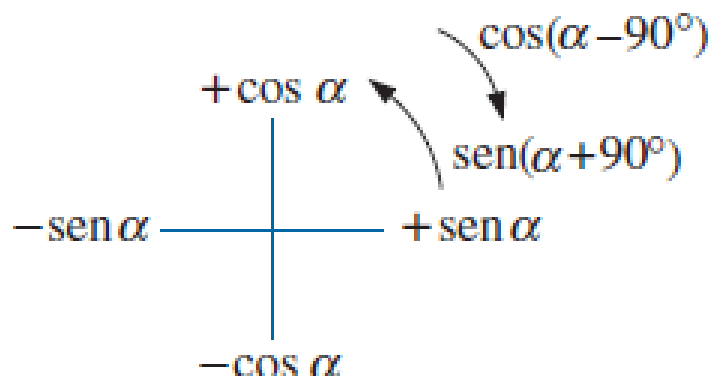
$$\sin\left(\omega t + 90^\circ\right) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t$$

ou

$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - 90^\circ\right) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Sinais senoidais

Relações de fase



$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sin (\alpha + 90^\circ) \\ \sin \alpha &= \cos (\alpha - 90^\circ) \\ -\sin \alpha &= \sin (\alpha \pm 180^\circ) \\ -\cos \alpha &= \sin (\alpha + 270^\circ) = \sin (\alpha - 90^\circ) \text{ etc.}\end{aligned}$$

Sinais em fase: $\theta = 0^\circ$

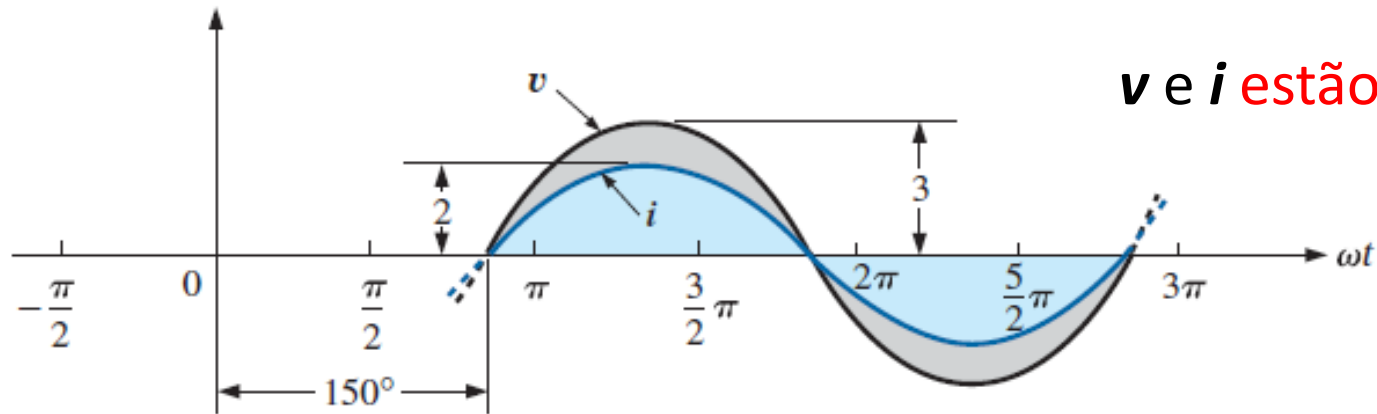
Sinais fora de fase: $\theta \neq 0^\circ$

Sinais em contra-fase: $\theta = 180^\circ = \pi$



Sinais senoidais

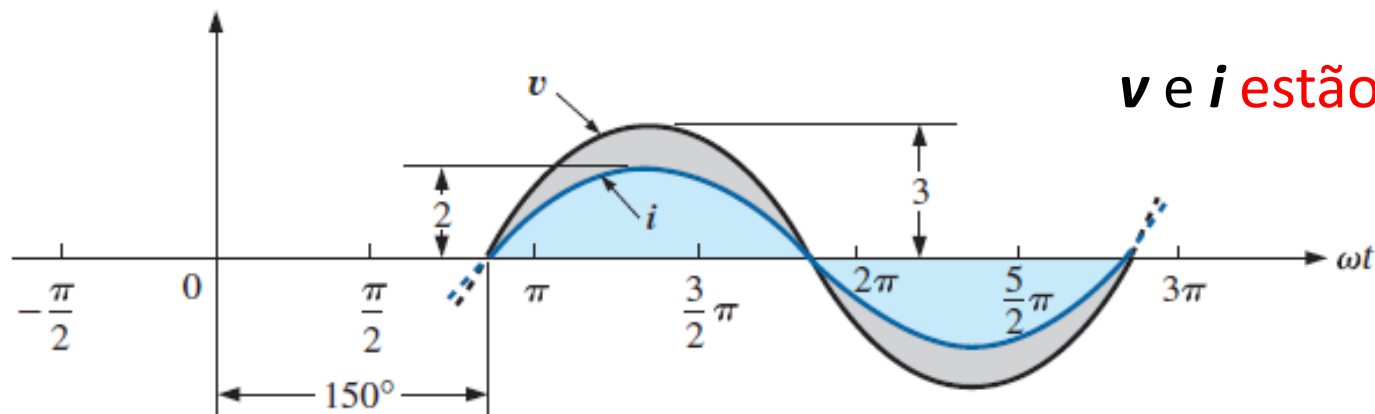
Relações de fase. Exemplos



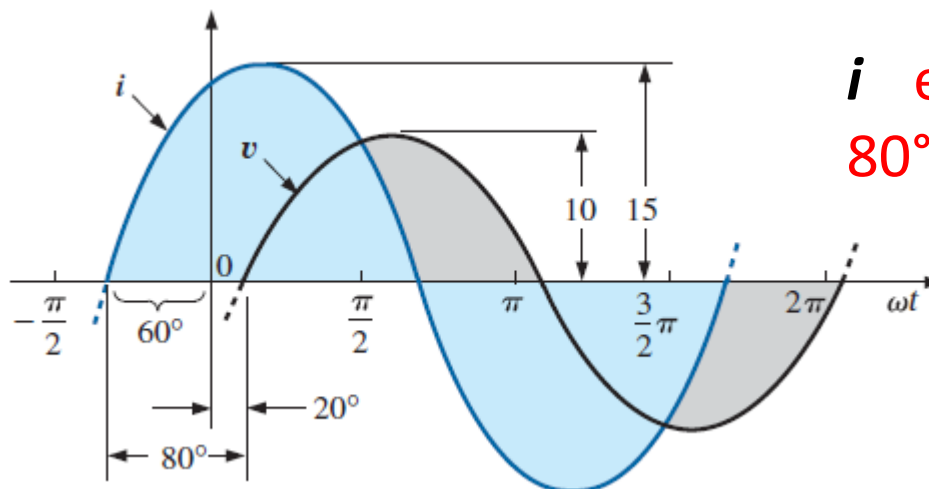


Sinais senoidais

Relações de fase. Exemplos



v e i estão em fase



i está adiantada 80° em relação a v



Números complexos

U conjunto de todos os números

$\mathbb{C}$ *complexos*

$\mathbb{R}$ *reais*

$\mathbb{Q}$ *racionais*

$\mathbb{Z}$ *inteiros*

$\mathbb{N}$ *naturais*

$\mathbb{N}^*$ *naturais
nã nulos*

Primos

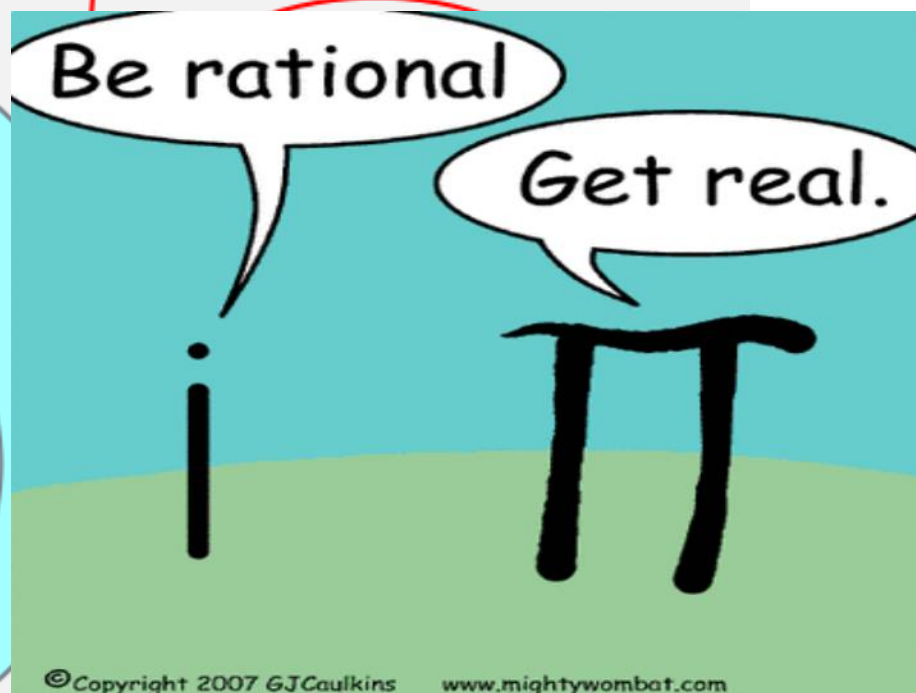
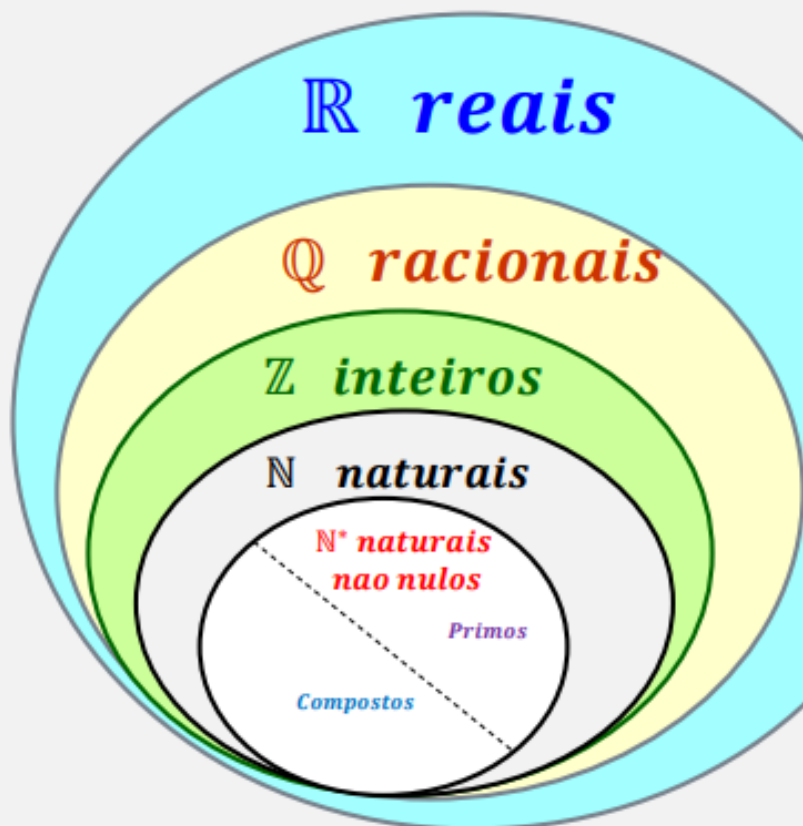
Compostos

I imaginarios

$$i = \sqrt{-1}$$

U conjunto de todos os números

$\mathbb{C}$ *complexos*





Números complexos

Número complexo s (ou z):

$$z = a + jb$$

Número complexo Parte real Parte imaginária

ou

$$s = \sigma + j\omega$$

Número complexo Parte real Parte imaginária



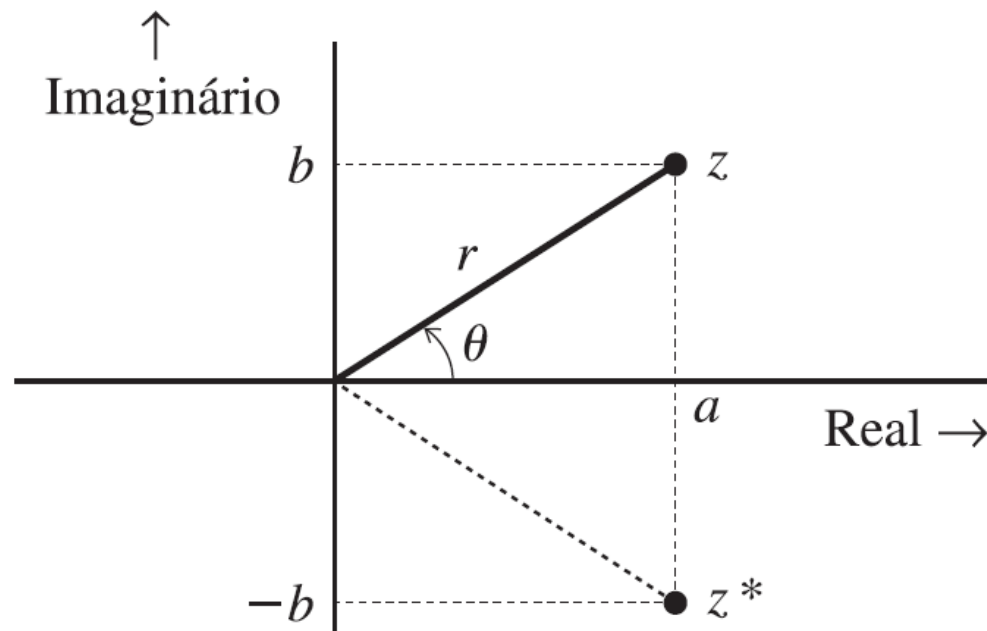
Números complexos

Número complexo s (ou z):

$$z = a + jb$$

Número complexo Parte real Parte imaginária

Representação gráfica por um ponto **cujas coordenadas cartesianas são (a, b)** em um plano complexo.





Números complexos

Número complexo z (ou z):

$$z = a + jb$$

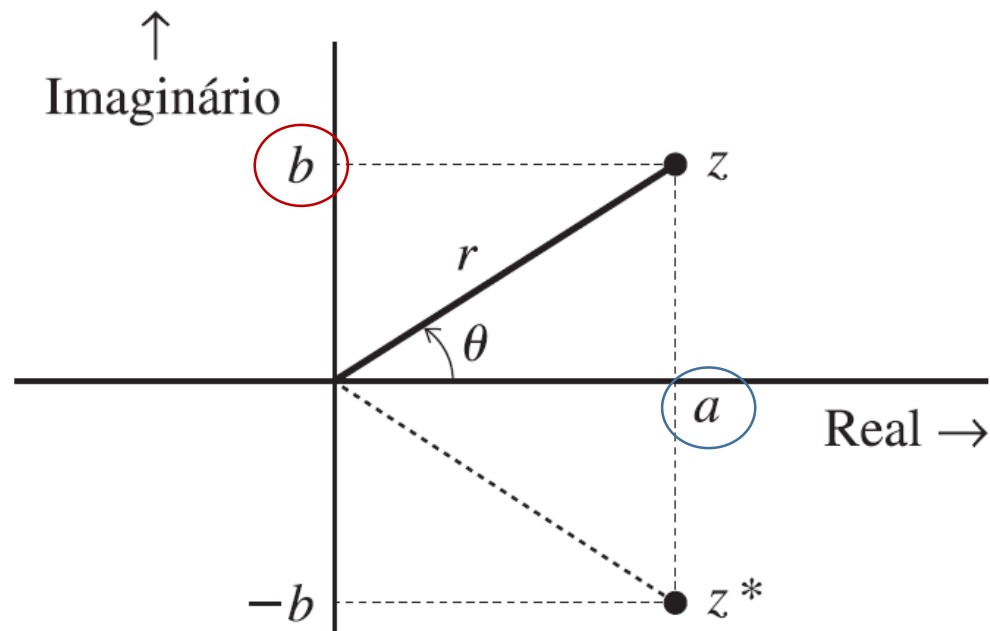
Número complexo Parte real Parte imaginária

Os números a (abscissa) e b (ordenada) podem ser expressos por:

$$\text{Re} \{ z \} = a$$

$$\text{Im} \{ z \} = b$$

Representação gráfica por um ponto **cuas coordenadas cartesianas são (a, b)** em um plano complexo.





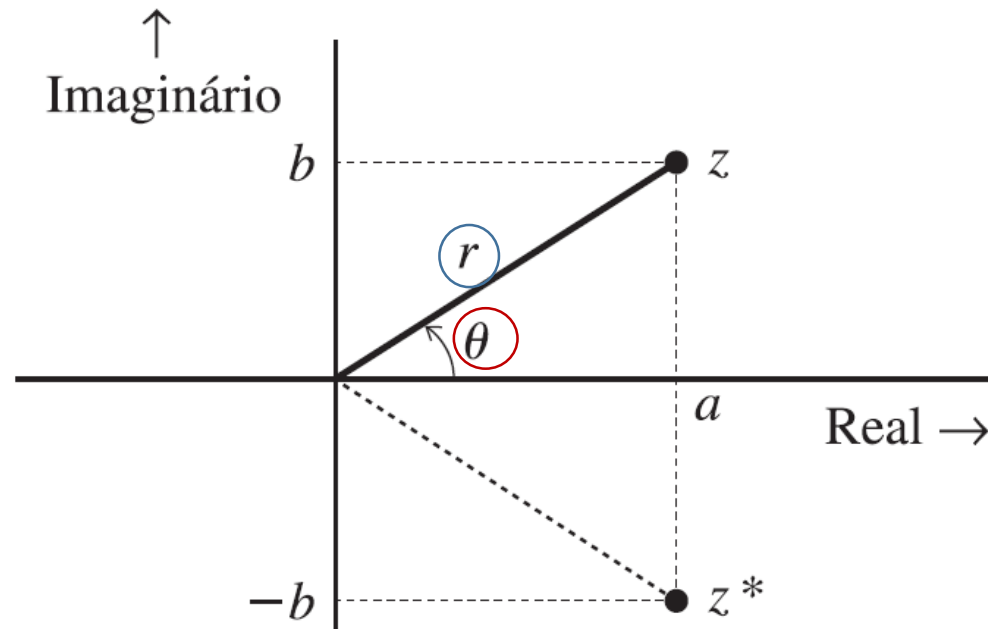
Números complexos

Número complexo s (ou z):

$$z = a + jb$$

Número complexo Parte real Parte imaginária

Representação gráfica por um ponto **cujas coordenadas polares são (r, θ)** em um plano complexo.





Números complexos

Número complexo s (ou z):

$$z = a + jb$$

Número
complexo

Parte
real

Parte
imaginária

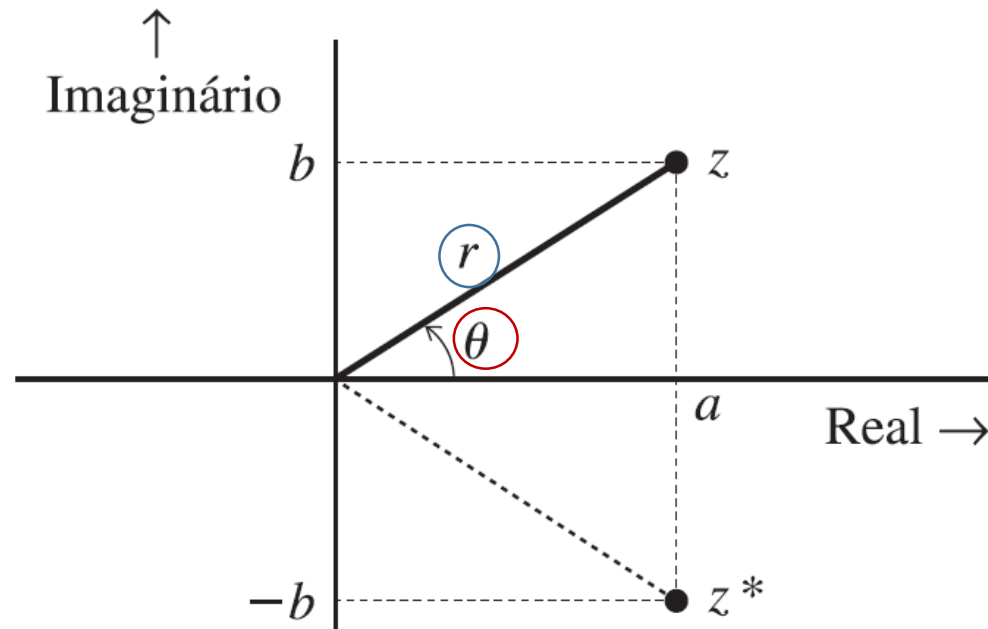
Se (r, θ) são as coordenadas polares de um ponto z :

$$z = r \angle \theta$$

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

Representação gráfica por um ponto **cujas coordenadas polares são (r, θ)** em um plano complexo.





Números complexos

Número complexo s (ou z):

$$z = a + jb$$

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

Substituindo a e b em z :

$$z = a + jb = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

$$z = r (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (I)$$



Números complexos

Número complexo s (ou z):

$$z = a + jb$$

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

Substituindo a e b em z :

$$z = a + jb = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

$$z = r (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (I)$$

Fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (II)$$



Números complexos

Número complexo s (ou z):

$$z = a + jb$$

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

Substituindo a e b em z :

$$z = a + jb = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

$$z = r (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (I)$$

Fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$z = r e^{j\theta}$$



Números complexos

Número complexo s (ou z):

$$z = a + jb$$

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

Substituindo a e b em z :

$$z = a + jb = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

$$z = r (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (I)$$

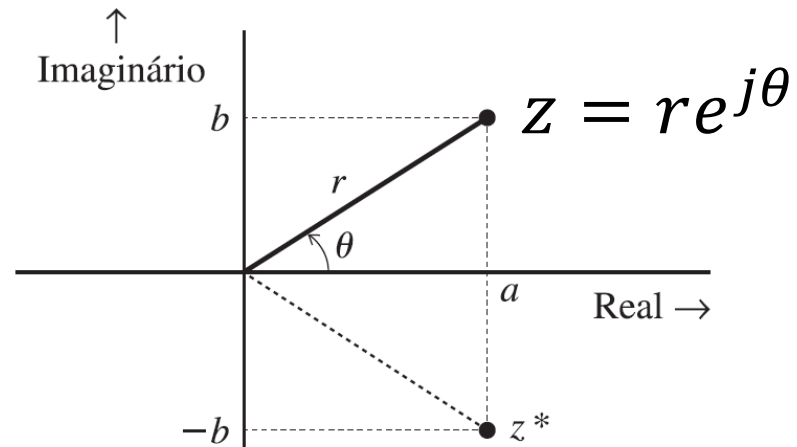
Substituindo (II) em (I):

$$z = r e^{j\theta}$$



Fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (II)$$

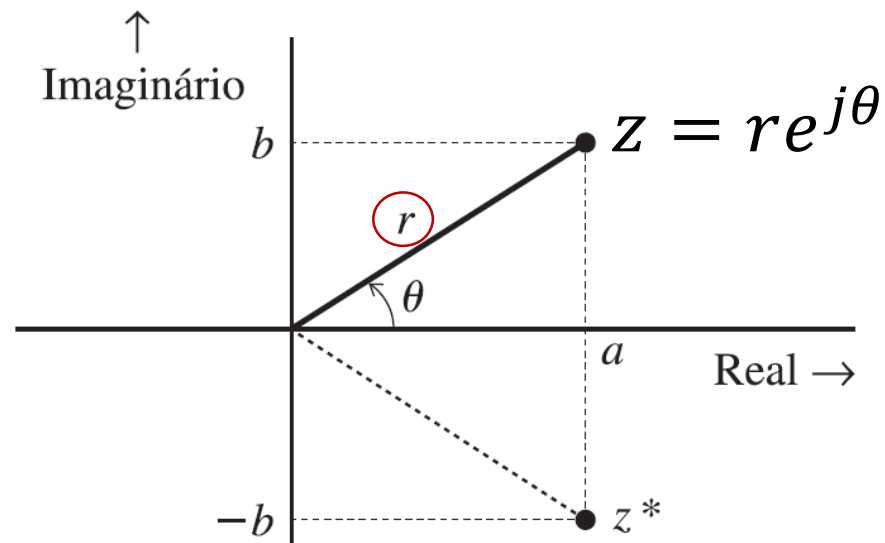




Números complexos

Sendo: $a = r \cos \theta$ e $b = r \sin \theta$

Então: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$



Números complexos

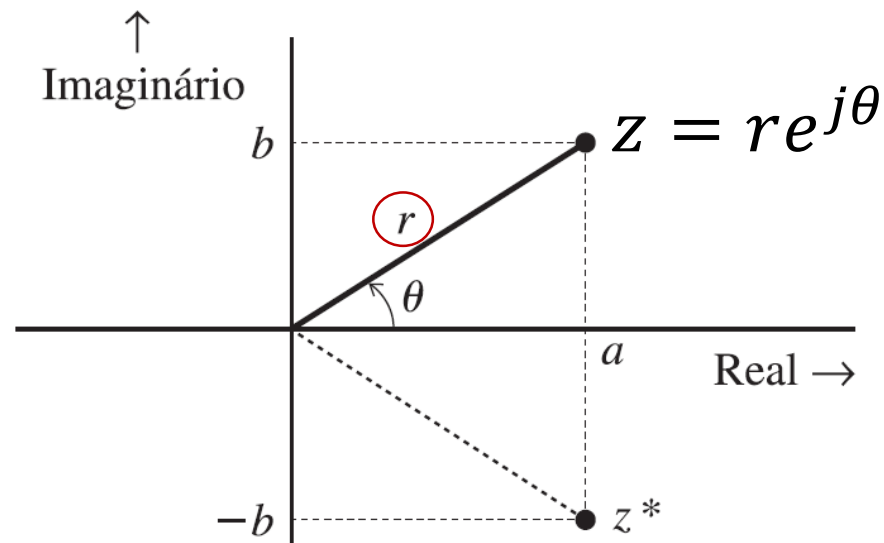
Sendo: $a = r \cos \theta$ e $b = r \sin \theta$

Então: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$



Este é o **módulo**, que representa a distância do ponto z à origem

$$|z| = r$$



Números complexos

Sendo: $a = r \cos \theta$ e $b = r \sin \theta$

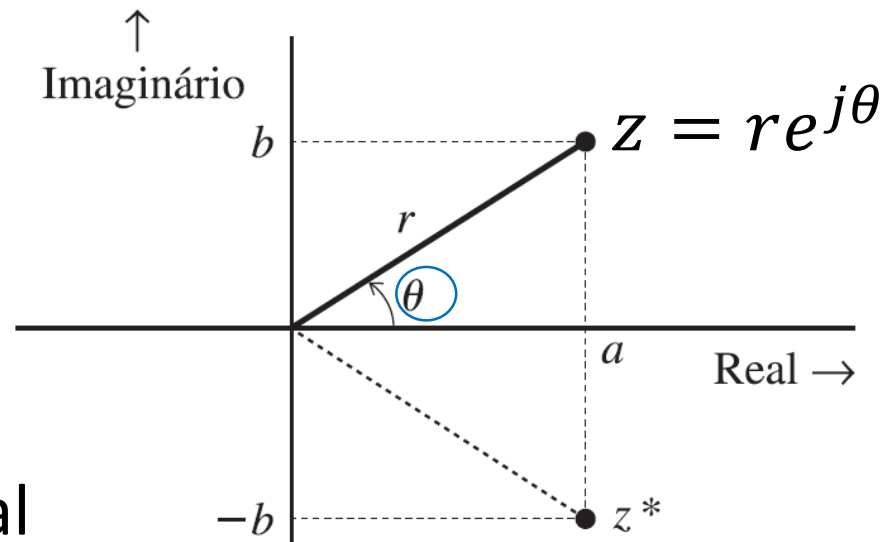
Então:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$



Este é o **ângulo** de z , com respeito ao eixo horizontal do plano complexo

$$\angle z = \theta$$





Números complexos

Forma retangular:

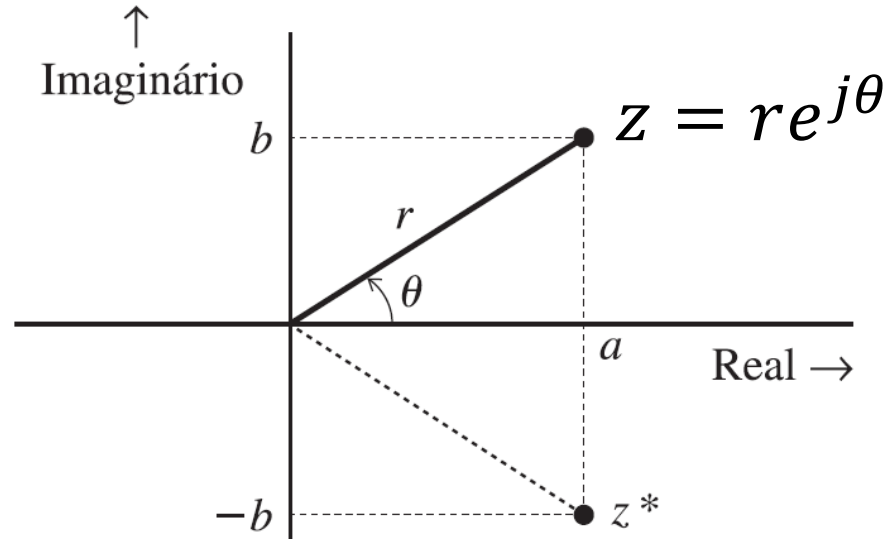
$$z = a + jb$$

Forma polar:

$$z = r \angle \theta$$

Forma exponencial:

$$z = re^{j\theta}$$



$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$z = a + jb = r \cos \theta + jr \sin \theta = re^{j\theta}$$

$$\cos \theta = \text{Real}\{e^{j\theta}\} \quad \sin \theta = \text{Imag}\{e^{j\theta}\}$$

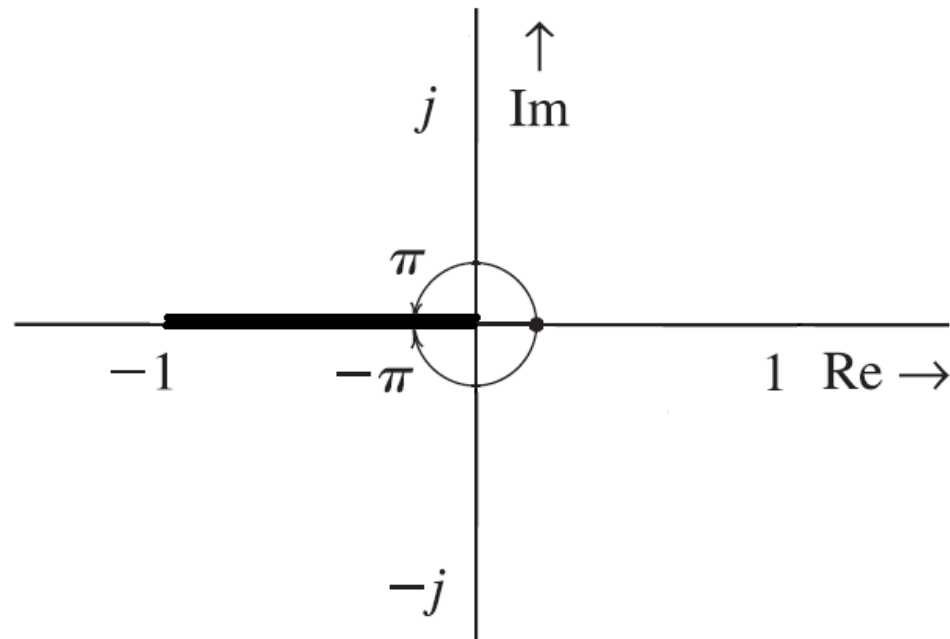


Números complexos

Identidades úteis

O número **-1** está a uma **distância unitária da origem** e possui um **ângulo π ou $-\pi$** (de fato, qualquer múltiplo ímpar de $\pm\pi$):

$$-1 = 1e^{\pm j\pi}$$



Números complexos

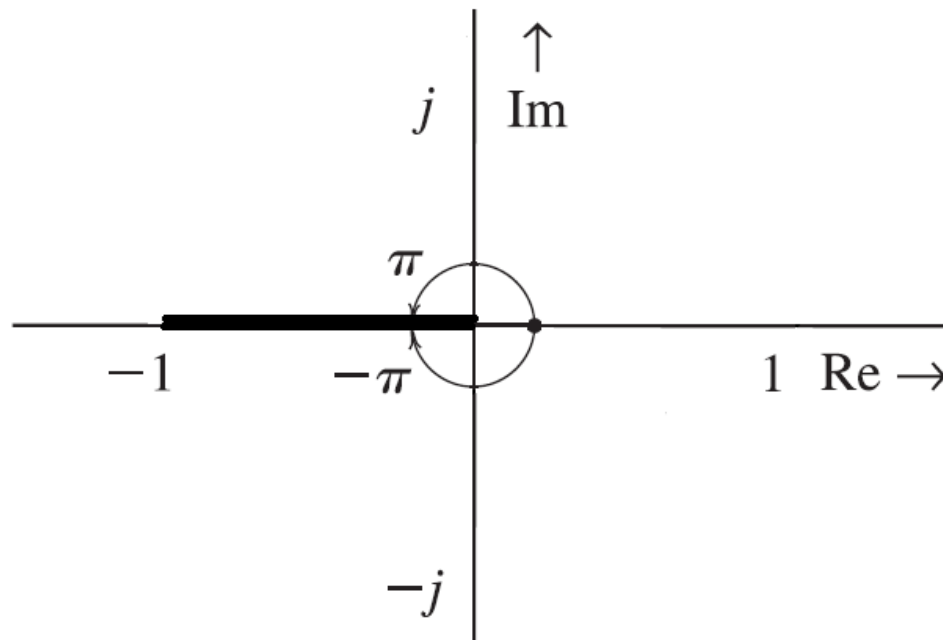
Identidades úteis

O número **-1** está a uma **distância unitária da origem** e possui um **ângulo π ou $-\pi$** (de fato, qualquer múltiplo ímpar de $\pm\pi$):

$$-1 = 1e^{\pm j\pi}$$

$$-1 = 1e^{\pm jn\pi}$$

n , um número inteiro ímpar.





Números complexos

Identidades úteis

O número j está a uma **distância unitária da origem** e seu ângulo é $\pi/2$:

$$j = 1e^{j\pi/2}$$

O número $-j$ está a uma **distância unitária da origem** e seu ângulo é $-\pi/2$:

$$-j = 1e^{-j\pi/2}$$

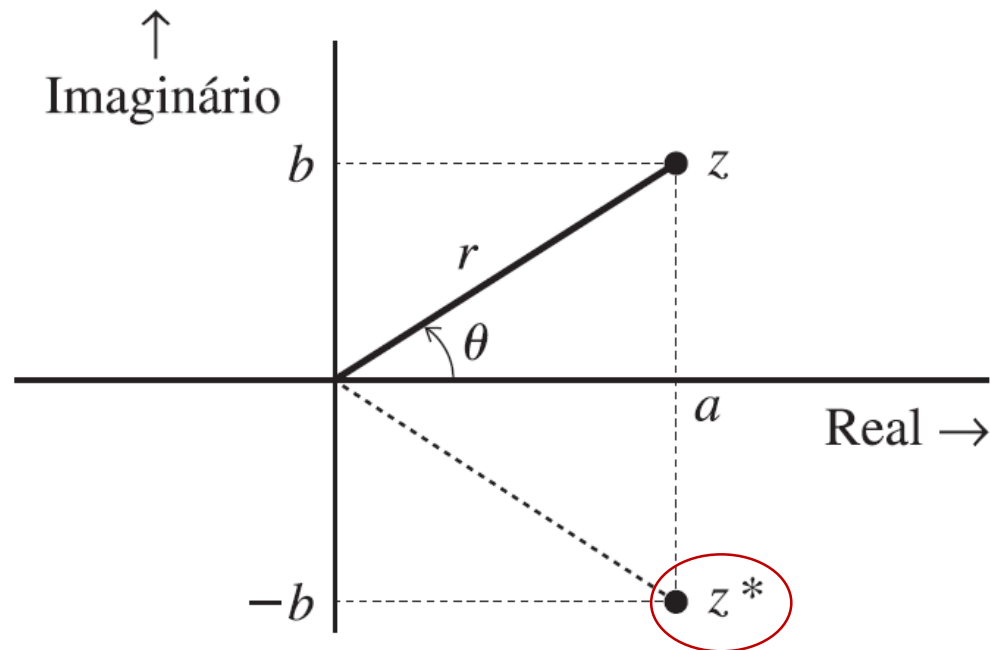
Números complexos

Conjugado de um número complexo

Define-se z^* , o conjugado de: $z = a + jb$

Ou seja: $z^* = a - jb = re^{-j\theta}$

z^* é uma **imagem refletida de z com relação ao eixo horizontal**. Para determinar o conjugado de qualquer número, precisamos apenas **substituir j por $-j$** no número (sendo o mesmo que **alterar o sinal de seu ângulo**)





Números complexos

Conjugado de um número complexo

A soma de um número complexo com o seu conjugado é um número real igual a duas vezes a parte real do número:

$$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2 \operatorname{Re} \{z\}$$

O produto de um número complexo com o seu conjugado é um número real igual ao quadrado do módulo do número:

$$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = |z|^2$$



Números complexos

Adição e subtração:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) - j(y_1 + y_2)$$

Inverso:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \angle -\phi$$

Multiplicação e divisão:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \phi_1 + \phi_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \phi_1 - \phi_2$$

Raiz quadrada:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \angle \phi/2$$

Complexo conjugado:

$$z = x + jy = r \angle \phi = r e^{j\phi}$$

$$z^* = x - jy = r \angle -\phi = r e^{-j\phi}$$



Números complexos

Função exponencial e^{st}

Onde: $s = \sigma + j\omega$

Número complexo Parte real Parte imaginária



Números complexos

Função exponencial e^{st}

Frequência complexa

Frequência
neperiana

Frequência angular.
Frequência de
oscilação de e^{st} .

Onde: $s = \sigma + j\omega$

Número
complexo

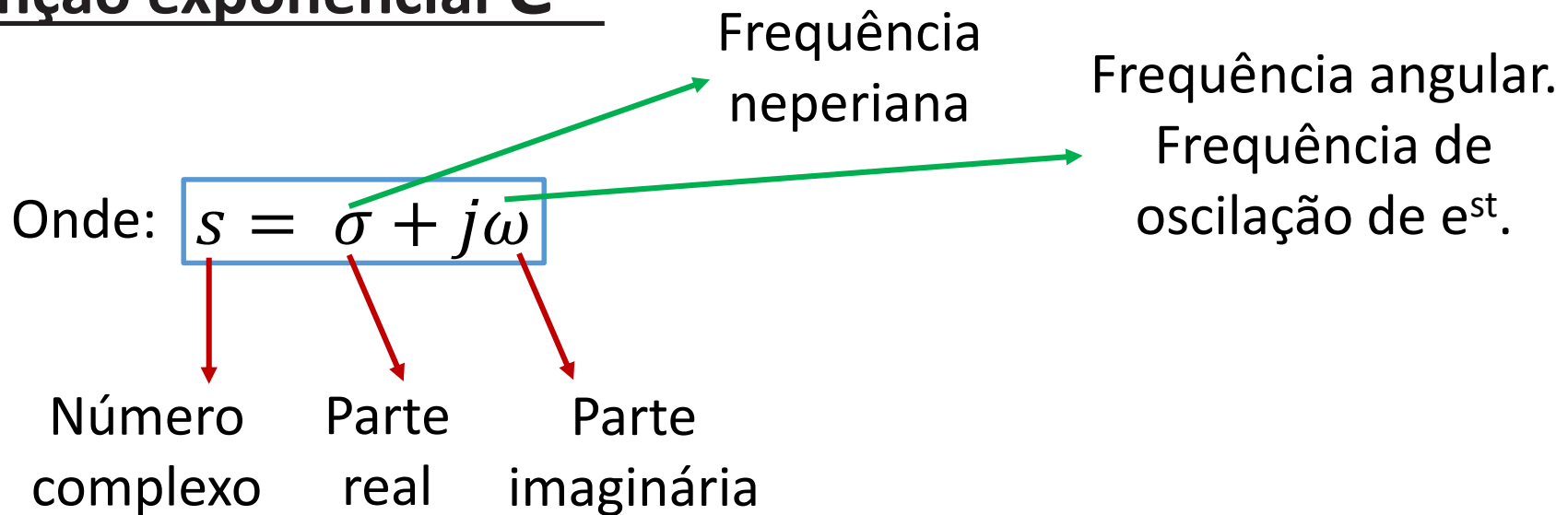
Parte
real

Parte
imaginária



Números complexos

Função exponencial e^{st}



Logo:

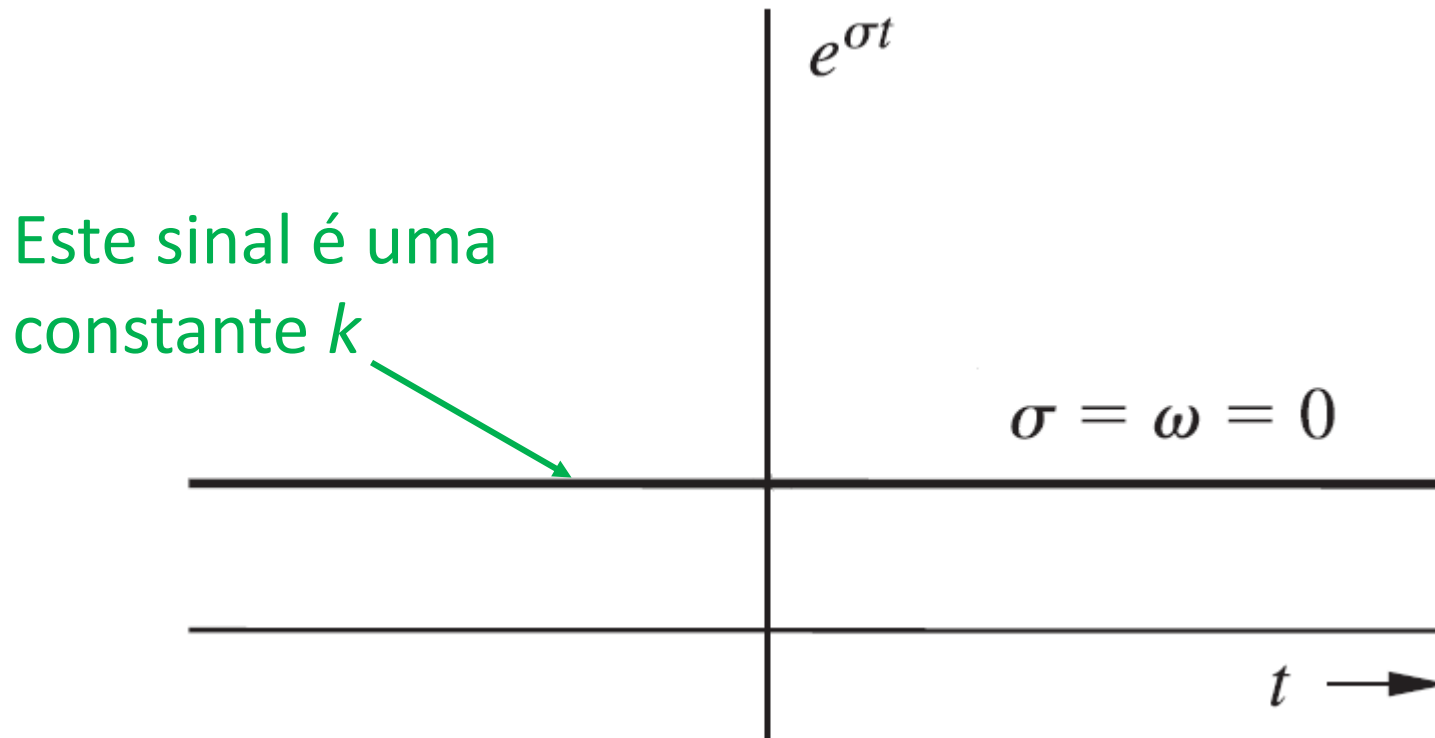
$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$



Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

1. Uma constante: $k = ke^{0t}$ ($s = 0$)

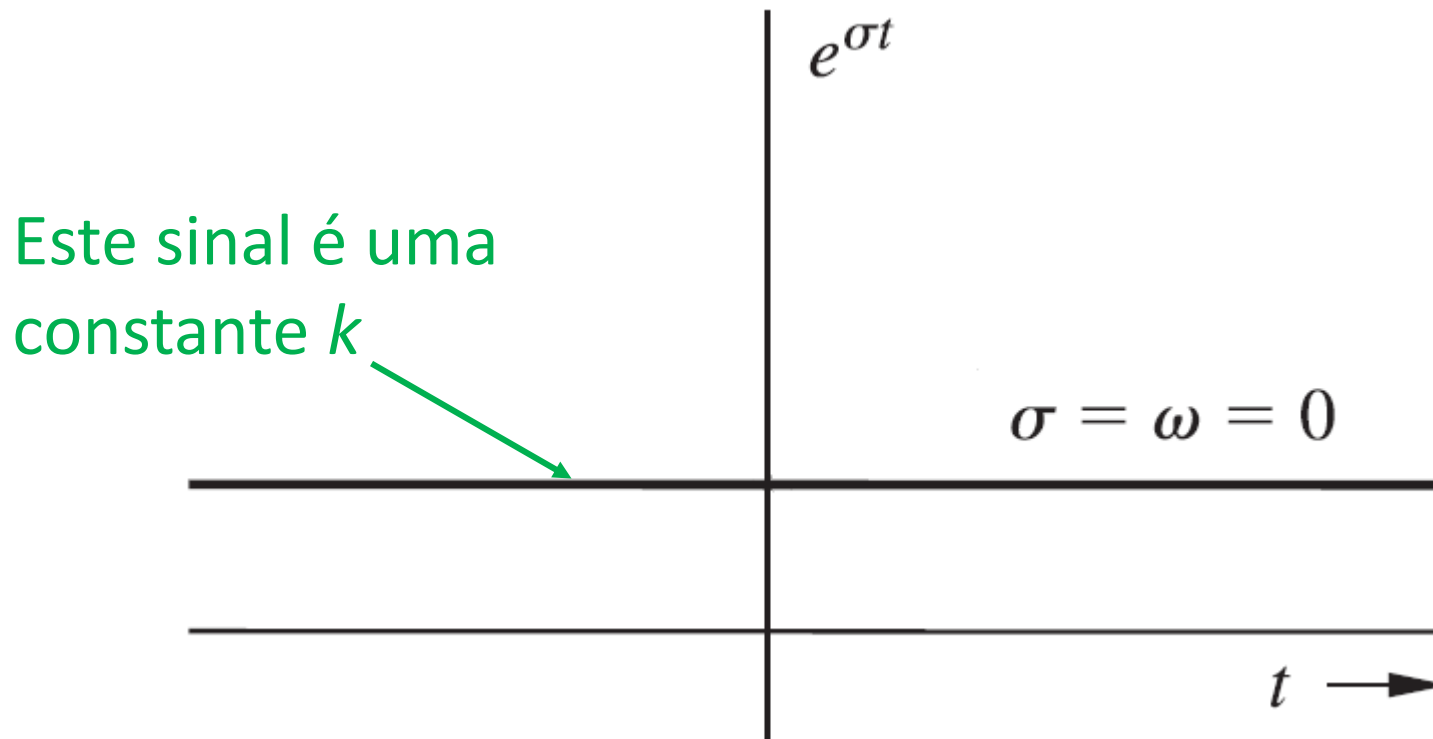




Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

1. Uma constante: $k = ke^{0t}$ ($s = 0$)



Sinal de corrente contínua

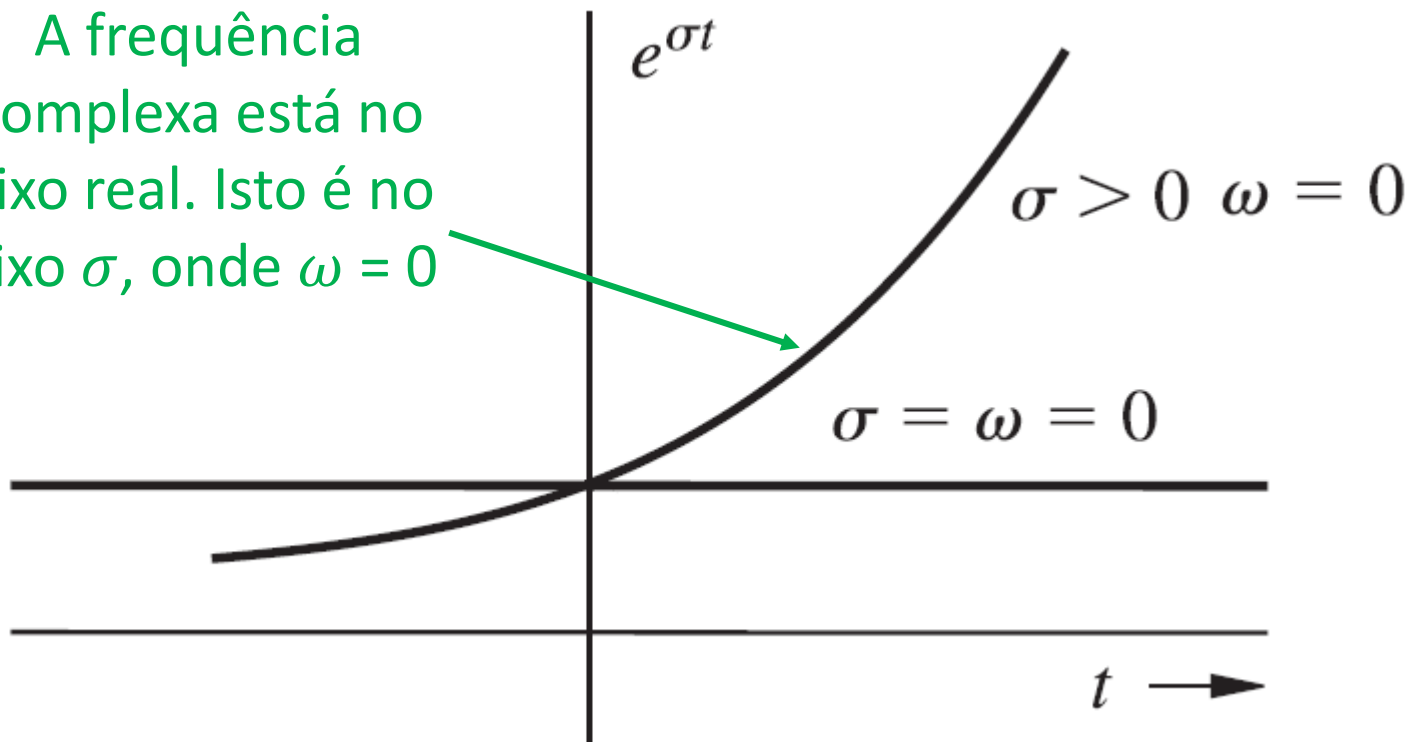


Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

2. Exponencial monotônica crescente: $e^{st} = e^{\sigma t} (\omega = 0; s = \sigma)$

A frequência complexa está no eixo real. Isto é no eixo σ , onde $\omega = 0$



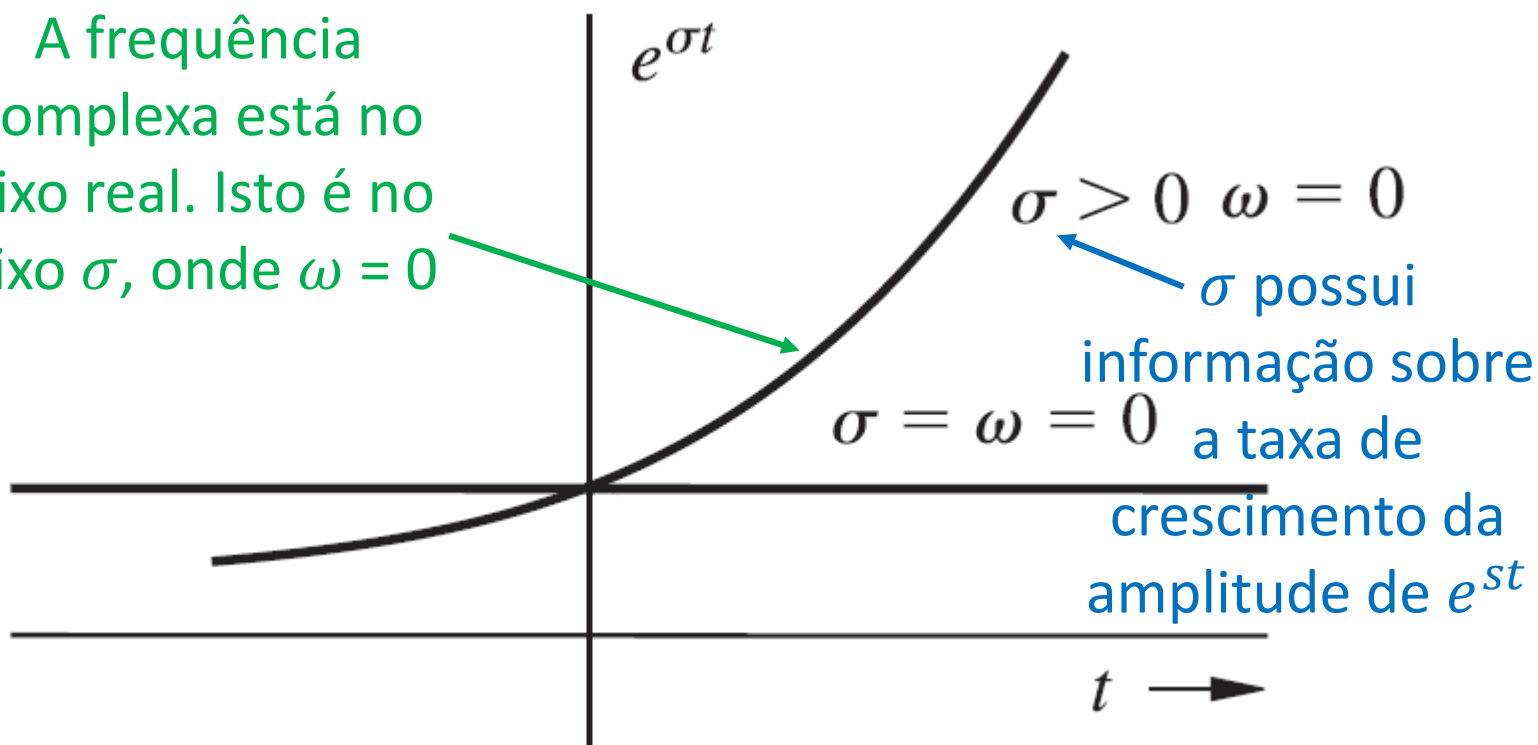


Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

2. Exponencial monotônica crescente: $e^{st} = e^{\sigma t} (\omega = 0; s = \sigma)$

A frequência complexa está no eixo real. Isto é no eixo σ , onde $\omega = 0$



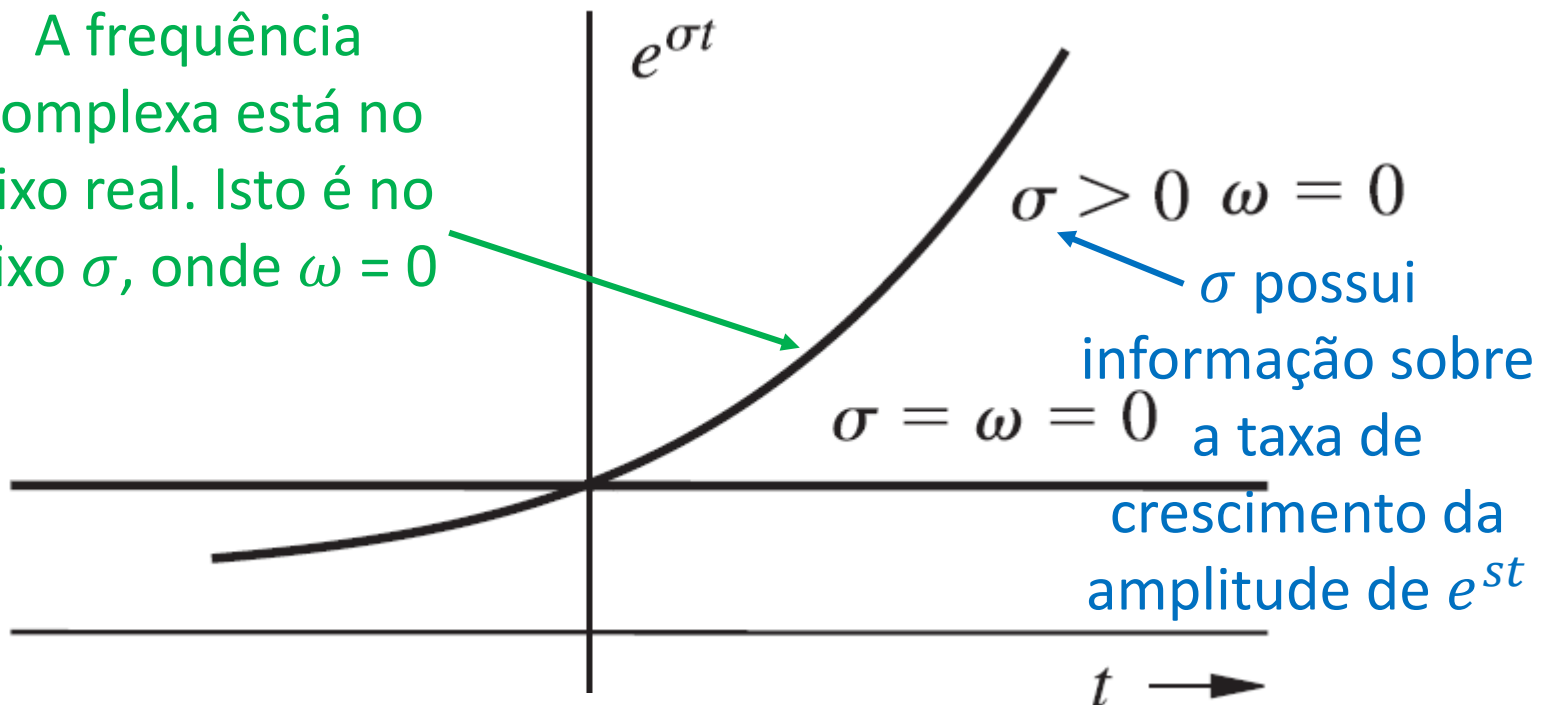


Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

2. Exponencial monotônica crescente: $e^{st} = e^{\sigma t}$ ($\omega = 0$; $s = \sigma$)

A frequência complexa está no eixo real. Isto é no eixo σ , onde $\omega = 0$



Sinal exponencial monotonicamente crescente ($\sigma > 0$)

Sinal com frequência de oscilação 0 ($\omega = 0$)

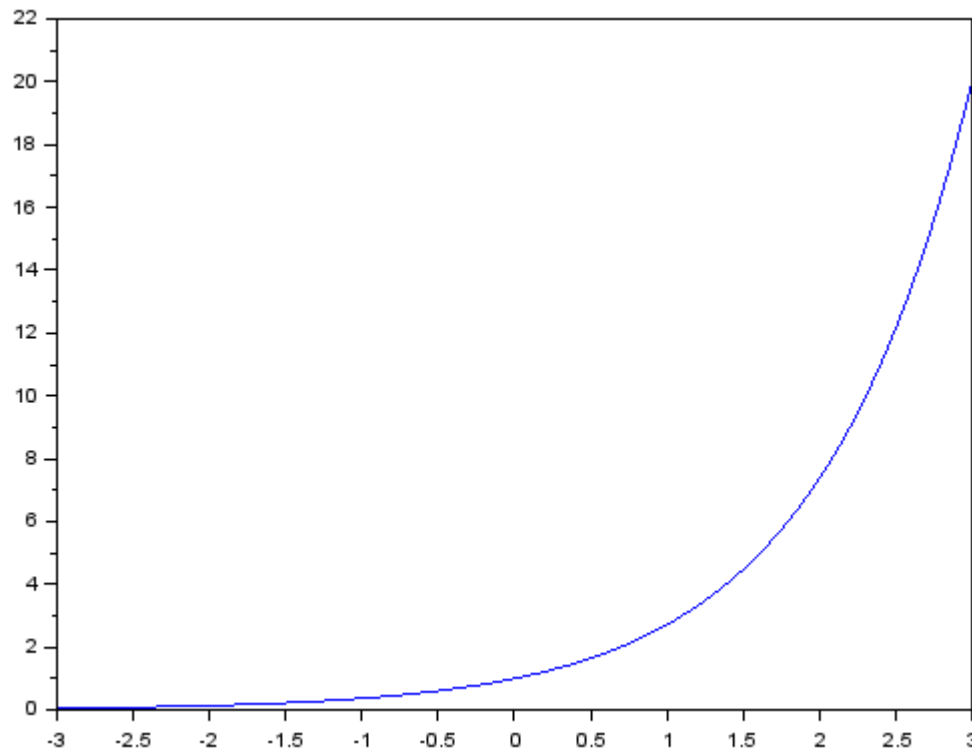


Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

2. Exponencial monotônica crescente: $e^{st} = e^{\sigma t} (\omega = 0; s = \sigma)$

Exemplo: $(\omega = 0; \sigma = 1)$



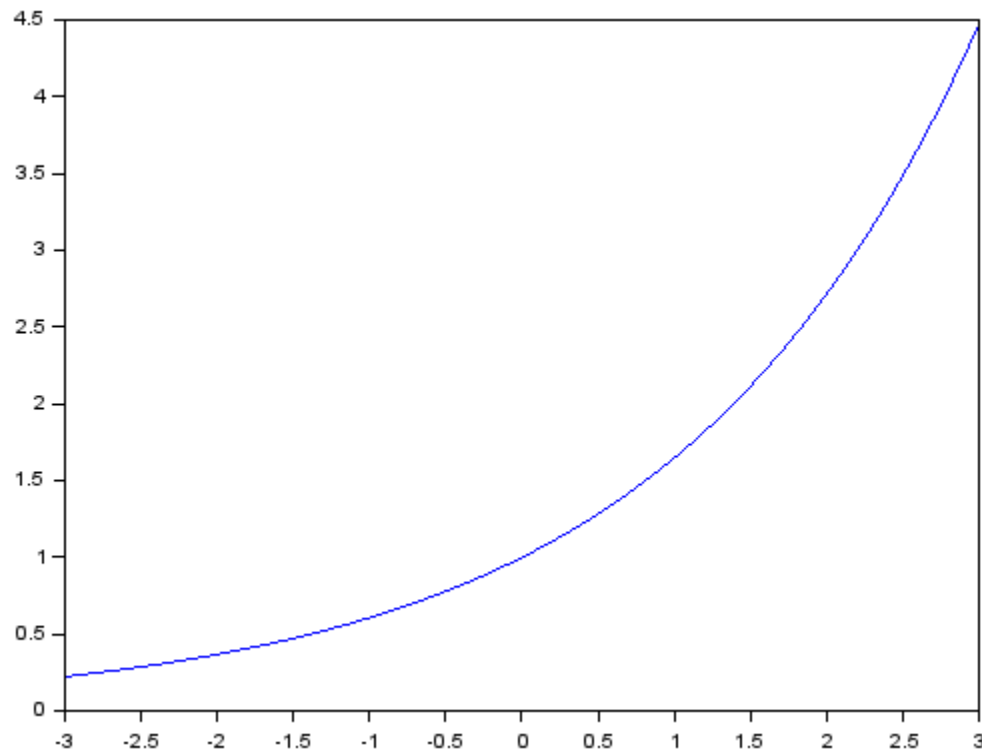


Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

2. Exponencial monotônica crescente: $e^{st} = e^{\sigma t}$ ($\omega = 0$; $s = \sigma$)

Exemplo: ($\omega = 0$; $\sigma = 5$)



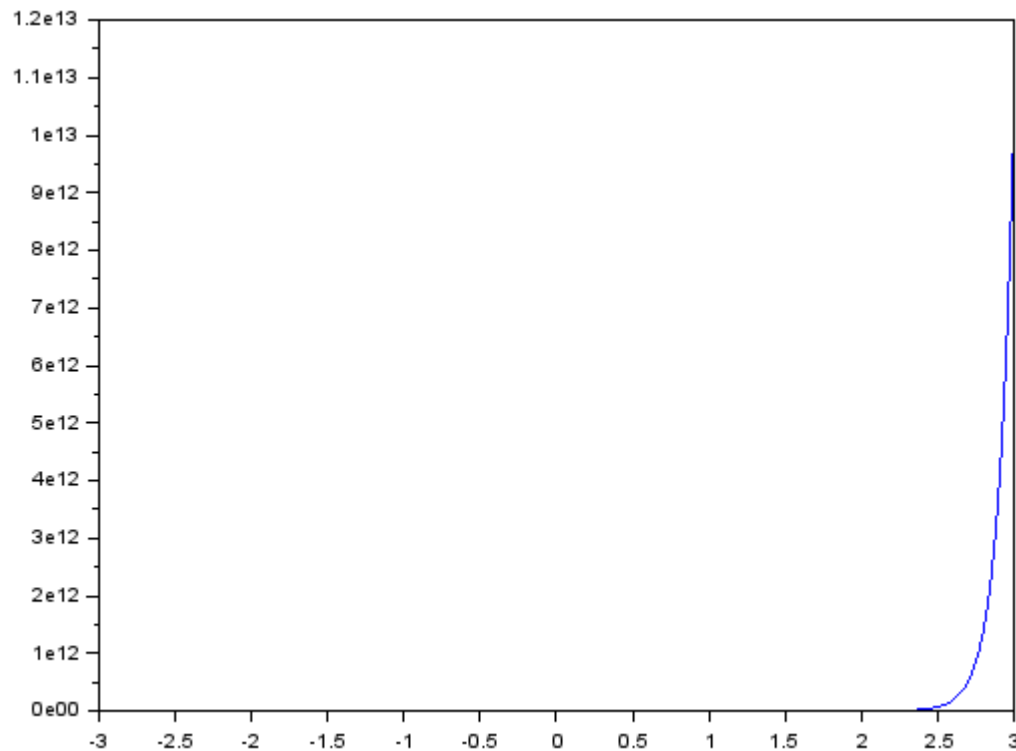


Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

2. Exponencial monotônica crescente: $e^{st} = e^{\sigma t} (\omega = 0; s = \sigma)$

Exemplo: $(\omega = 0; \sigma = 10)$



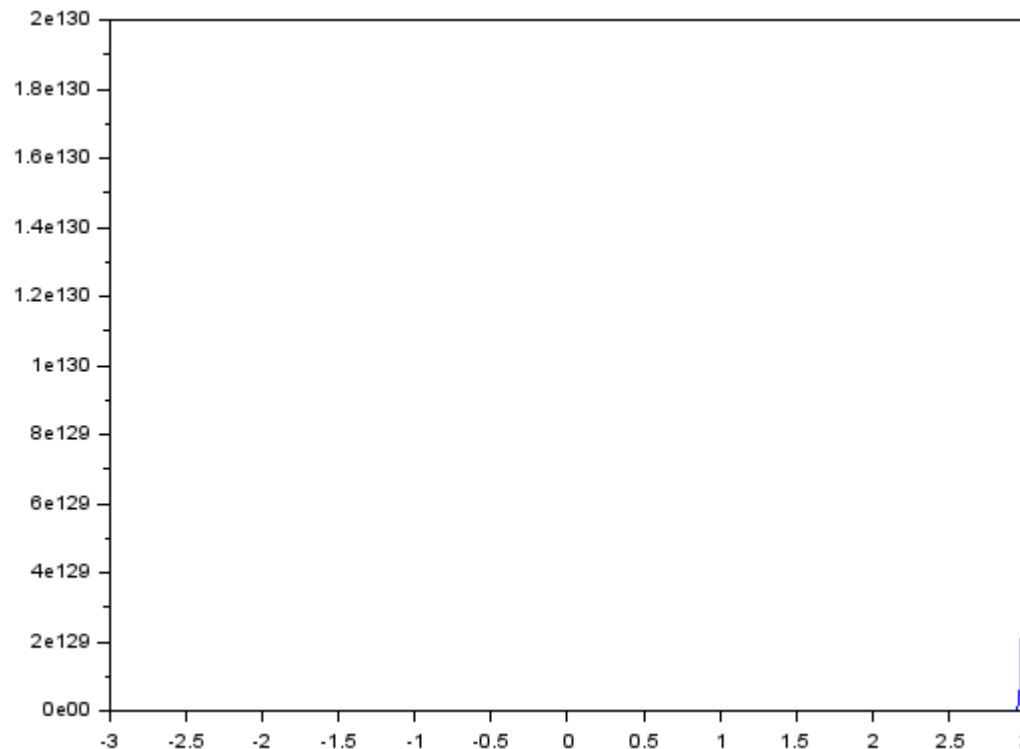


Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

2. Exponencial monotônica crescente: $e^{st} = e^{\sigma t} (\omega = 0; s = \sigma)$

Exemplo: ($\omega = 0; \sigma = 100$)

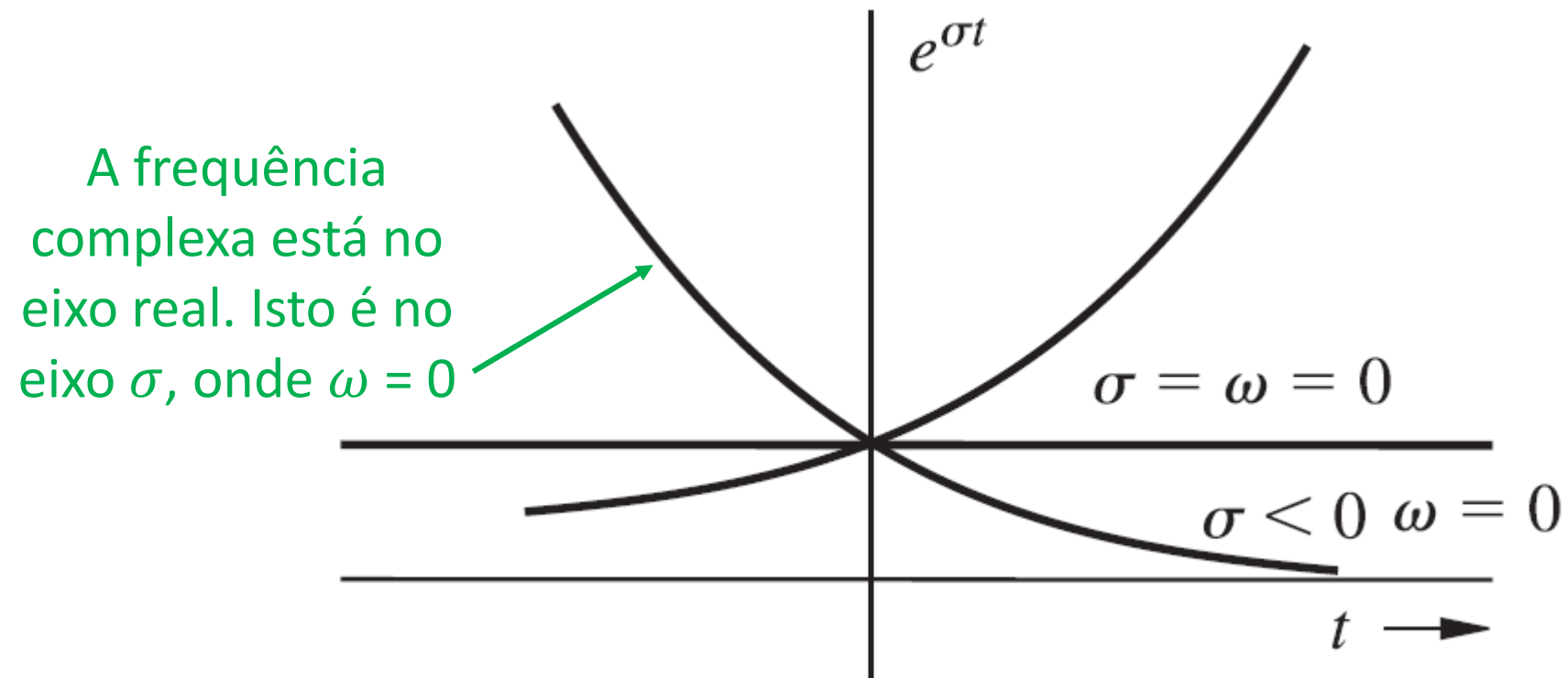




Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

3. Exponencial monotônica decrescente: $e^{st} = e^{\sigma t}(\omega = 0; s = \sigma)$

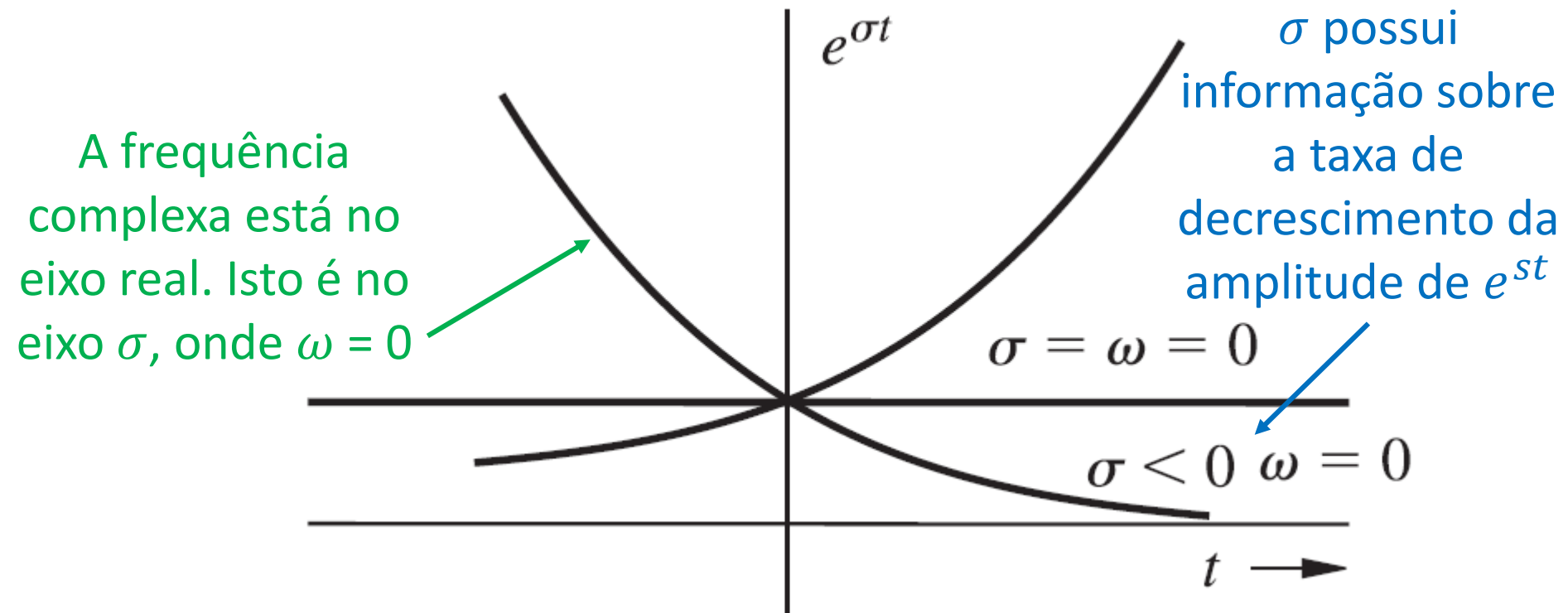




Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

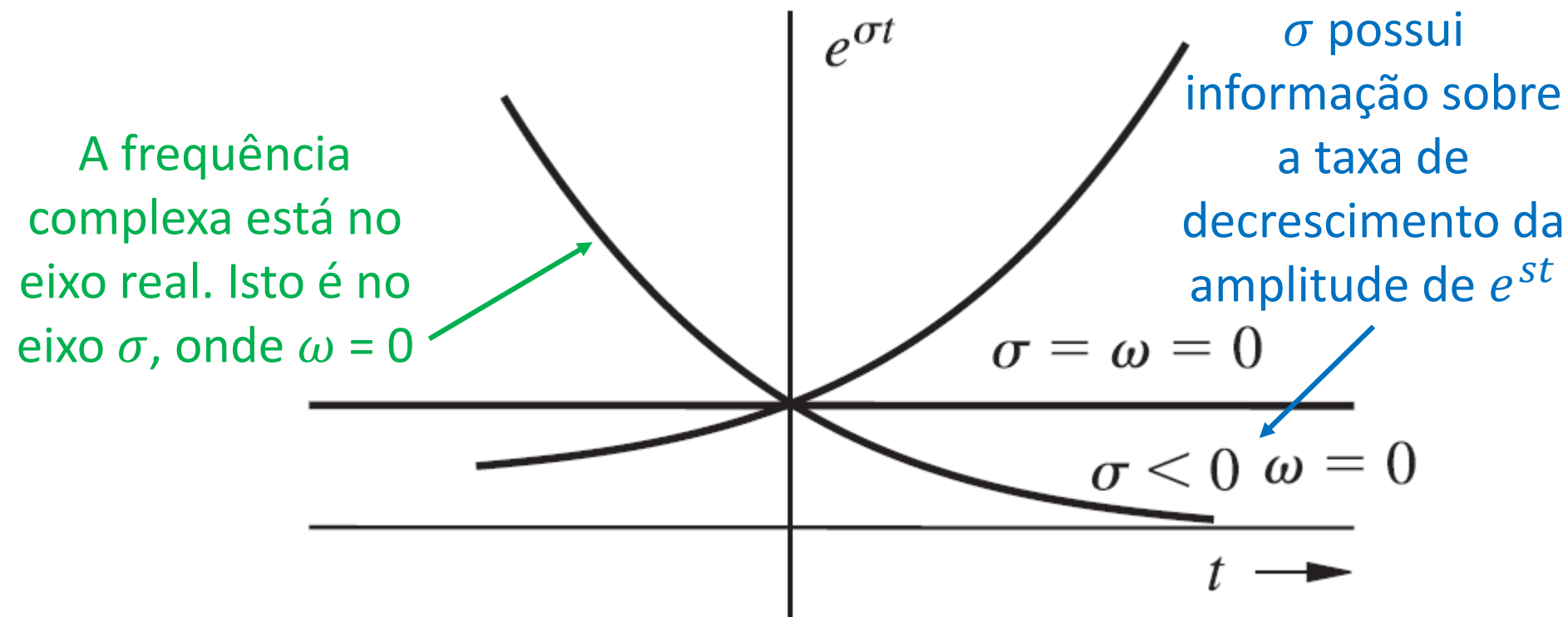
3. Exponencial monotônica decrescente: $e^{st} = e^{\sigma t}(\omega = 0; s = \sigma)$



Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

3. Exponencial monotônica decrescente: $e^{st} = e^{\sigma t}(\omega = 0; s = \sigma)$



Sinal exponencial monotonicamente decrescente ($\sigma < 0$)

Sinal com frequência de oscilação 0 ($\omega = 0$)

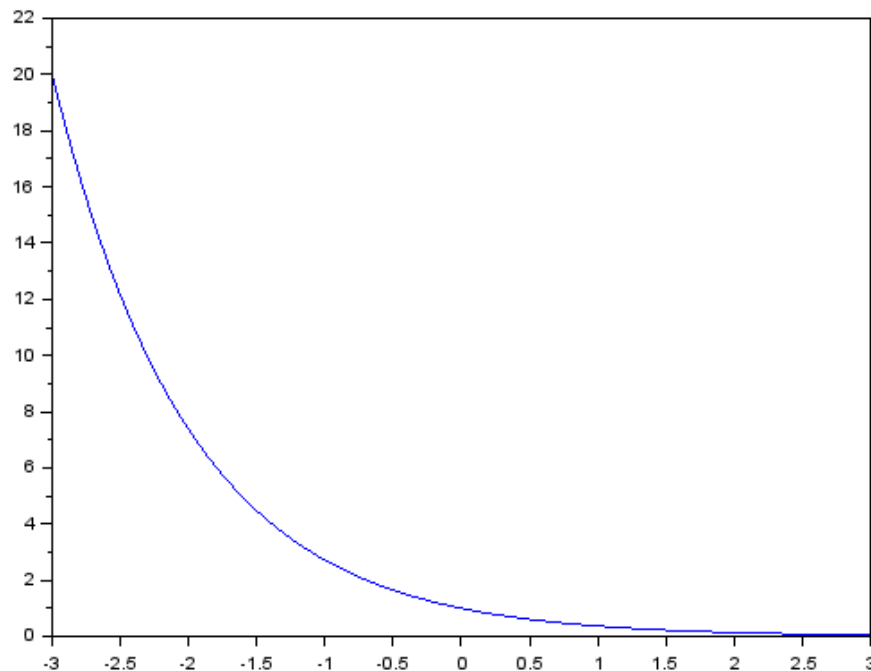


Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

3. Exponencial monotônica decrescente: $e^{st} = e^{\sigma t} (\omega = 0; s = \sigma)$

Exemplo: $(\omega = 0; \sigma = -1)$



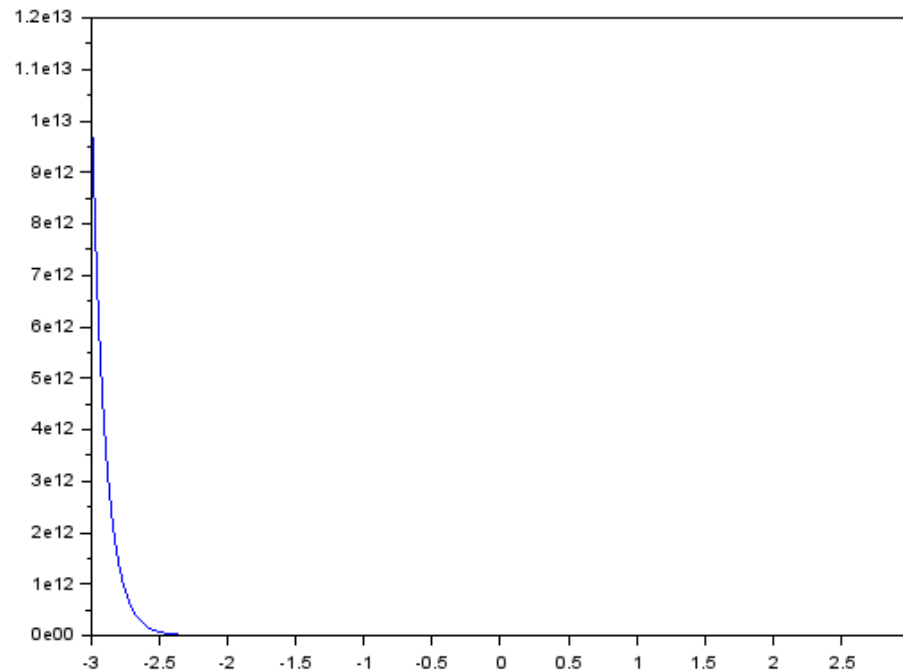


Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

3. Exponencial monotônica decrescente: $e^{st} = e^{\sigma t} (\omega = 0; s = \sigma)$

Exemplo: $(\omega = 0; \sigma = -10)$



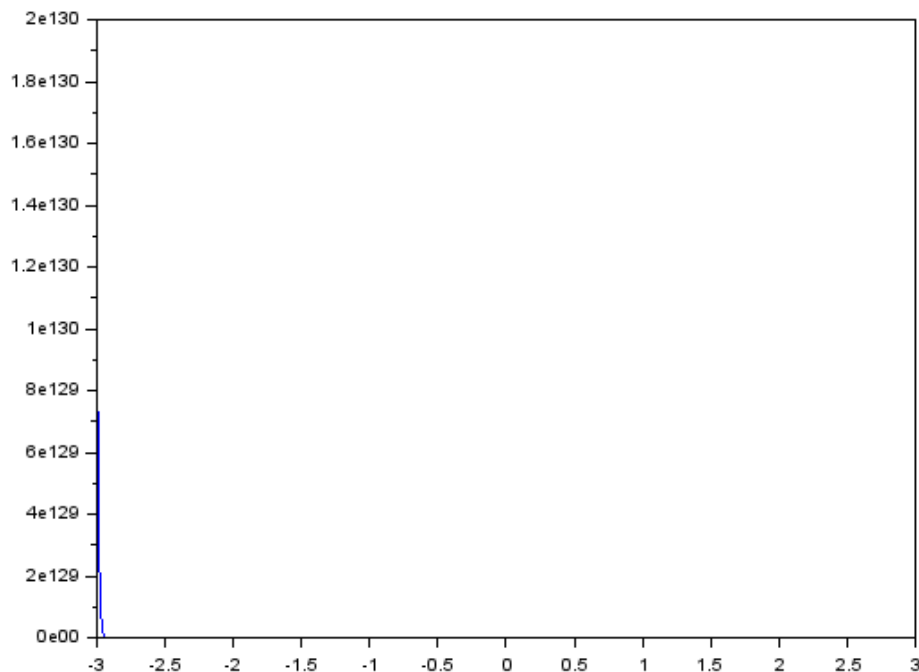


Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

3. Exponencial monotônica decrescente: $e^{st} = e^{\sigma t} (\omega = 0; s = \sigma)$

Exemplo: $(\omega = 0; \sigma = -100)$



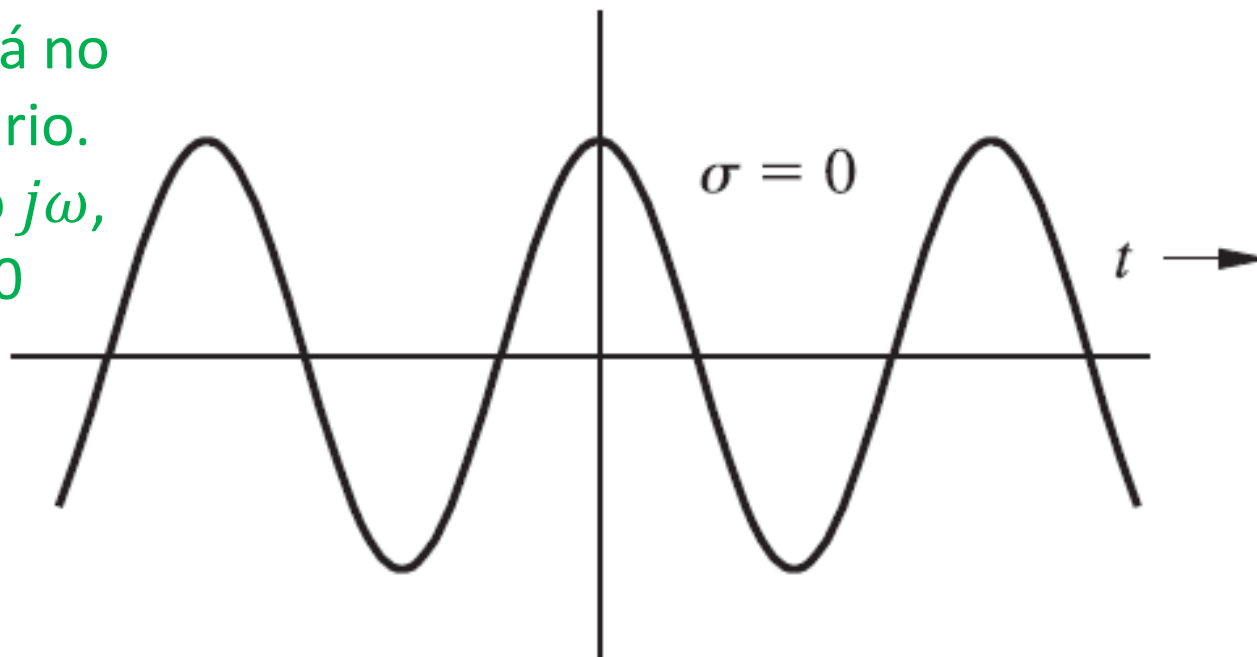


Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

4. Senóide: $\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (\sigma = 0; s = \pm j\omega)$

A frequência complexa está no eixo imaginário. Isto é no eixo $j\omega$, onde $\sigma = 0$



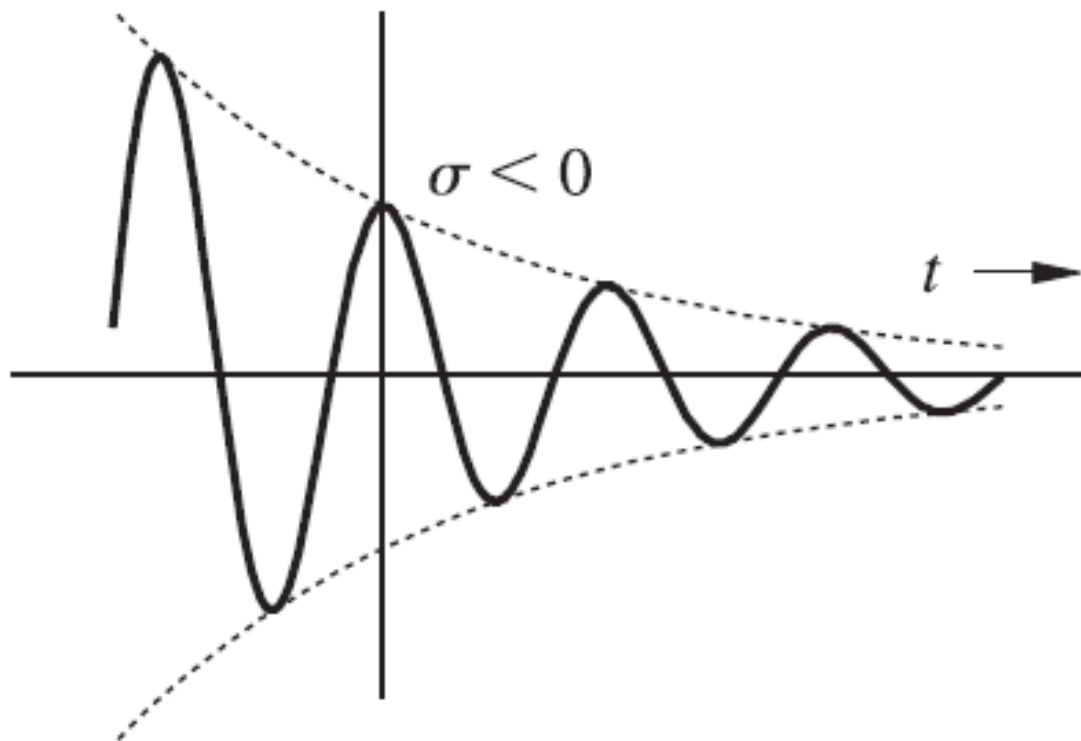
Senóides convencionais com amplitude constantes

Números complexos

Função exponencial e^{st} . Casos particulares

5. Senóide variando exponencialmente: $e^{\sigma t} \cos \omega t$ ($s = \sigma \pm j\omega$)

Tanto σ quanto ω , são não nulos, e a frequência s é complexa e não está sobre nenhum eixo



O sinal decai exponencialmente ($\sigma < 0$)

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

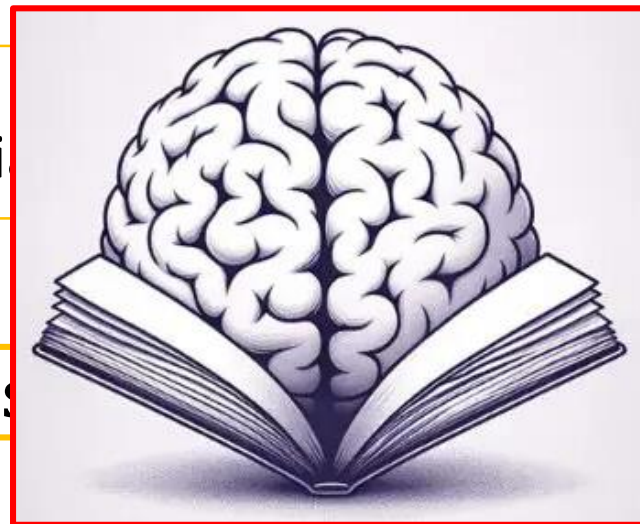
$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**,
(chamadas frequências

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

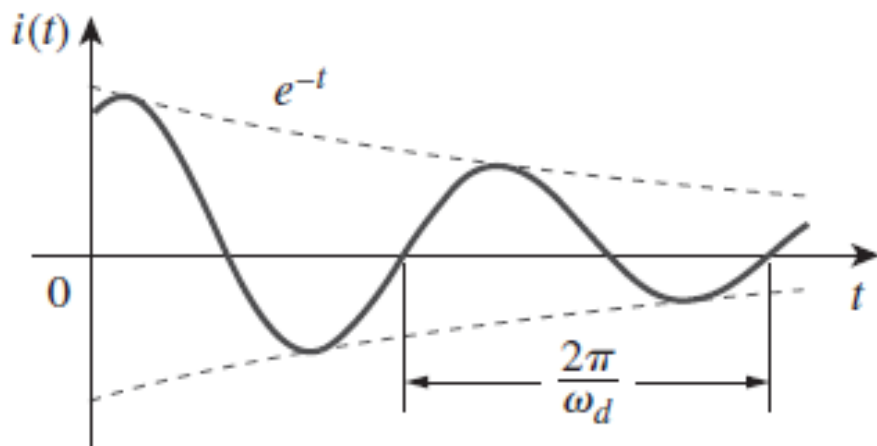
$$i(t) = e^{-\alpha t} [m_1 \cos(\omega_d t) + m_2 \sin(\omega_d t)]$$



$$\frac{4L}{R^2}$$

$$-k_2$$

$$-k_2)$$

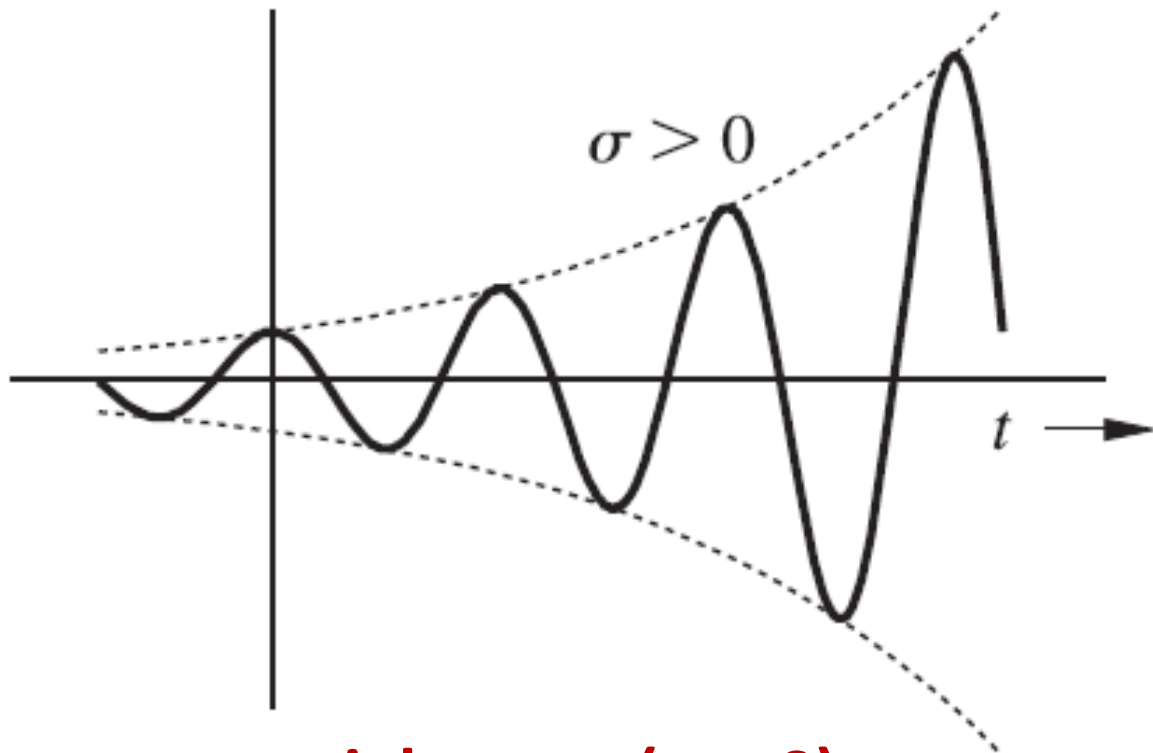


A resposta é **amortecida exponencialmente e oscilatória.**

Números complexos

6. Senóide variando exponencialmente: $e^{\sigma t} \cos \omega t$ ($s = \sigma \pm j\omega$)

Tanto σ quanto ω , são não nulos, e a frequência s é complexa e não está sobre nenhum eixo



O sinal cresce exponencialmente ($\sigma > 0$)

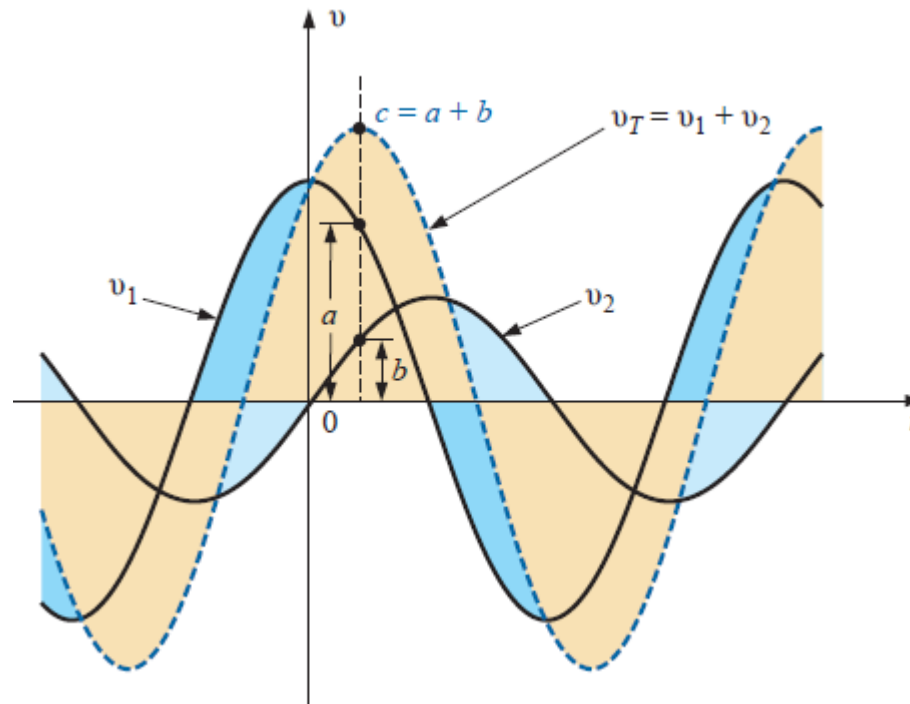


Fasores



Fasores

Soma algébrica das ordenadas em cada ponto ao longo da abscissa

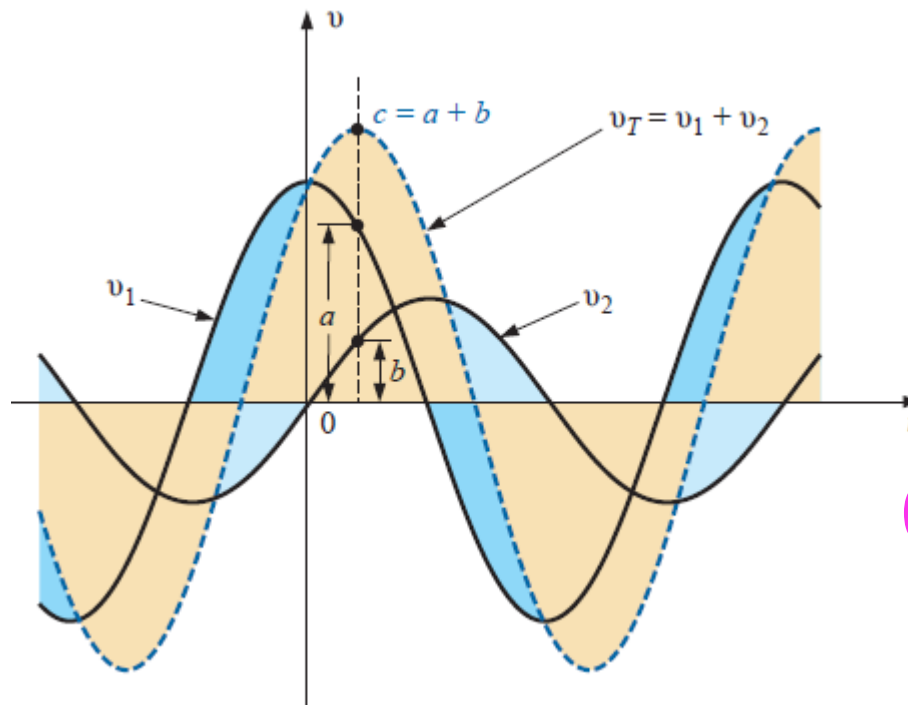


Processo longo e tedioso com precisão limitada



Fasores

Soma algébrica das ordenadas em cada ponto ao longo da abscissa



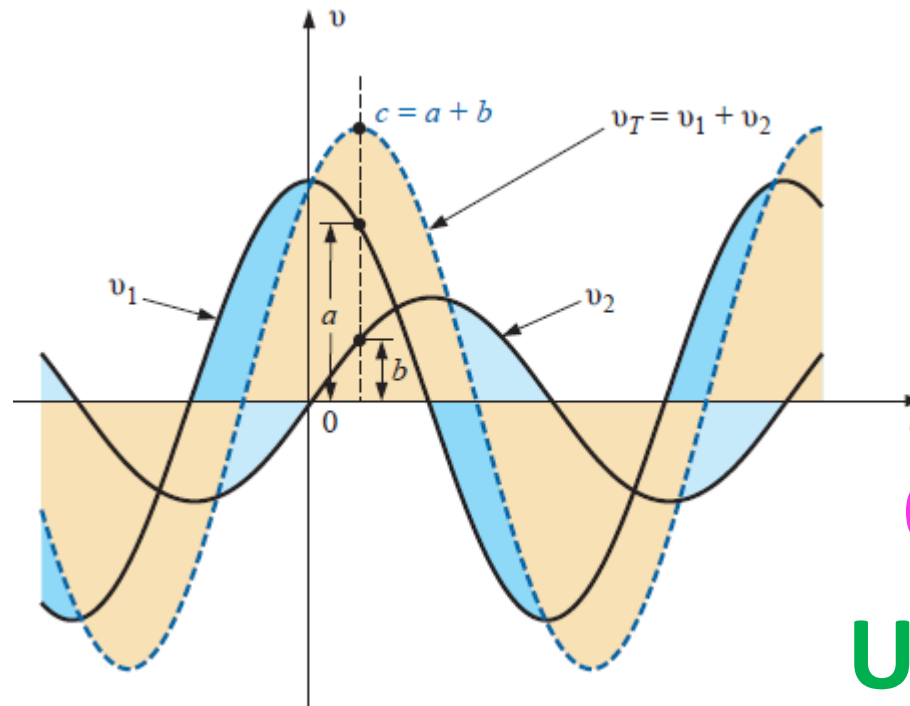
Que fazer ?

Processo longo e tedioso com precisão limitada



Fasores

Soma algébrica das ordenadas em cada ponto ao longo da abscissa



Que fazer ?

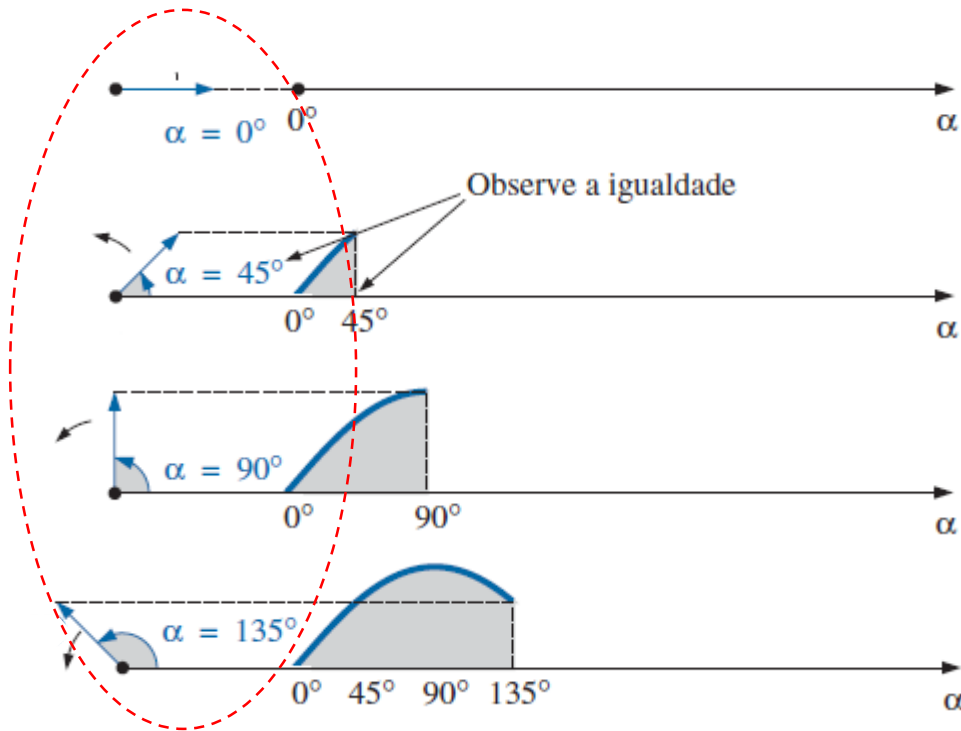
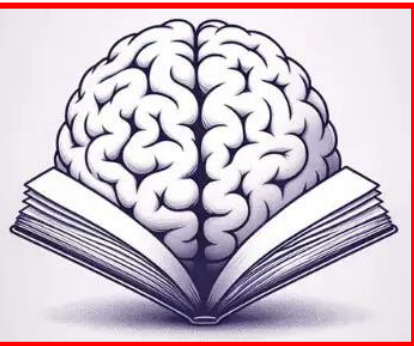
Usar fasores

Processo longo e tedioso com precisão limitada



Fasores

Fasor: vetor radial girante, que tem um módulo (comprimento) constante e uma extremidade fixa na origem. **Fasor** é um número complexo que representa a amplitude e a fase de uma senoide.





Fasores

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$$



Fasores

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$$

$$V_m \cos(\omega t) + j V_m \sin(\omega t) = V_m e^{j\omega t}$$

$$\operatorname{Re}\{V_m e^{j\omega t}\} = V_m \cos(\omega t)$$

$$\operatorname{Im}\{V_m e^{j\omega t}\} = V_m \sin(\omega t)$$



Fasores

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$$

$$V_m \cos(\omega t) + j V_m \sin(\omega t) = V_m e^{j\omega t}$$

$$\operatorname{Re}\{V_m e^{j\omega t}\} = V_m \cos(\omega t)$$

$$\operatorname{Im}\{V_m e^{j\omega t}\} = V_m \sin(\omega t)$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\} = \operatorname{Re}\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}$$



Fasores

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$$

$$V_m \cos(\omega t) + j V_m \sin(\omega t) = V_m e^{j\omega t}$$

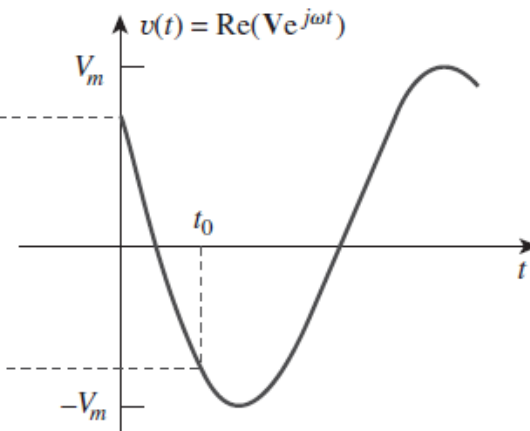
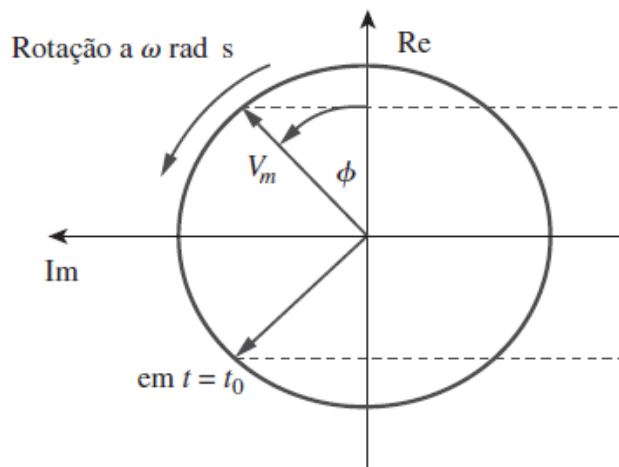
$$\operatorname{Re}\{V_m e^{j\omega t}\} = V_m \cos(\omega t)$$

$$\operatorname{Im}\{V_m e^{j\omega t}\} = V_m \sin(\omega t)$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\} = \operatorname{Re}\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}$$

$$\mathbb{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$$

$$v(t) = \operatorname{Re}(\mathbb{V} e^{j\omega t})$$





Fasores

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

**Representação no
domínio do tempo**



$$\mathbb{V} = V = V_m \angle \phi$$

**Representação no
domínio dos fasores**

Tabela 9.1 • Transformação senoide-fasor.

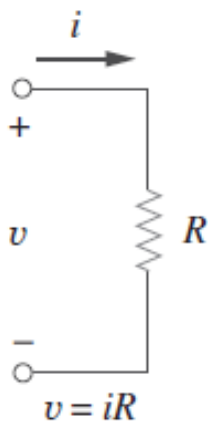
Representação do domínio do tempo	Representação no domínio dos fasores
$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$V_m \sin(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi - 90^\circ$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$
$I_m \sin(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta - 90^\circ$



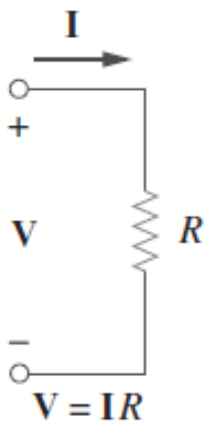
Fasores e elementos de circuitos

Fasores e elementos de circuitos

Representação da tensão e corrente no **resistor**



(a)

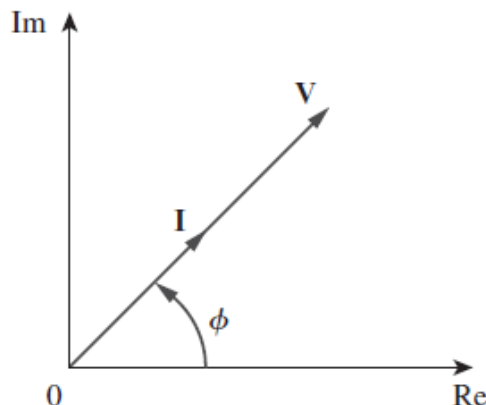


(b)

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow I_m \angle \phi = \mathbb{I}$$

$$v(t) = RI_m \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow \mathbb{V} = R\mathbb{I}$$

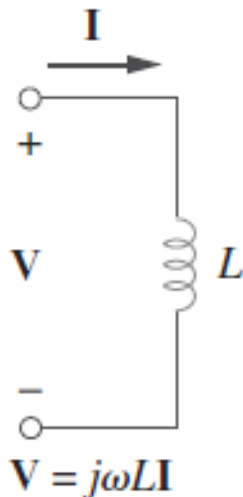
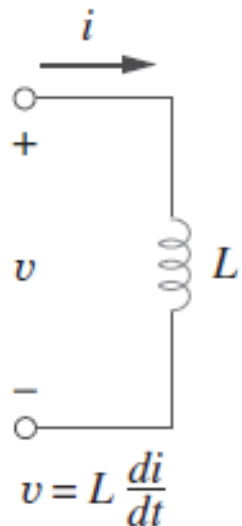
$$\mathbb{V} = R\mathbb{I}$$



No **resistor** a tensão e corrente estão em fase

Fasores e elementos de circuitos

Representação da tensão e corrente no **indutor**



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow I_m \angle \phi = \mathbb{I}$$

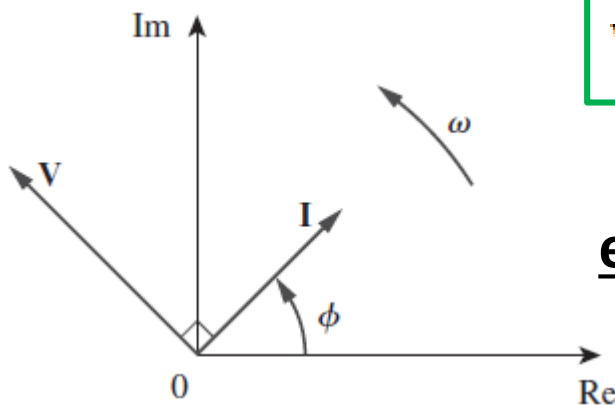
$$v(t) = L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow \mathbb{V} = j\omega L \mathbb{I}$$

$$\mathbb{V} = j\omega L I_m \angle \phi$$

$$\mathbb{V} = \omega L I_m \angle \phi \times 1 \angle 90^\circ$$

$$\frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega \mathbb{V}$$

$$\int v(t) dt \Leftrightarrow \frac{\mathbb{V}}{j\omega}$$

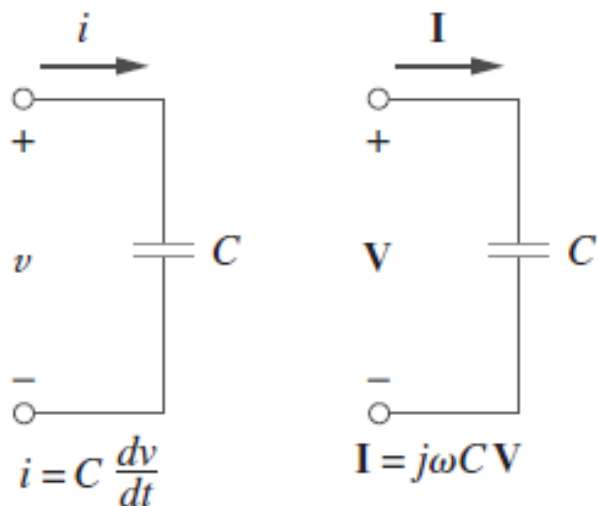


$$\mathbb{V} = \omega L I_m \angle \phi + 90^\circ$$

No **indutor** a tensão
está adiantada 90° em
relação à corrente

Fasores e elementos de circuitos

Representação da tensão e corrente no capacitor

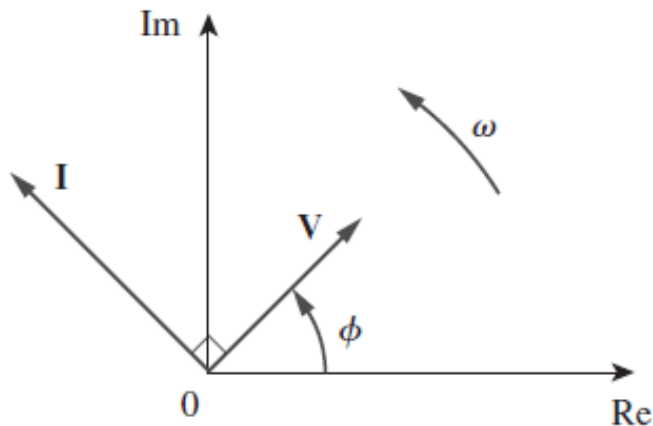


$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow V_m \angle \phi = \mathbb{V}$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow \mathbb{I} = C j \omega \mathbb{V} \Leftrightarrow \boxed{\mathbb{V} = \frac{\mathbb{I}}{j \omega C}}$$

$$\mathbb{V} = -j \frac{I_m \angle \phi}{\omega C} \quad \mathbb{V} = \frac{I_m \angle \phi \times 1 \angle -90^\circ}{\omega C}$$

$$\boxed{\mathbb{V} = \frac{I_m \angle \phi - 90^\circ}{\omega C}}$$



No capacitor a tensão está atrasada 90° em relação à corrente



Fasores e elementos de circuitos

Tabela 9.2 • Resumo das relações tensão-corrente.

Elemento	Domínio do tempo	Domínio da frequência
R	$v = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$
L	$v = L \frac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$
C	$i = C \frac{dv}{dt}$	$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$



Exercícios

1. Estudar os exemplos e o conteúdo da aula.



Referências

Alexader, C. K., Sadiku, M., N., O. Fundamentos Circuitos Elétricos , 5ta ed. Mc Graw Hill, 2013.

Boylestad, R., L. Introdução à análise de circuitos, 12nd ed. Pearson, 2012.

Lathi, B., P. Sinais e sistemas lineares, 2nd ed. Bookman 2016.

Figura Lembrando :

<https://zenkit.com/en/blog/10-ways-to-remember-what-you-study/>



Universidade de São Paulo (USP), Escola
de Engenharia de Lorena (EEL),
Curso de Engenharia Física



Obrigado

Prof. Dr. Andy Blanco Rodriguez

andy.blanco@usp.br

**Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR), Sala A 53C, Área II da EEL-USP,
Estrada Chiquito de Aquino, N° 1000, Lorena, São Paulo, Brasil.**