Roteiro para construção de histogramas e ajuste de curva Gaussiana

Prof. Sérgio L. Morelhão
morelhao@if.usp.br

1. Análise estatística básica

As medidas de período de um pêndulo com cronômetro manual obedecem uma distribuição estatística Gaussiana:

$$G(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad . \tag{1}$$

$G(x)\Delta x$ é a probabilidade de medir um valor entre x e $x+\Delta x$, desde que Δx seja muito menor que o desvio padrão σ da distribuição, isto é $\Delta x << \sigma$.

Dado um conjunto de N medidas $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$,

$$x_0=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{2}$$

é o valor médio, e o desvio padrão é calculado como

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x_0)^2} \quad . \tag{3}$$

O valor experimental da medida de x será

$$\boxed{x_{\exp}=x_0\pm\sigma_m} \tag{4}$$

onde

$$\sigma_m=\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{5}$$

é o desvio padrão da média.

2. Construção do histograma

Tendo em mãos um conjunto de N valores da variável x, calcula-se o valor médio na eq. (2), e o desvio padrão a partir da eq. (3). A largura Δx das colunas no histograma, chamadas de canais, deve aumentar com o desvio padrão e diminuir com o número de medidas de modo que a aparência do histograma reflita a distribuição estatística dos dados. Fica como sugestão utilizar $\Delta x \approx 2\sigma_m$ quando $N \leq 200$ e $\Delta x \approx 4\sigma_m$ quando $N > 200$. Veja exemplos na Figura 1.

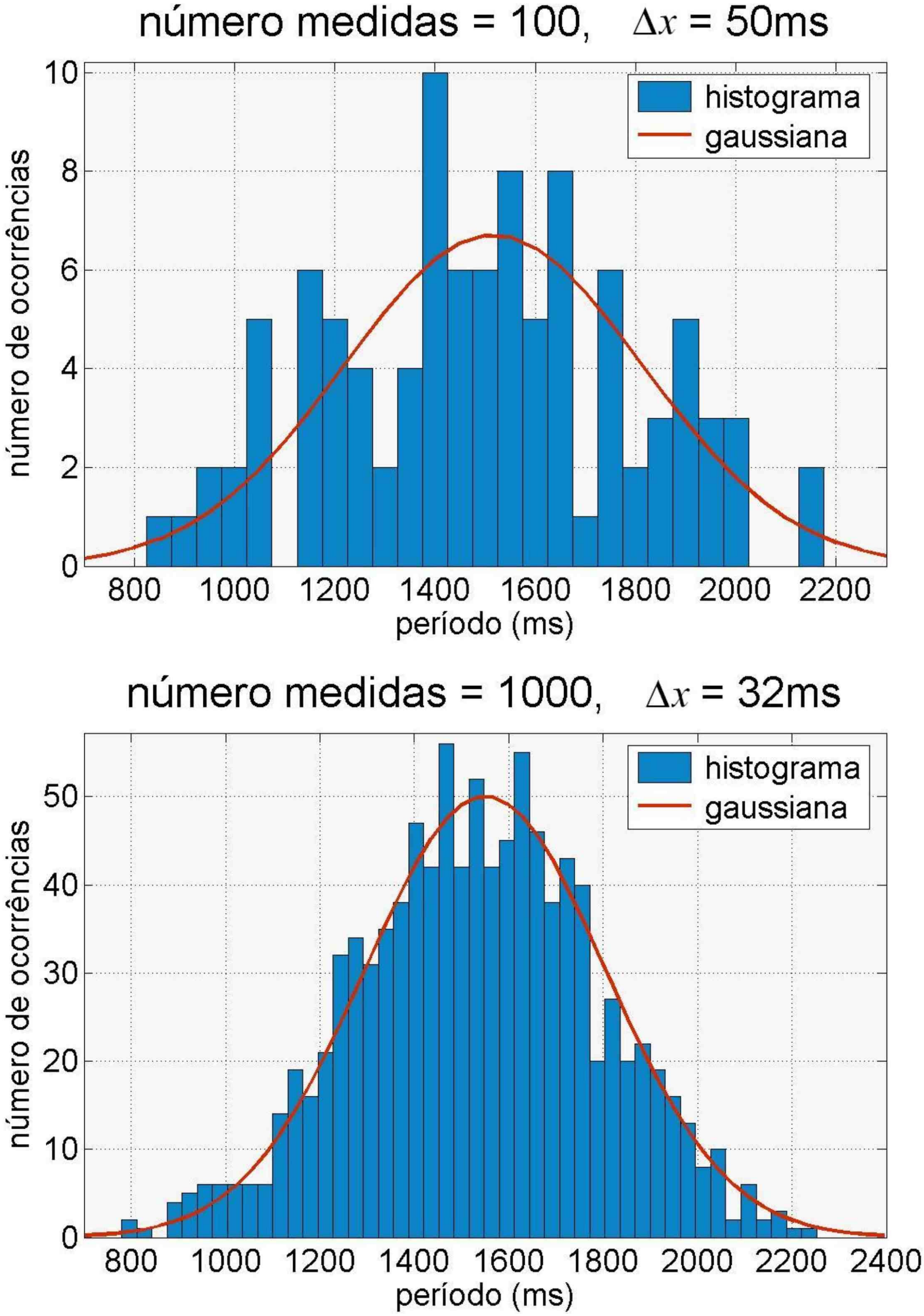

Figura 1: Histogramas das medidas do período de um pêndulo simples de comprimento L = 60 cm. Curvas Gaussianas dadas pela eq. (6).

Caso o histograma fique muito disperso, isto é, poucas ocorrências por canal, aumente a largura dos canais por um fator 2. Por outro lado, caso muitas ocorrências incidam em poucos canais, diminua a largura por um fator 2. Repita esses procedimentos até o histograma ficar o mais similar possível a uma distribuição Gaussiana.

3. Ajuste de curva Gaussiana ao histograma

De acordo com a eq. (1), a probabilidade de uma medida cair num dado canal do histograma de largura Δx na posição x vale $G(x)\Delta x$. Após N medidas, $NG(x)\Delta x$ corresponde ao número esperado de medidas no canal. Em outras palavras,

$$H(x) = N\, G(x)\, \Delta x = \frac{N\,\Delta x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

é a altura esperada da coluna do histograma na posição x.

Exercício: Compare os valores experimentais do período obtido a partir dos histogramas na Figura 1 com o valor teórico $P = 2\pi\sqrt{L/g} = 2\pi\sqrt{0{,}60/9{,}7864} = 1{,}555\,s$.

Resp.: Como as curvas *H(x)*, eq. (6), são fornecidas

$$\sigma = \frac{N\,\Delta x}{H(x_0)\sqrt{2\pi}} \quad .$$

No histograma com N=100 medidas, Δx = 50 ms, x_0 = 1520 ms, e $H(x_0)$ = 6,7. Então,

$$\sigma_{100} = \frac{100\times 50}{6{,}7\sqrt{2\pi}} = 298\,ms \quad , \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{100}}{\sqrt{100}} = 29{,}8\,ms \quad ,$$

e da eq. (4) segue que $P_{exp}(100)$ = **1520 ± 30 ms, ou 1,52 ± 0,03 s**.

No histograma com N=1000 medidas, Δx = 32 ms, x_0 = 1550 ms, e $H(x_0)$ = 50. Então,

$$\sigma_{1000} = \frac{1000\times 32}{50\sqrt{2\pi}} = 255\,ms \quad , \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{1000}}{\sqrt{1000}} = 8\text{ms} \quad ,$$

e portanto, $P_{exp}(1000)$ = **1550 ± 8 ms, ou 1,550 ± 0,008 s**.

Note que, $H(x=\sigma) = 0{,}6\, H(x_0)$, ou seja, a largura da curva Gaussiana a 60% do máximo vale 2σ (o dobro do desvio padrão).