



Universidade de São Paulo (USP), Escola
de Engenharia de Lorena (EEL),
Curso de Engenharia Física



Circuitos Elétricos - teoria e prática (LOM3262)

Prof. Dr. Andy Blanco Rodriguez

**Lorena-SP
2025/2**



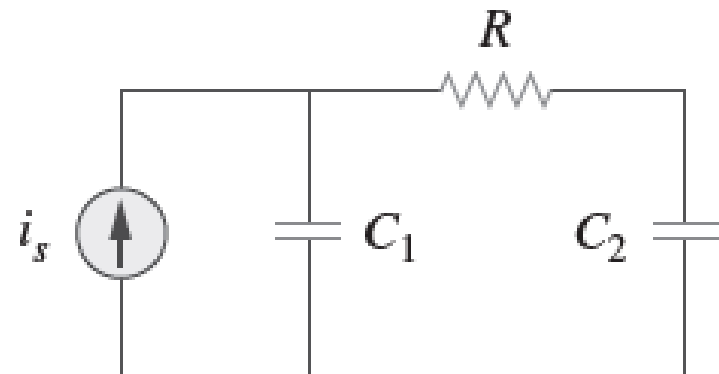
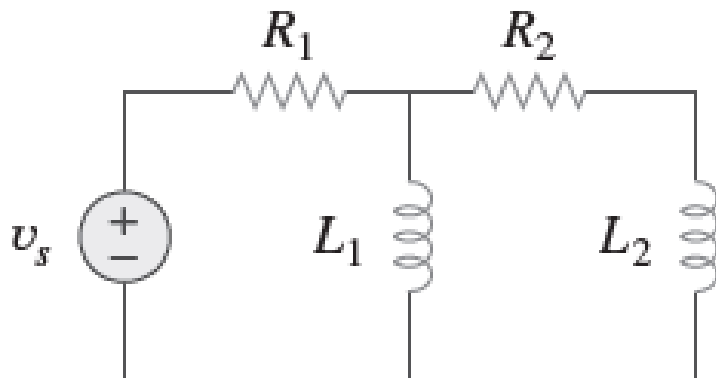
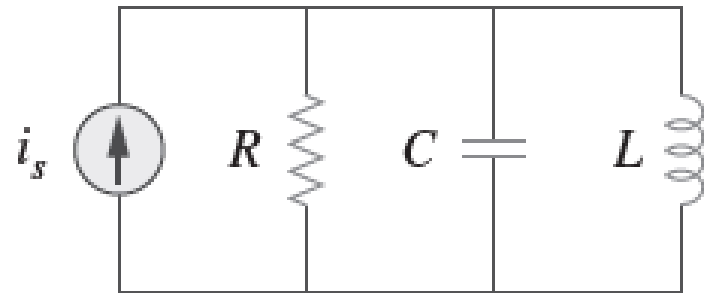
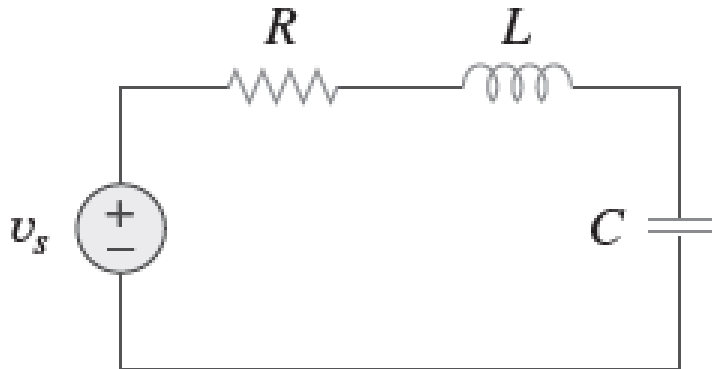
- Circuitos de 2^{da} ordem;
- Circuito RLC série. Resposta natural;
- Circuito RLC série. Resposta ao degrau;
- Circuito RLC paralelo. Resposta natural;
- Circuito RLC paralelo. Resposta ao degrau.



Circuitos de 2^{da} ordem



Circuitos de 2^{da} ordem





Circuitos de 2^{da} ordem

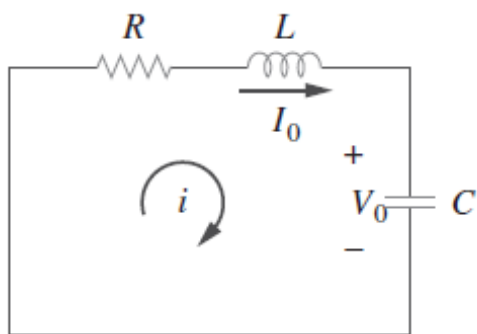
Um **circuito de segunda ordem** é caracterizado por uma **equação diferencial de segunda ordem**. Este circuito é formado por **resistores e o equivalente de dois elementos de armazenamento**.



Circuito RLC série. Resposta natural

Circuito RLC série

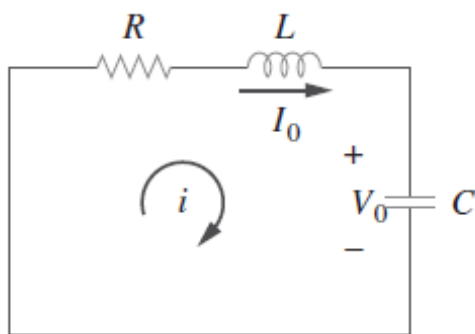
Etapas de carga e descarga do circuito RLC



O circuito está sendo estimulado pela energia previamente armazenada em C e L. Isto é: V_0 e I_0

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



O circuito está sendo estimulado pela energia previamente armazenada em C e L. Isto é: V_0 e I_0
Então, para $t = 0$:

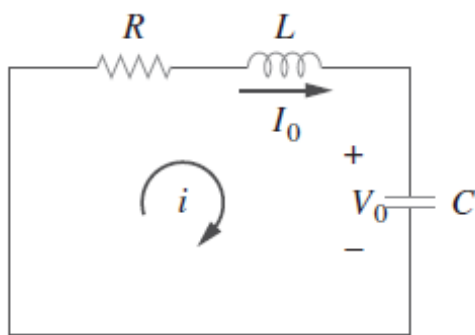
$$\text{LKT:} \quad v_R + v_L + v_C = 0$$

$$\text{Lei de Ohm em R: } v_R = iR$$

$$\text{Relação I-V em L: } v_L = L \frac{di}{dt}$$

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



O circuito está sendo estimulado pela energia previamente armazenada em C e L. Isto é: V_0 e I_0
Então, para $t = 0$:

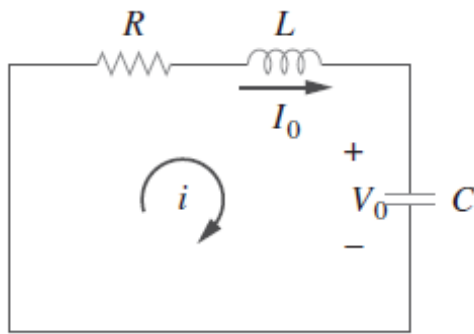
$$\text{LKT:} \quad v_R + v_L + v_C = 0$$

Lei de Ohm em R: $v_R = iR$ Relação I-V em L: $v_L = L \frac{di}{dt}$

Além disso: $i(0) = I_0$ e $v_C(0) = v(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt = V_0$

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



O circuito está sendo estimulado pela energia previamente armazenada em C e L. Isto é: V_0 e I_0
Então, para $t = 0$:

$$\text{LKT:} \quad v_R + v_L + v_C = 0$$

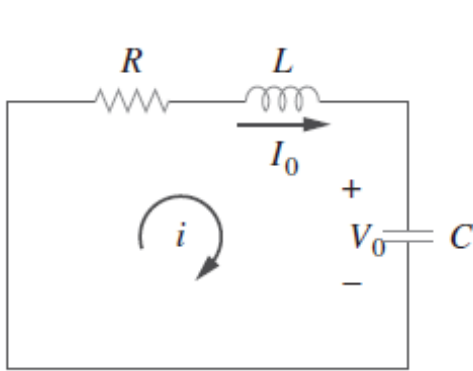
Lei de Ohm em R: $v_R = iR$ Relação I-V em L: $v_L = L \frac{di}{dt}$

Além disso: $i(0) = I_0$ e $v_C(0) = v(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt = V_0$

Portanto: $iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt = 0$

Circuito RLC série

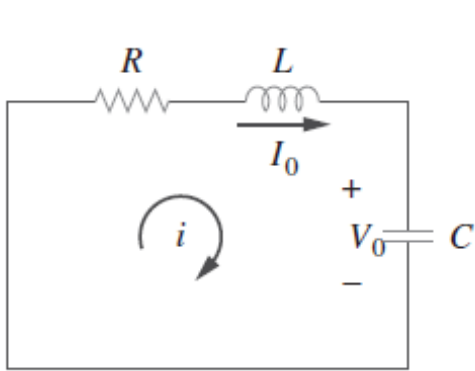
Etapas de carga e descarga do circuito RLC



$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt = 0$$

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



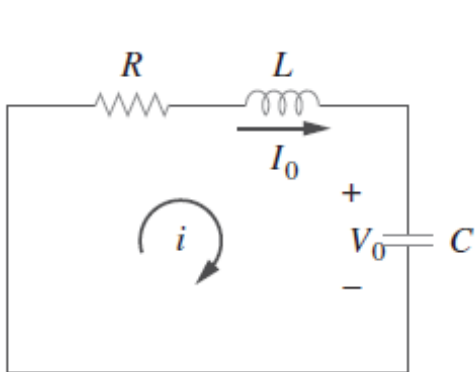
$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt = 0$$

Derivando em relação a t, temos:

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0$$

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt = 0$$

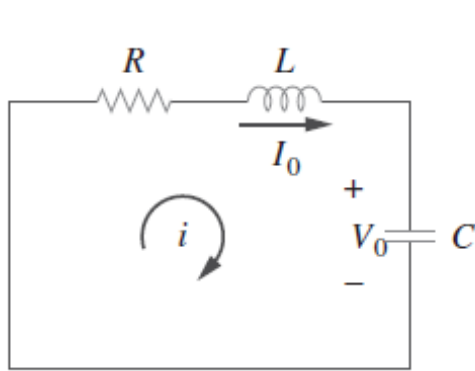
Derivando em relação a t, temos:

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0 \quad \text{Portanto:}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt = 0$$

Derivando em relação a t, temos:

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0 \quad \text{Portanto:}$$

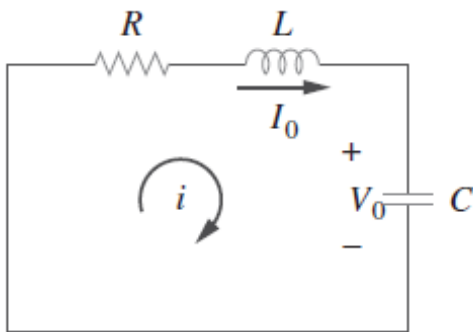
Resposta natural do circuito RLC série, com C e L inicialmente carregados:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

EDO de 2^{da} ordem

Circuito RLC série

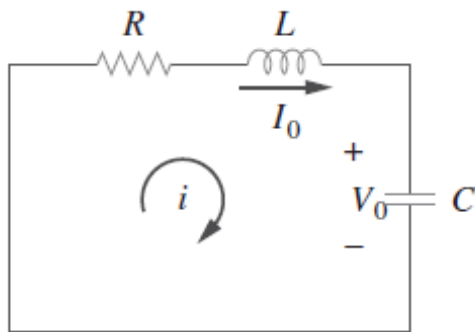
Etapas de carga e descarga do circuito RLC



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

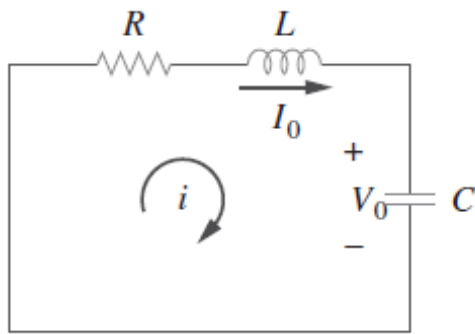


$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Para resolver essa EDO são necessárias **2 condições iniciais**: o valor de i e sua **1^{ra} derivada**, ou os valores iniciais de alguma i e v :

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

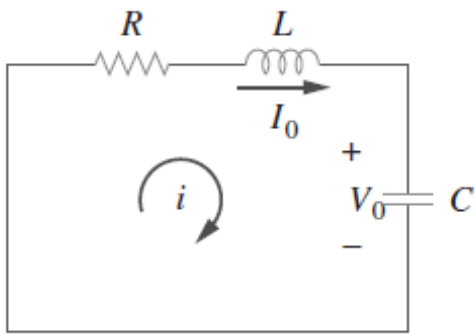
Para resolver essa EDO são necessárias **2 condições iniciais**: o valor de i e sua **1^{ra} derivada**, ou os valores iniciais de alguma i e v :

O valor inicial de i é: $i(0) = I_0$

E lembrando que: $iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt = 0$

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Para resolver essa EDO são necessárias **2 condições iniciais**: o valor de i e sua **1^{ra} derivada**, ou os valores iniciais de alguma i e v :

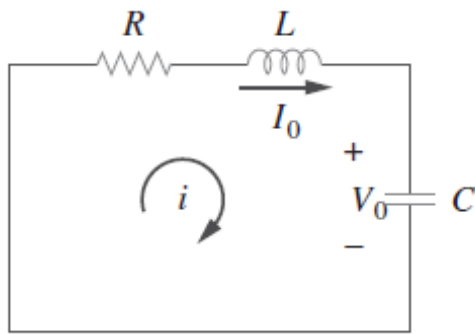
O valor inicial de i é: $i(0) = I_0$

E lembrando que: $iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt = 0$

temos: $Ri(0) + L \frac{di(0)}{dt} + V_0 = 0$ Portanto: $\frac{di(0)}{dt} = -\frac{1}{L} (RI_0 + V_0)$

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Para resolver essa EDO são necessárias **2 condições iniciais**: o valor de i e sua **1^{ra} derivada**, ou os valores iniciais de alguma i e v :

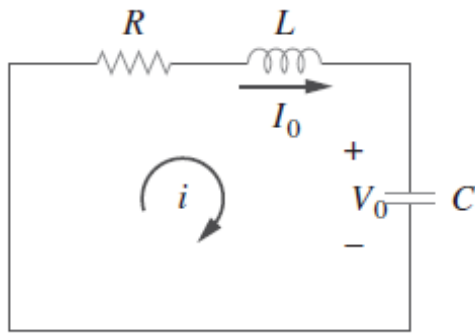
O valor inicial de i é: $i(0) = I_0$

E lembrando que: $iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt = 0$

temos: $Ri(0) + L \frac{di(0)}{dt} + V_0 = 0$ Portanto: $\frac{di(0)}{dt} = -\frac{1}{L} (RI_0 + V_0)$

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

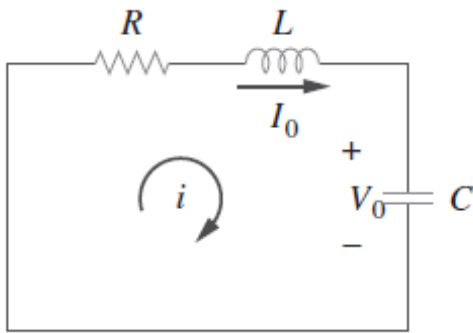


Tendo as 2 condições iniciais, é possível resolver a EDO de 2^{da} ordem do circuito. Neste caso sabemos que a solução é na forma exponencial:

$$i(t) = ke^{st} \quad i(t): \text{função corrente na malha no tempo,} \\ k \text{ e } S : \text{parâmetros ajustáveis.}$$

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



Tendo as 2 condições iniciais, é possível resolver a EDO de 2^{da} ordem do circuito. Neste caso sabemos que a solução é na forma exponencial:

$i(t) = ke^{st}$ $i(t)$: função corrente na malha no tempo,
 k e S : parâmetros ajustáveis.

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

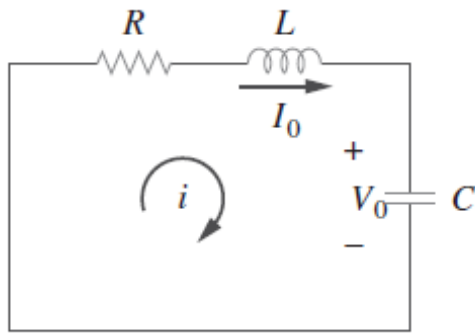
$$\frac{d^2(ke^{st})}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d(ke^{st})}{dt} + \frac{1}{LC} (ke^{st}) = 0$$

$$ks^2e^{st} + \frac{kR}{L} se^{st} + \frac{k}{LC} e^{st} = 0$$

$$ke^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right) = 0$$

Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



Tendo as 2 condições iniciais, é possível resolver a EDO de 2^{da} ordem do circuito. Neste caso sabemos que a solução é na forma exponencial:

$i(t) = ke^{st}$ $i(t)$: função corrente na malha no tempo,
 k e S : parâmetros ajustáveis.

Esta equação quadrática é conhecida como Equação Característica da Equação Diferencial, uma vez que as raízes da equação ditam as características básicas da corrente i :

$$ke^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

Equação Característica: $ke^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

Equação Característica: $ke^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0$

Calculando as raízes: $a = 1, \quad b = \frac{R}{L}, \quad c = \frac{1}{LC}$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

Equação Característica: $ke^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0$

Calculando as raízes: $a = 1$, $b = \frac{R}{L}$, $c = \frac{1}{LC}$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

$$s_{1,2} \left(\frac{L}{L} \right) = \frac{-R \pm L \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{2^2} \left[\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} \right]}$$

Raízes da Equação Característica:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

Equação Característica: $ke^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0$

Cujas duas raízes são:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

Equação Característica: $ke^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0$

Cujas duas raízes são:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

ou:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

Equação Característica: $ke^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0$

Cujas duas raízes são:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

ou:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Onde:

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

Equação Característica: $ke^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0$

Cujas duas raízes são:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

ou:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Onde:

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

[rad/s]. Dcaimento exponencial (ou fator de amortecimento). Define a taxa na qual a resposta é amortecida. As perdas de energia se devem a presença da resistência R.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

[rad/s]. Frequência ressonante (ou frequência natural não amortecida). Define a taxa de transferência de energia entre os elementos de armazenamento (L e C).



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

Os **2 valores de s (s_1 e s_2)** indicam que há **2 soluções possíveis para i** , cada uma na **forma exponencial**. Isto é:

$$i_1 = k_1 e^{s_1 t} \quad \text{e} \quad i_2 = k_2 e^{s_2 t}$$

Como a EDO de 2^{da} ordem do circuito **RLC série é linear**, a **solução total** é combinação linear das soluções individuais:

$$i(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

Onde as **constantes k_1 e k_2** são determinadas a partir dos **valores iniciais $i(0)$ e $di(0)/dt$** .



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

A partir das equações das raízes da equação característica:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

pode-se inferir que **existem 3 tipos de soluções:**



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

A partir das equações das raízes da equação característica:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

pode-se inferir que **existem 3 tipos de soluções:**

1) Se $\alpha > \omega_0$ **amortecimento supercrítico**, com duas raízes reais, distintas e negativas;

2) Se $\alpha = \omega_0$ **amortecimento crítico**, com duas raízes reais e iguais;

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- 1) Se $\alpha > \omega_0$ **amortecimento supercrítico**, com duas raízes (chamadas frequências naturais) reais, distintas e negativas.



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

1) Se $\alpha > \omega_0$ **amortecimento supercrítico**, com duas raízes (chamadas frequências naturais) reais, distintas e negativas.

Como $\alpha > \omega_0$ e $\alpha = \frac{R}{2L}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Então $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ logo, ocorre quando: $C > \frac{4L}{R^2}$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

1) Se $\alpha > \omega_0$ **amortecimento supercrítico**, com duas raízes (chamadas frequências naturais) reais, distintas e negativas.

Como $\alpha > \omega_0$ e $\alpha = \frac{R}{2L}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Então $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$

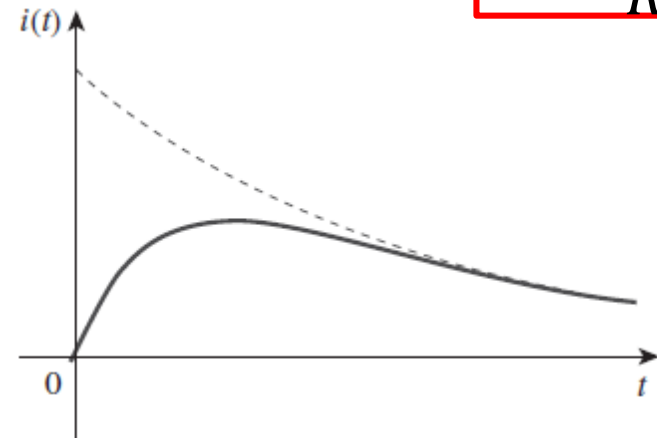
logo, ocorre quando:

$$C > \frac{4L}{R^2}$$

Resposta natural:

$$i(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

A corrente decai exponencialmente a zero a medida que t aumenta.





Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

2) Se $\alpha = \omega_0$ **amortecimento crítico**, com duas raízes
(chamadas frequências naturais) reais e iguais.



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

2) Se $\alpha = \omega_0$ **amortecimento crítico**, com duas raízes (chamadas frequências naturais) reais e iguais.

Como $\alpha = \omega_0$ e $\alpha = \frac{R}{2L}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Então $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ **logo, ocorre quando:**

$$C = \frac{4L}{R^2}$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

2) Se $\alpha = \omega_0$ **amortecimento crítico**, com duas raízes (chamadas frequências naturais) reais e iguais.

Como $\alpha = \omega_0$ e $\alpha = \frac{R}{2L}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Então $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$

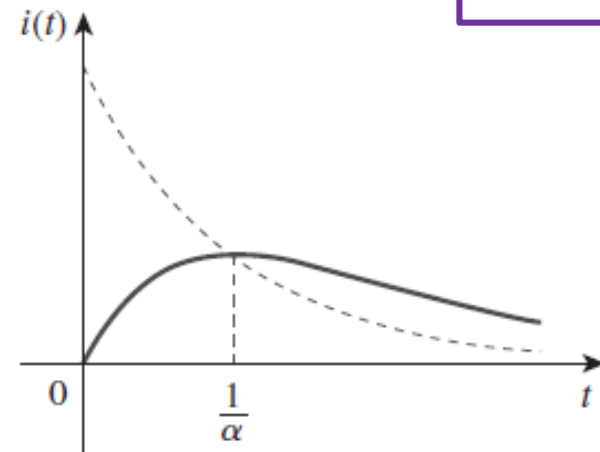
logo, ocorre quando:

$$C = \frac{4L}{R^2}$$

Resposta natural:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (k_2 + k_1 t)$$

A corrente decai exponencialmente a zero a medida que t aumenta.





Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$C < \frac{4L}{R^2}$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$C < \frac{4L}{R^2}$$

como $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ e $\alpha < \omega_0$ então:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} , \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$C < \frac{4L}{R^2}$$

como $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ e $\alpha < \omega_0$ então:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} , s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} \quad \text{portanto:}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\text{sendo: } \omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$C < \frac{4L}{R^2}$$

como $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ e $\alpha < \omega_0$ então:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} , s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} \quad \text{portanto:}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\text{sendo: } \omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$

ω_d é a **frequência de amortecimento** (ou **frequência natural amortecida**). Tanto ω_d quanto ω_0 são chamadas de frequências naturais.



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$C < \frac{4L}{R^2}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\text{sendo: } \omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$C < \frac{4L}{R^2}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\text{sendo: } \omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$

Resposta natural:

$$i(t) = k_1 e^{-(\alpha - j\omega_d)t} + k_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t}$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$C < \frac{4L}{R^2}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\text{sendo: } \omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$

Resposta natural:

$$i(t) = k_1 e^{-(\alpha - j\omega_d)t} + k_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t}$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} (k_1 e^{j\omega_d t} + k_2 e^{-j\omega_d t})$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$C < \frac{4L}{R^2}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\text{sendo: } \omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$

Resposta natural:

$$i(t) = k_1 e^{-(\alpha - j\omega_d)t} + k_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t}$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} (k_1 e^{j\omega_d t} + k_2 e^{-j\omega_d t})$$

Usando as identidades de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

e

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \sin(\theta)$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$C < \frac{4L}{R^2}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\text{sendo: } \omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$

Resposta natural:

$$i(t) = k_1 e^{-(\alpha - j\omega_d)t} + k_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t}$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} (k_1 e^{j\omega_d t} + k_2 e^{-j\omega_d t})$$

Usando as identidades de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

e

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \sin(\theta)$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} [k_1 (\cos(\omega_d t) + j \sin(\omega_d t)) + k_2 (\cos(\omega_d t) - j \sin(\omega_d t))]$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} [(k_1 + k_2) \cos(\omega_d t) + j(k_1 - k_2) \sin(\omega_d t)]$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$C < \frac{4L}{R^2}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\text{sendo: } \omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$

Resposta natural:

$$i(t) = k_1 e^{-(\alpha - j\omega_d)t} + k_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t}$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} (k_1 e^{j\omega_d t} + k_2 e^{-j\omega_d t})$$

Usando as identidades de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \sin(\theta)$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} [k_1 (\cos(\omega_d t) + j \sin(\omega_d t)) + k_2 (\cos(\omega_d t) - j \sin(\omega_d t))]$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} [(k_1 + k_2) \cos(\omega_d t) + j(k_1 - k_2) \sin(\omega_d t)]$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$C < \frac{4L}{R^2}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\text{sendo: } \omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$

Resposta natural:

$$i(t) = k_1 e^{-(\alpha - j\omega_d)t} + k_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t}$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} (k_1 e^{j\omega_d t} + k_2 e^{-j\omega_d t})$$

ou

$$i(t) = e^{-\alpha t} [m_1 \cos(\omega_d t) + m_2 \sin(\omega_d t)]$$

$$m_1 = k_1 + k_2$$

$$m_2 = j(k_1 - k_2)$$



Circuito RLC série

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

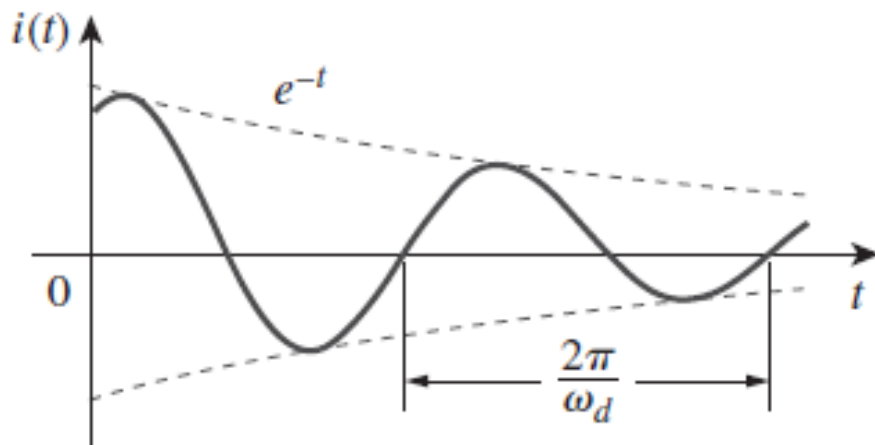
$$C < \frac{4L}{R^2}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$m_1 = k_1 + k_2$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} [m_1 \cos(\omega_d t) + m_2 \sin(\omega_d t)] \quad m_2 = j(k_1 - k_2)$$

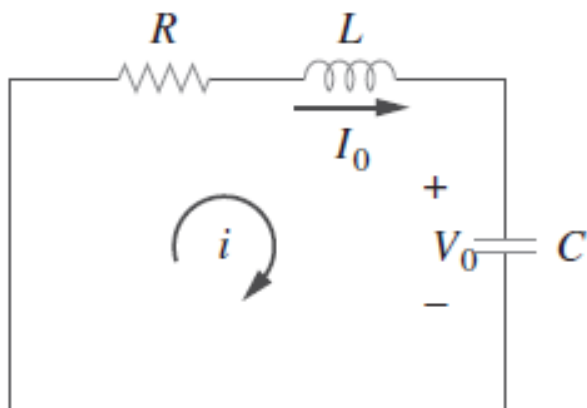


A resposta é **amortecida**
exponencialmente e **oscilatória**.

Exemplo

Circuito RLC série

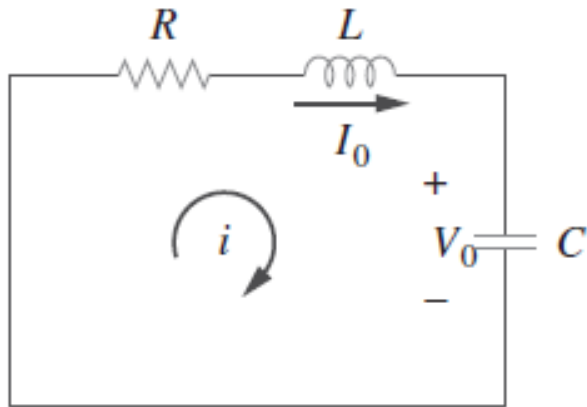
Exemplo de resposta natural



Na Figura abaixo, $R = 10 \, \Omega$, $L = 5 \, \text{H}$ e $C = 2 \, \text{mF}$. Calcule α , ω_0 , s_1 e s_2 . Qual é o tipo de resposta natural que o circuito apresentará?

Circuito RLC série

Exemplo de resposta natural



Na Figura abaixo, $R = 10 \, \Omega$, $L = 5 \, \text{H}$ e $C = 2 \, \text{mF}$. Calcule α , ω_0 , s_1 e s_2 . Qual é o tipo de resposta natural que o circuito apresentará?

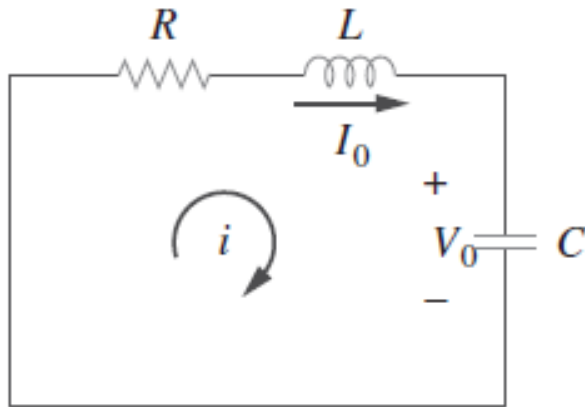
$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{10}{2 \cdot 5} \quad \boxed{\alpha = 1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2}}} = \frac{1}{10^{-1}}$$

$$\boxed{\omega_0 = 10}$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta natural



Na Figura abaixo, $R = 10 \, \Omega$, $L = 5 \, \text{H}$ e $C = 2 \, \text{mF}$. Calcule α , ω_0 , s_1 e s_2 . Qual é o tipo de resposta natural que o circuito apresentará?

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{10}{2 \cdot 5} \quad \boxed{\alpha = 1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2}}} = \frac{1}{10^{-1}}$$

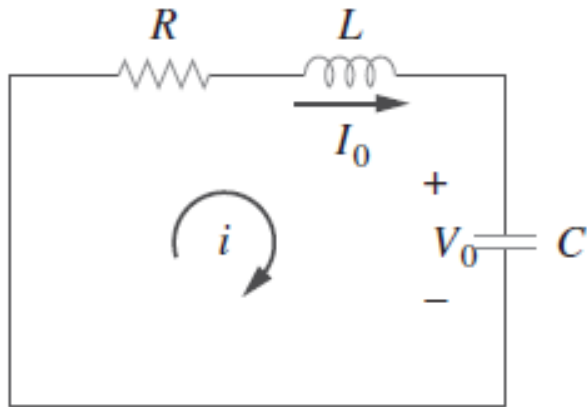
$$\boxed{\omega_0 = 10}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1 \pm \sqrt{1 - 100} = -1 \pm \sqrt{-99}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -1 \pm j9,95}$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta natural



Na Figura abaixo, $R = 10 \, \Omega$, $L = 5 \, \text{H}$ e $C = 2 \, \text{mF}$. Calcule α , ω_0 , s_1 e s_2 . Qual é o tipo de resposta natural que o circuito apresentará?

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{10}{2 \cdot 5} \quad \boxed{\alpha = 1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2}}} = \frac{1}{10^{-1}}$$

$$\boxed{\omega_0 = 10}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1 \pm \sqrt{1 - 100} = -1 \pm \sqrt{-99}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -1 \pm j9,95}$$

Como $\alpha < \omega_0$ a resposta é **subamortecida exponencialmente** e **oscilatória**. As raízes são complexas.



Circuito RLC série.

Resposta ao degrau unitário



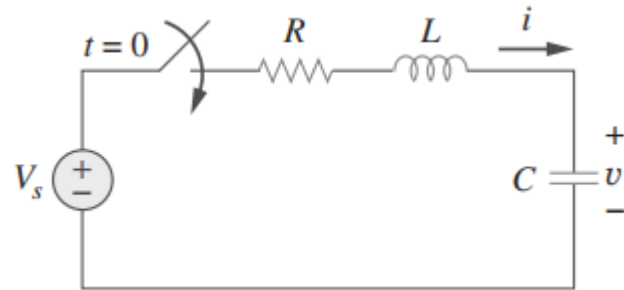
Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



Circuito RLC série

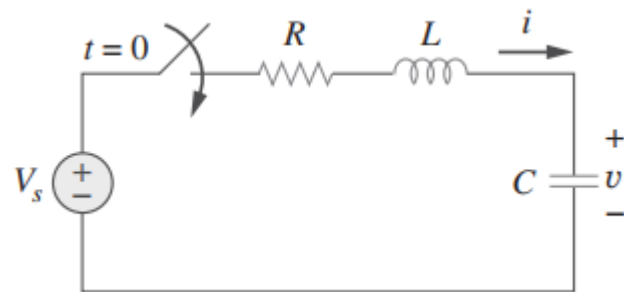
Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



Considerando uma fonte de tensão CC, e tanto L como C descarregados, para $t > 0$, temos:

Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



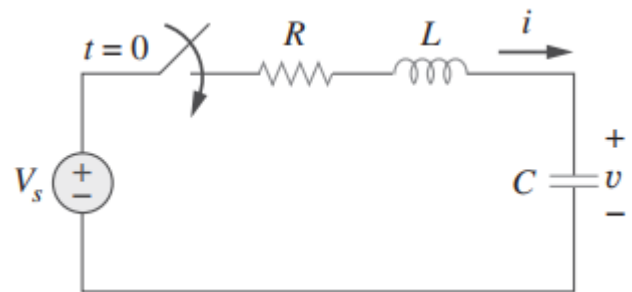
Considerando uma fonte de tensão CC, e tanto L como C descarregados, para $t > 0$, temos:

$$\text{LKT: } -V_S u(t) + v_R + v_L + v_C = 0$$

$$\text{Lei de Ohm em R: } v_R = i_L R = i_C R$$

Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



Considerando uma fonte de tensão CC, e tanto L como C descarregados, para $t > 0$, temos:

$$\text{LKT: } -V_S u(t) + v_R + v_L + v_C = 0$$

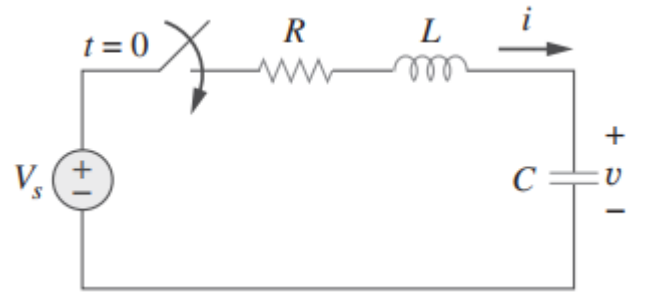
$$\text{Lei de Ohm em R: } v_R = i_L R = i_C R$$

$$\text{Relação I-V em L: } v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$\text{Para } t > 0 \text{ (} u(t)=1 \text{): } -V_S + i_L R + L \frac{di_L}{dt} + v_C = 0 \quad , \text{ considerando: } i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



Considerando uma fonte de tensão CC, e tanto L como C descarregados, para $t > 0$, temos:

$$\text{LKT: } -V_S u(t) + v_R + v_L + v_C = 0$$

$$\text{Lei de Ohm em R: } v_R = i_L R = i_C R$$

$$\text{Relação I-V em L: } v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

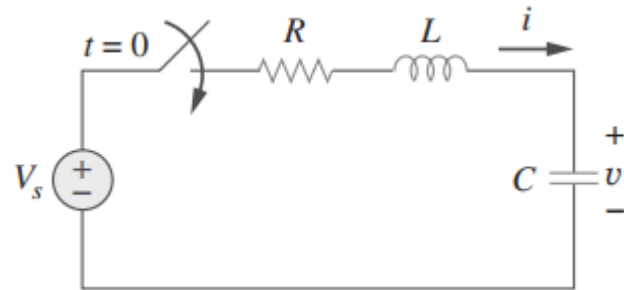
$$\text{Para } t > 0 \text{ (} u(t)=1 \text{): } -V_S + i_L R + L \frac{di_L}{dt} + v_C = 0 \quad , \text{ considerando: } i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$-V_S + \left(C \frac{dv_C}{dt} \right) R + L \frac{d \left(C \frac{dv_C}{dt} \right)}{dt} + v_C = 0 \quad -V_S + RC \frac{dv_C}{dt} + LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C = 0$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_S}{LC} = 0$$

Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC

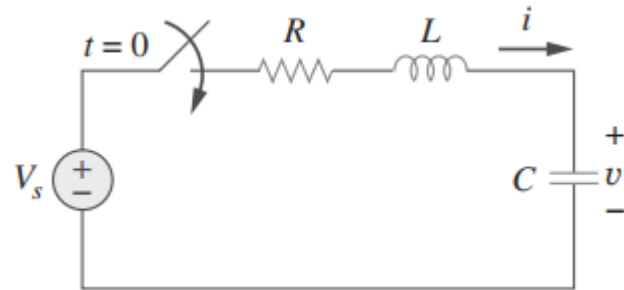


$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s}{LC} = 0$$

Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s}{LC} = 0$$

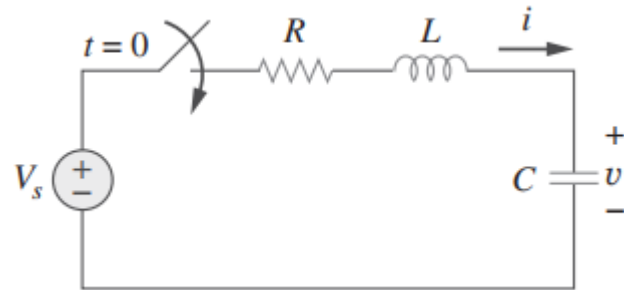
Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Resposta natural do circuito RLC, com C e L inicialmente carregados.

Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s}{LC} = 0$$

Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

Têm a mesma forma

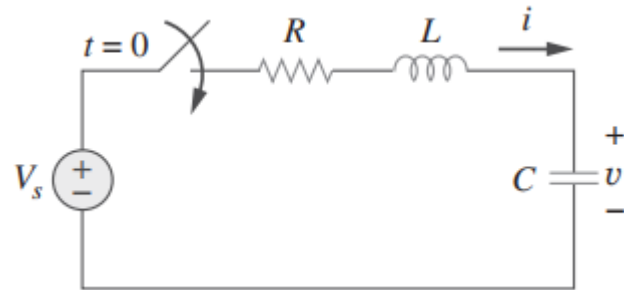


$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Resposta natural do circuito RLC, com C e L inicialmente carregados.

Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s}{LC} = 0$$

Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

Têm a mesma forma

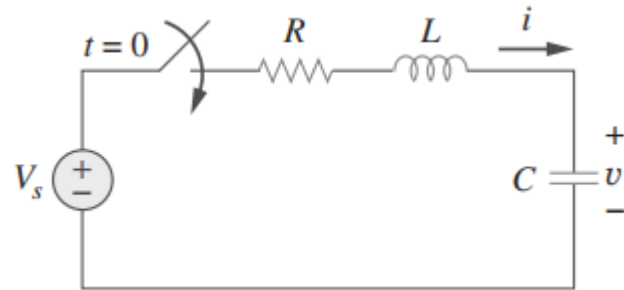
$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Resposta natural do circuito RLC, com C e L inicialmente carregados.

Logo, a equação característica para o circuito RLC em série não é afetada pela presença da fonte CC.

Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s}{LC} = 0$$

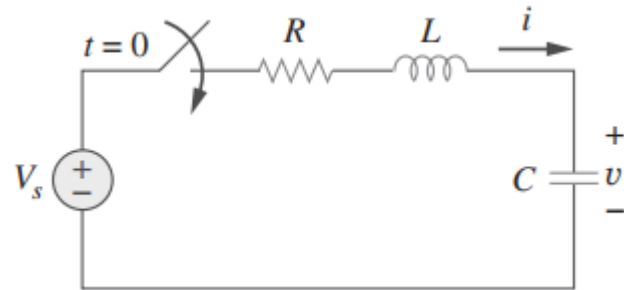
Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

A **solução** para essa equação possui duas componentes: **resposta transiente** $v_t(t)$ e **resposta de estado estável** $v_{ss}(t)$, ou seja:

$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t)$$

Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s}{LC} = 0$$

Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

A **solução** para essa equação possui duas componentes: **resposta transiente** $v_t(t)$ e **resposta de estado estável** $v_{ss}(t)$, ou seja:

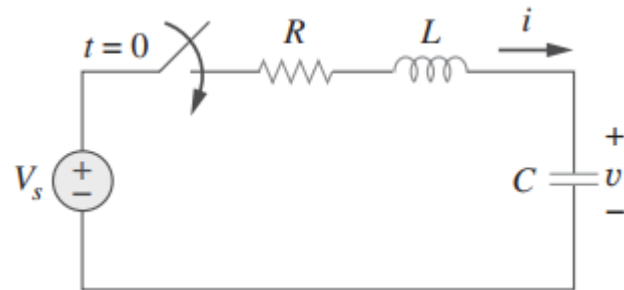
$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t)$$

Mesma solução que a resposta natural

$$\left\{ \begin{array}{ll} v(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} & \text{Amortecimento supercrítico} \\ v(t) = e^{-\alpha t} (k_2 + k_1 t) & \text{Amortecimento crítico} \\ v(t) = e^{-\alpha t} [m_1 \cos(\omega_d t) + m_2 \sin(\omega_d t)] & \text{Subamortecido} \end{array} \right.$$

Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s}{LC} = 0$$

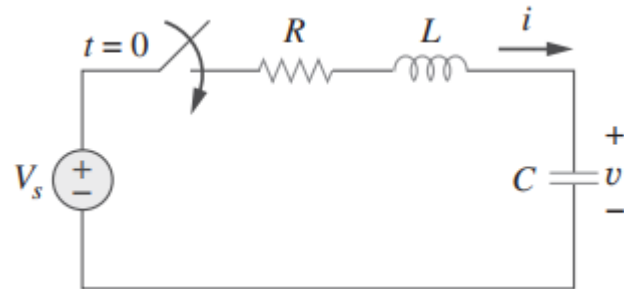
Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

A **solução** para essa equação possui duas componentes: **resposta transiente** $v_t(t)$ e **resposta de estado estável** $v_{ss}(t)$, ou seja:

$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t) \quad \longrightarrow \quad v_{ss}(t) = v(\infty) = V_s$$

Circuito RLC série

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s}{LC} = 0$$

Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

Portanto, a **solução completa ao degrau unitário do circuito RLC série** é:

$$v(t) = V_s + k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad \text{Amortecimento supercrítico}$$

$$v(t) = V_s + e^{-\alpha t} (k_2 + k_1 t) \quad \text{Amortecimento crítico}$$

$$v(t) = V_s + e^{-\alpha t} [m_1 \cos(\omega_d t) + m_2 \sin(\omega_d t)] \quad \text{Subamortecido}$$

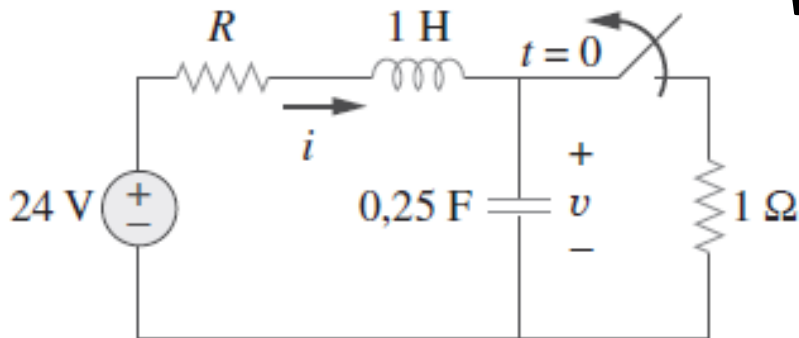


Exemplo

Circuito RLC série

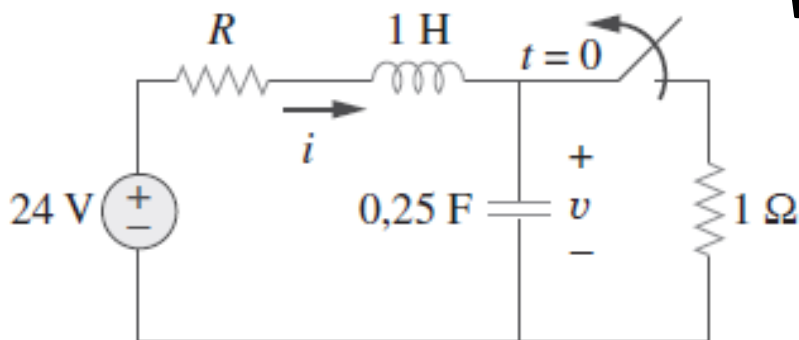
Exemplo de resposta ao degrau

Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \, \Omega$.



Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau

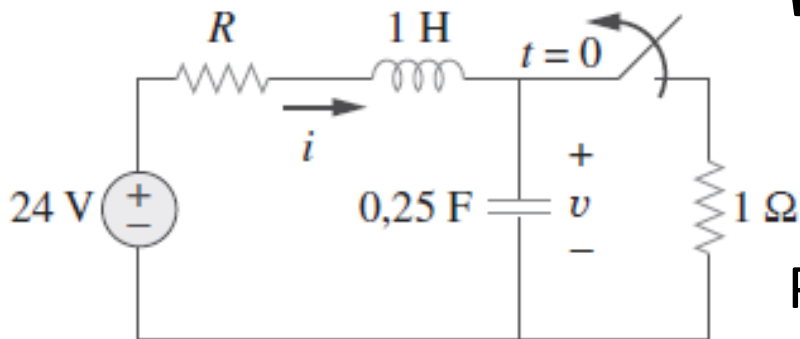


Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

1 – Determinar as condições iniciais $i(0)$ e $v(0)$, etc.

Circuito RLC série

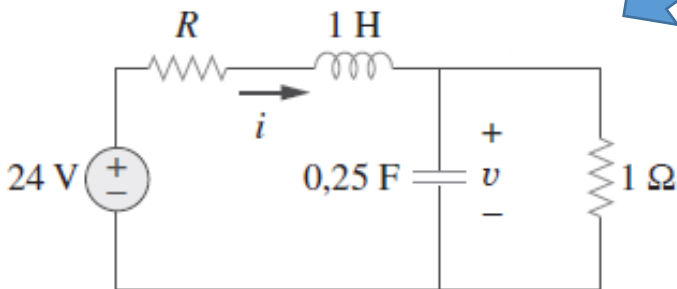
Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

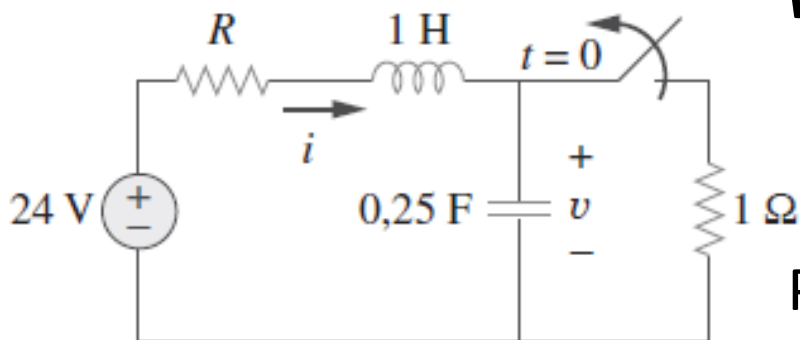
1 – Determinar as condições iniciais $i(0)$ e $v(0)$, etc.

Para $t < 0$, a chave se encontra fechada há um longo período.



Circuito RLC série

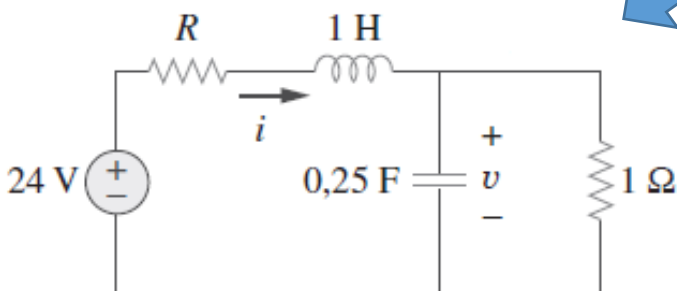
Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

1 – Determinar as condições iniciais $i(0)$ e $v(0)$, etc.

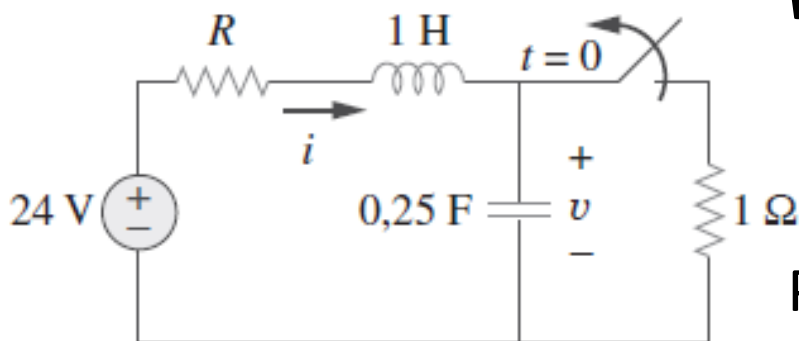
Para $t < 0$, a chave se encontra fechada há um longo período.



Que isso significa em termos do comportamento de C e L?

Circuito RLC série

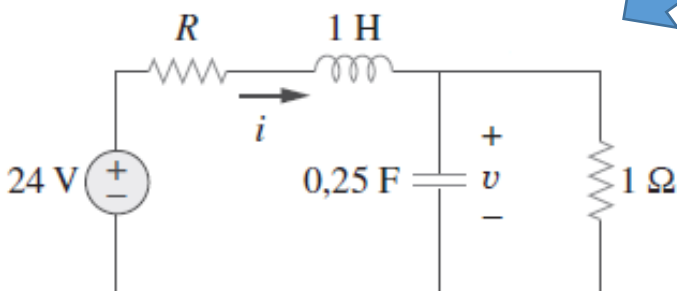
Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5\Omega$.

1 – Determinar as condições iniciais $i(0)$ e $v(0)$, etc.

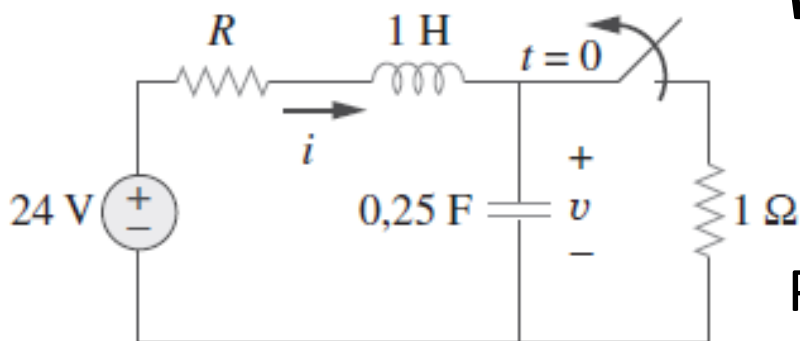
Para $t < 0$, a chave se encontra fechada há um longo período.



O **capacitor** se comporta como um **circuito aberto**, e o **indutor** atua como um **curto-circuito**.

Circuito RLC série

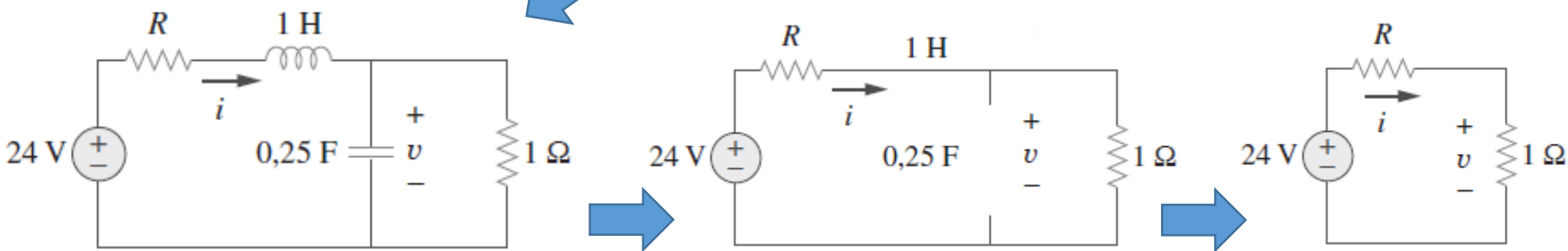
Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

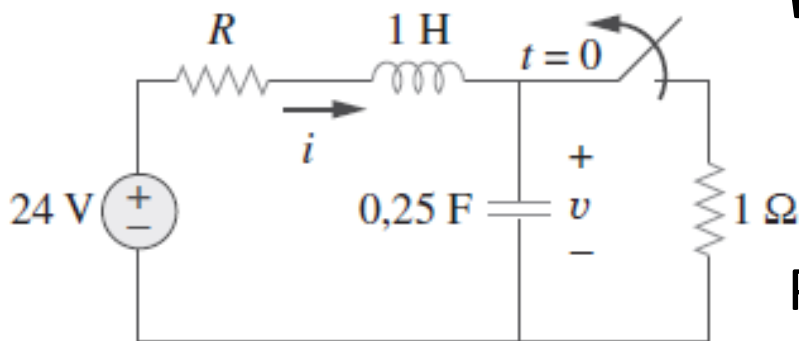
1 – Determinar as condições iniciais $i(0)$ e $v(0)$, etc.

Para $t < 0$, a chave se encontra fechada há um longo período.



Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

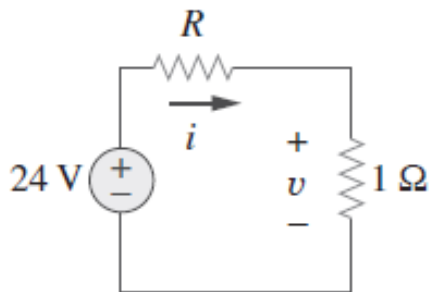
1 – Determinar as condições iniciais $i(0)$ e $v(0)$, etc.

Para $t < 0$, a chave se encontra fechada há um longo período.

Corrente inicial através do indutor:

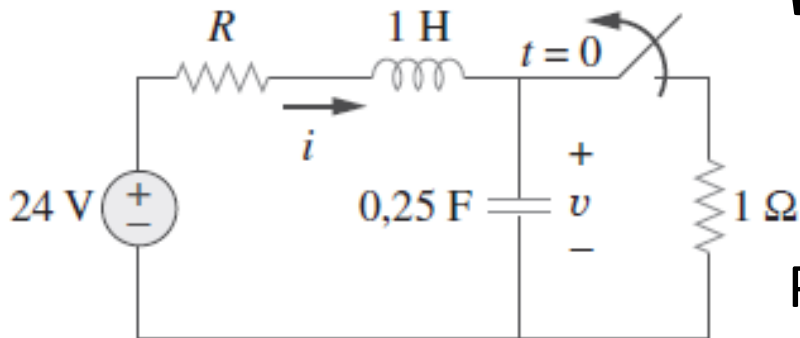
Lei de ohm: $i(0^-) = i(0^+) = \frac{24 V}{5 \Omega + 1 \Omega}$

$i(0) = 4A$



Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

1 – Determinar as condições iniciais $i(0)$ e $v(0)$, etc.

Para $t < 0$, a chave se encontra fechada há um longo período.

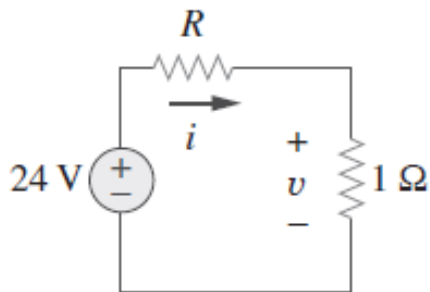
Corrente inicial através do indutor:

Lei de ohm: $i(0^-) = i(0^+) = \frac{24 V}{5 \Omega + 1 \Omega}$ $i(0) = 4A$

Tensão inicial através do capacitor:

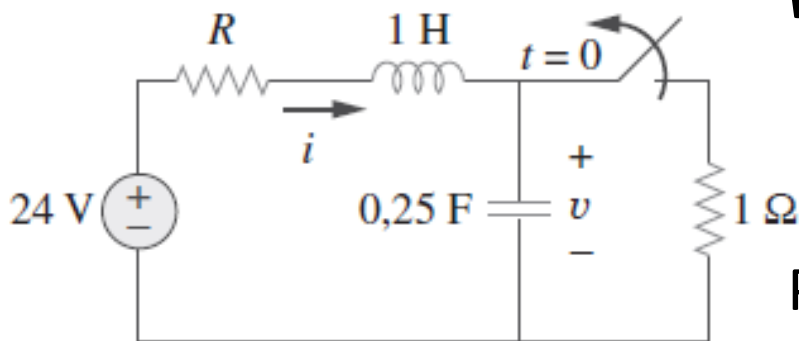
Esta é igual à tensão no resistor de 1Ω ; ou seja:

Lei de ohm: $v(0^-) = v(0^+) = 1 \Omega \cdot i(0)$ $v(0) = 4V$



Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5\ \Omega$.

1 – Determinar as condições iniciais $i(0)$ e $v(0)$, etc.

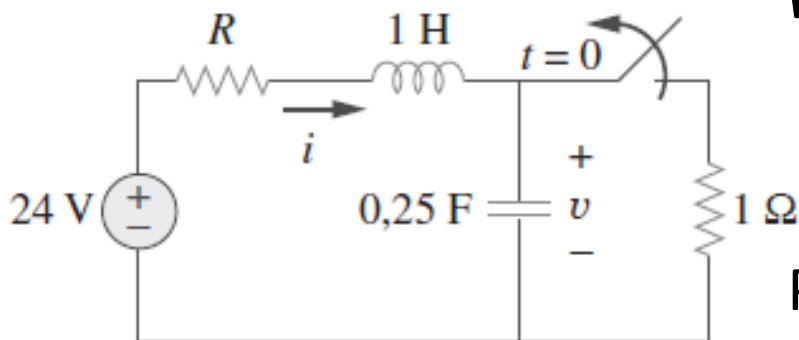
Para $t < 0$:

$$i(0) = 4A$$

$$v(0) = 4V$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau



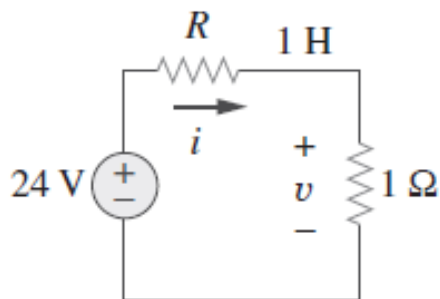
Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

1 – Determinar as condições iniciais $i(0)$ e $v(0)$, etc.

Para $t < 0$: $i(0) = 4A$ $v(0) = 4V$

A corrente em L não pode mudar bruscamente: $i(0^-) = i(0^+)$

Como L e C estão em série: $i_L = i_C = i$

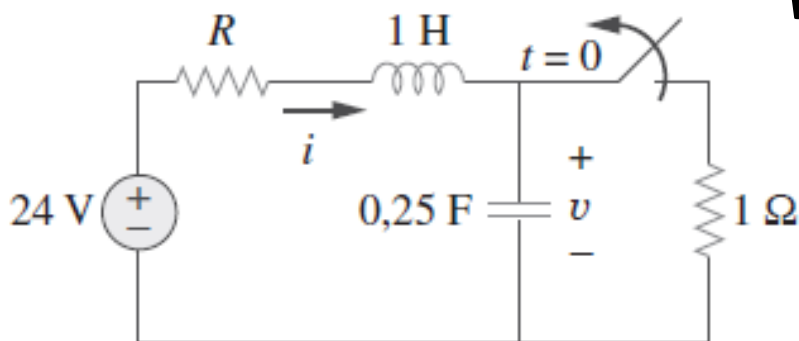


$$i(0) = C \frac{dv(0)}{dt} \quad 4 = 0,25 \frac{dv(0)}{dt} \quad \frac{dv(0)}{dt} = \frac{4}{0,25}$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = 16$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau

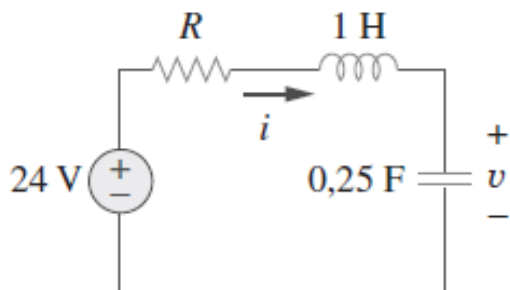


Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

2 – Obter as raízes da Eq característica e definir o tipo de amortecimento.

Para $t > 0$:

A chave está aberta, portanto $R = 1 \Omega$ está desconectado

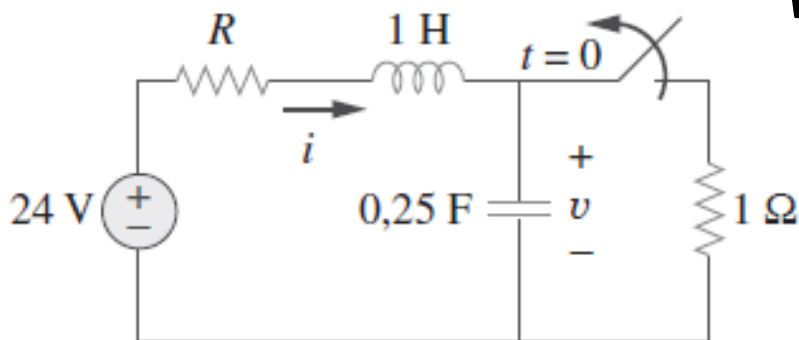


$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{5}{2 \cdot 1} \quad \boxed{\alpha = 2,5}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 0,25}} = \frac{1}{0,5} \quad \boxed{\omega_0 = 2}$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau

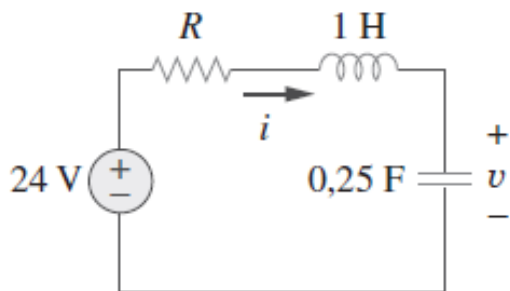


Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

2 – Obter as raízes da Eq característica e definir o tipo de amortecimento.

Para $t > 0$:

A chave está aberta, portanto $R = 1 \Omega$ está desconectado



$$\alpha = 2,5$$

$$\omega_0 = 2$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -2,5 \pm \sqrt{6,25 - 4} = -2,5 \pm \sqrt{2,25}$$

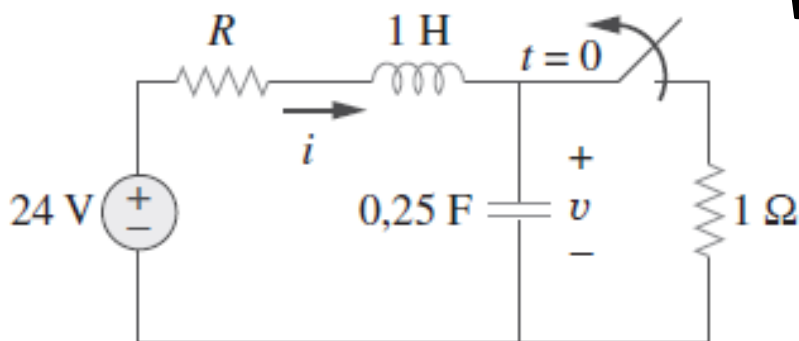
$$s_1 = -1$$

$$s_2 = -4$$

Como $\alpha > \omega_0$ a resposta natural possui **amortecimento supercrítico**. As raízes são reais e negativas.

Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau

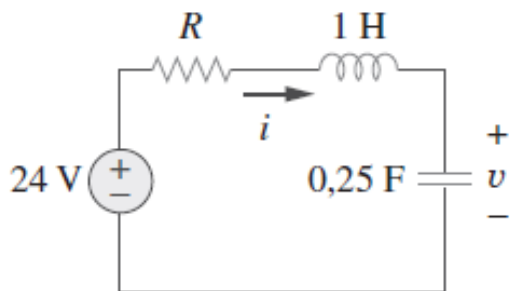


Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

2 – Obter as raízes da Eq característica e definir o tipo de amortecimento.

Para $t > 0$:

A chave está aberta, portanto $R = 1 \Omega$ está desconectado



$$\alpha = 2,5$$

$$\omega_0 = 2$$

$$s_1 = -1$$

$$s_2 = -4$$

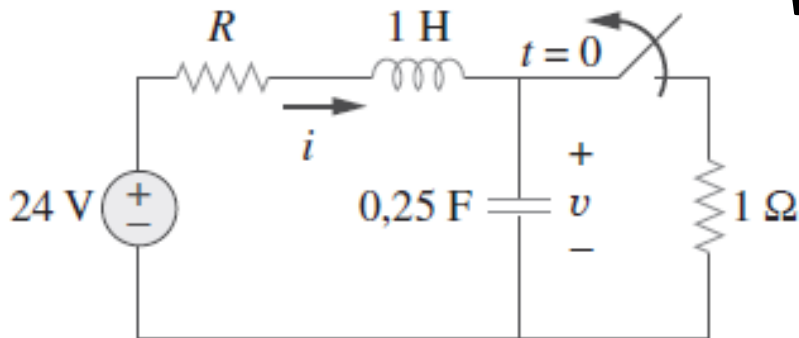
$$v(t) = V_s + k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

**Amortecimento
supercrítico**

$$v(t) = 24 + k_1 e^{-t} + k_2 e^{-4t}$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau



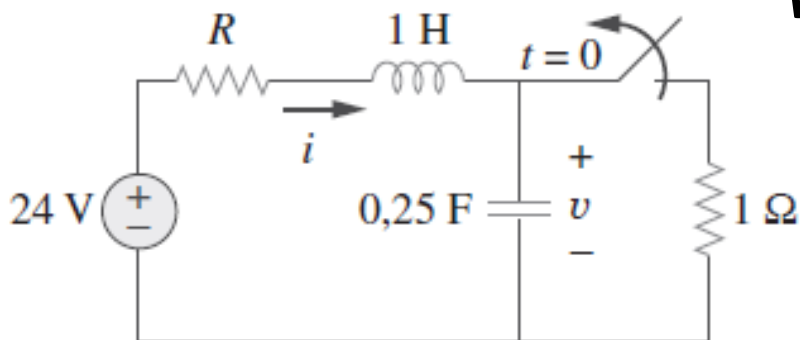
Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

3 – Definir as constantes a partir das condições iniciais.

$$v(t) = 24 + k_1 e^{-t} + k_2 e^{-4t} \quad \text{Eq 1}$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

3 – Definir as constantes a partir das condições iniciais.

$$v(t) = 24 + k_1 e^{-t} + k_2 e^{-4t} \quad \text{Eq 1}$$

Calculando k_1 e k_2 , e usando as condições iniciais:

$$v(0) = 24 + k_1 e^0 + k_2 e^0 = 24 + k_1 + k_2$$

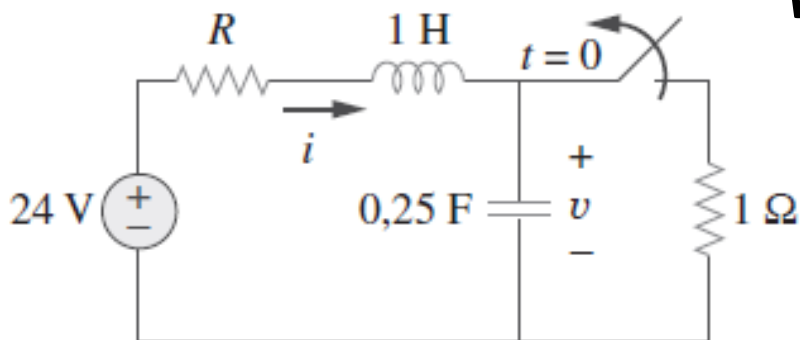
$$v(0) = 4V$$

$$v(0) = 4 = 24 + k_1 + k_2$$

$$-20 = k_1 + k_2 \quad \text{Eq 2}$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

3 – Definir as constantes a partir das condições iniciais.

$$v(t) = 24 + k_1 e^{-t} + k_2 e^{-4t} \quad \text{Eq 1}$$

Derivando a Eq. 1, e usando as condições iniciais:

$$\frac{dv}{dt} = -k_1 e^{-t} - 4k_2 e^{-4t}$$

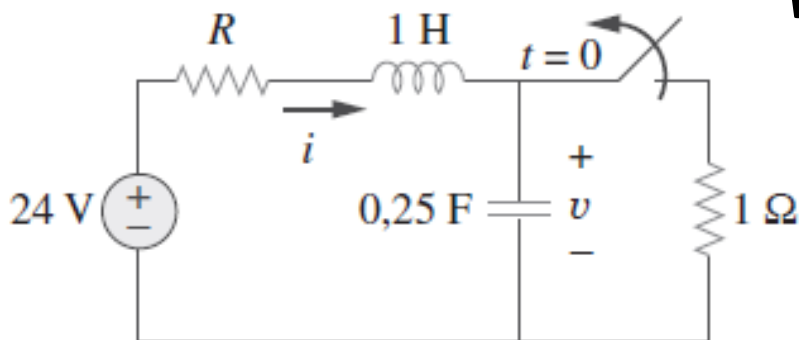
$$\frac{dv(0)}{dt} = -k_1 - 4k_2$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = 16$$

$$16 = -k_1 - 4k_2 \quad \text{Eq 3}$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

3 – Definir as constantes a partir das condições iniciais.

$$v(t) = 24 + k_1 e^{-t} + k_2 e^{-4t} \quad \text{Eq 1}$$

A partir das Eq. 2 e Eq. 3:

$$-20 = k_1 + k_2 \quad 16 = -k_1 - 4k_2$$

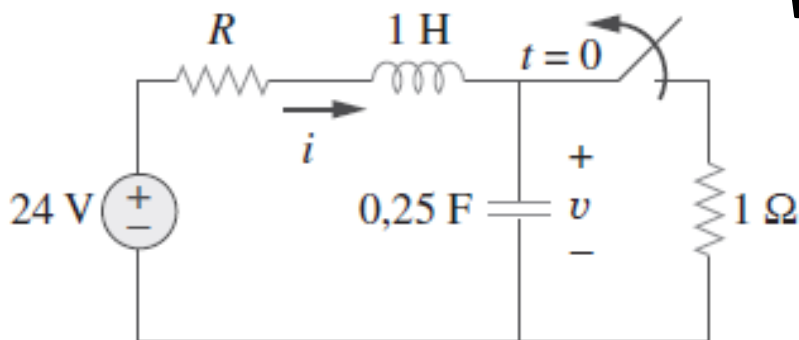
Determino as constantes:

$$k_2 = \frac{4}{3}$$

$$k_1 = -\frac{64}{3}$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

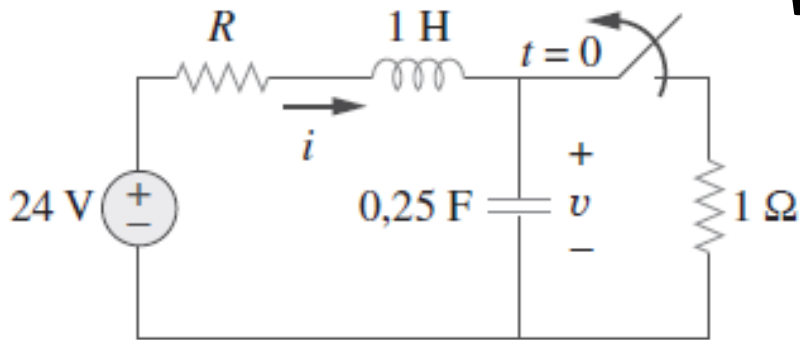
Com o anterior:

$$v(t) = 24 - \frac{64}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-4t}$$

$$v(t) = 24 + \frac{4}{3}(-16e^{-t} + e^{-4t})$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

Com o anterior:

$$v(t) = 24 + \frac{4}{3} (-16e^{-t} + e^{-4t})$$

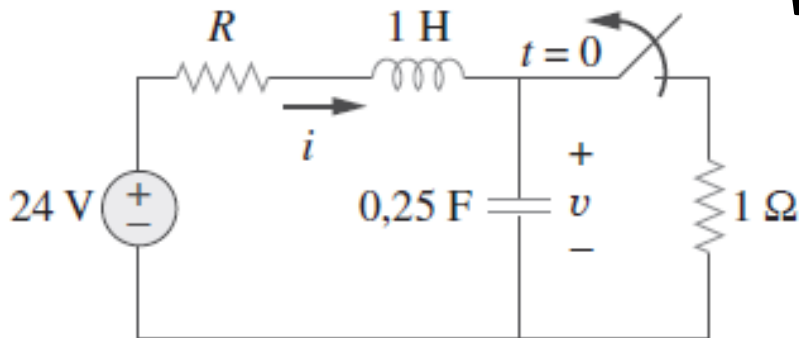
Já que o indutor e o capacitor estão em série para $t > 0$, a corrente no indutor é a mesma que no capacitor. Logo:

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad i(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{64}{3} e^{-t} - \frac{16}{3} e^{-4t} \right)$$

$$i(t) = \frac{16}{3} e^{-t} - \frac{4}{3} e^{-4t} \quad i(t) = \frac{4}{3} (4e^{-t} - e^{-4t})$$

Circuito RLC série

Exemplo de resposta ao degrau



Para o circuito da Figura abaixo, calcule $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5 \Omega$.

Com o anterior:

$$v(t) = 24 + \frac{4}{3} (-16e^{-t} + e^{-4t}) \text{ V}$$

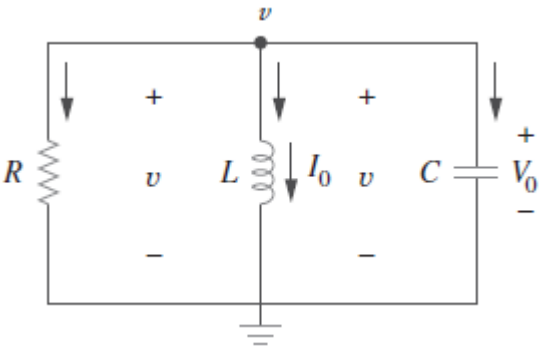
$$i(t) = \frac{4}{3} (4e^{-t} - e^{-4t}) \text{ A}$$



Circuito RLC paralelo. Resposta natural

Circuito RLC paralelo

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



O circuito está sendo estimulado pela energia previamente armazenada em C e L. Isto é: V_0 e I_0

Então, para $t = 0$:

$$\text{LKC: } i_R + i_L + i_C = 0$$

Todos os elementos em paralelo: $v_R = v_L = v_C = v$

Lei de Ohm em R: $i_R = \frac{v_R}{R}$

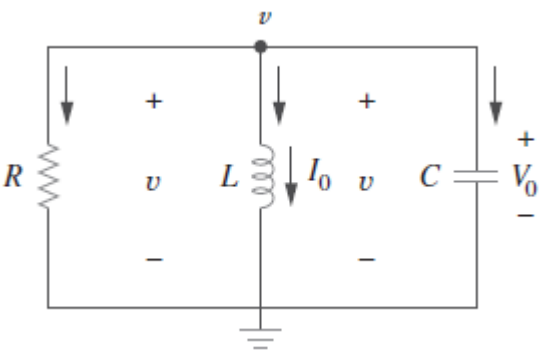
Relação I-V em C: $i_C = C \frac{dv}{dt}$

Além disso: $i(0) = I_0$ e $i_L(0) = I_0 = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(t) dt$

Portanto: $\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(t) dt + C \frac{dv}{dt} = 0$

Circuito RLC paralelo

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(t) dt + C \frac{dv}{dt} = 0$$

Derivando em relação a t, temos:

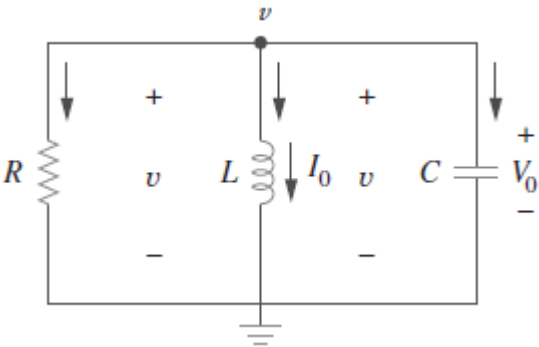
$$\frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v + C \frac{d^2v}{dt^2} = 0 \quad \text{Portanto:}$$

Resposta natural do circuito RLC paralelo, com C e L inicialmente carregados:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0 \quad \text{EDO de 2}^{\text{da}} \text{ ordem}$$

Circuito RLC paralelo

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



Tendo as 2 condições iniciais, é possível resolver a EDO de 2^{da} ordem do circuito. Neste caso sabemos que a solução é na forma exponencial:

$$v(t) = ke^{st} \quad v(t): \text{função tensão no ramo no tempo,} \\ k \text{ e } S : \text{parâmetros ajustáveis.}$$

Esta equação quadrática é conhecida como Equação Característica da Equação Diferencial, uma vez que as raízes da equação ditam as características básicas da corrente i:

$$ke^{st} \left(s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} \right) = 0$$



Circuito RLC paralelo

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

Equação Característica: $ke^{st} \left(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} \right) = 0$

Cujas duas raízes são:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

ou:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Onde:

$\alpha = \frac{1}{2RC}$ [rad/s]. **Decaimento exponencial** (ou **fator de amortecimento**). Define a taxa na qual a resposta é amortecida. As perdas de energia se devem a presença da resistência R.

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ [rad/s]. **Frequência ressonante** (ou **frequência natural não amortecida**). Define a taxa de transferência de energia entre os elementos de armazenamento (L e C).



Circuito RLC paralelo

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

A partir das equações das raízes da equação característica:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

pode-se inferir que **existem 3 tipos de soluções:**

1) Se $\alpha > \omega_0$ **amortecimento supercrítico**, com duas raízes reais, distintas e negativas;

2) Se $\alpha = \omega_0$ **amortecimento crítico**, com duas raízes reais e iguais;

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.



Circuito RLC paralelo

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

1) Se $\alpha > \omega_0$ **amortecimento supercrítico**, com duas raízes (chamadas frequências naturais) reais, distintas e negativas.

Como $\alpha > \omega_0$ e $\alpha = \frac{1}{2RC}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Então $\frac{1}{2RC} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\frac{1}{4R^2C^2} > \frac{1}{LC}$ logo, ocorre quando: $L > 4R^2C$

Resposta natural:

$$v(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$



Circuito RLC paralelo

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

2) Se $\alpha = \omega_0$ **amortecimento crítico**, com duas raízes (chamadas frequências naturais) reais e iguais.

Como $\alpha = \omega_0$ e $\alpha = \frac{1}{2RC}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Então $\frac{1}{2RC} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\frac{1}{4R^2C^2} = \frac{1}{LC}$ logo, ocorre quando: $L = 4R^2C$

Resposta natural:

$$v(t) = e^{-\alpha t} (k_2 + k_1 t)$$



Circuito RLC paralelo

Etapas de carga e descarga do circuito RLC

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3) Se $\alpha < \omega_0$ **subamortecimento**, raízes complexas.
(chamadas frequências naturais).

$$L < 4R^2C$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

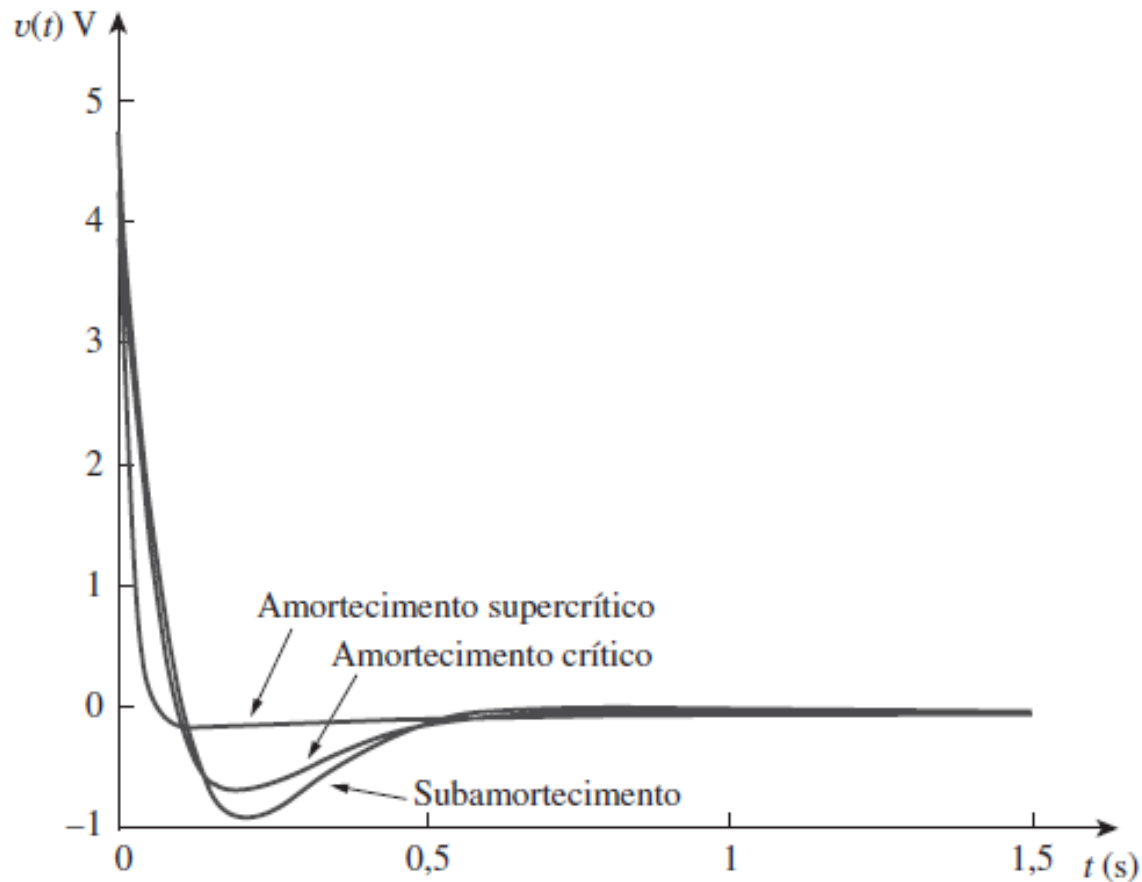
$$m_1 = k_1 + k_2 \quad m_2 = j(k_1 - k_2) \quad \omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$

$$v(t) = e^{-\alpha t} [m_1 \cos(\omega_d t) + m_2 \sin(\omega_d t)]$$



Circuito RLC paralelo

Etapas de carga e descarga do circuito RLC



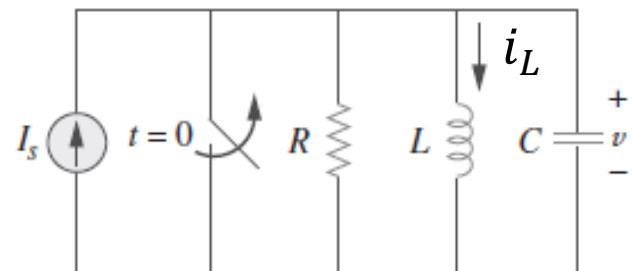


Circuito RLC paralelo.

Resposta ao degrau unitário

Circuito RLC paralelo

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



Considerando uma fonte de corrente CC, e L e C descarregados, para $t > 0$, temos:

LKC no nó superior: $i_R + i_L + i_C = I_s u(t)$

Lei de Ohm em R: $i_R = \frac{v_R}{R}$

Relação I-V em C: $i_C = C \frac{dv}{dt}$ Para $t > 0$ ($u(t)=1$): $\frac{v_R}{R} + i_L + C \frac{dv_C}{dt} = I_s$

Considerando: $v_R = v_L = v_C = v$ e a relação I-V em L: $v_L = L \frac{di}{dt}$

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L + C \frac{d\left(L \frac{di_L}{dt}\right)}{dt} = I_s$$

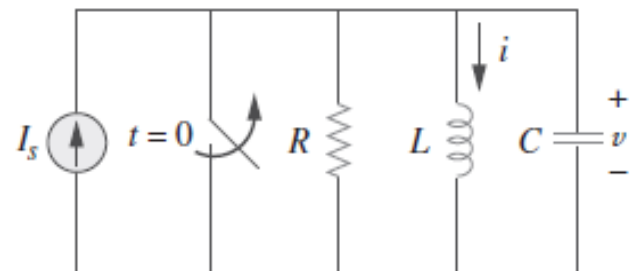
$$\left(\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L + CL \frac{d^2 i_L}{dt^2}\right) \frac{1}{LC} = I_s \frac{1}{LC}$$

Assumindo: $i_L = i$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{LC} I_s$$

Circuito RLC paralelo

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{LC} I_s$$

Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

Têm a mesma forma

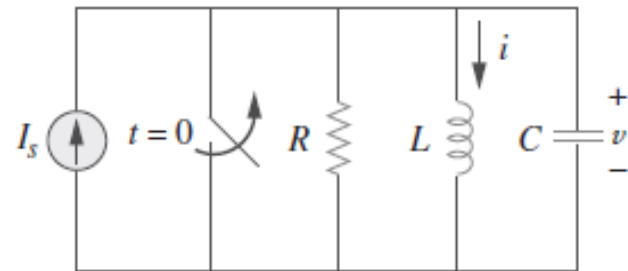


$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0$$

Resposta natural do circuito RLC, com C e L inicialmente carregados.

Circuito RLC paralelo

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{i - I_s}{LC} = 0$$

Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

A **solução** para essa equação possui duas componentes: **resposta transiente** $i_t(t)$ e **resposta de estado estável** $i_{ss}(t)$, ou seja:

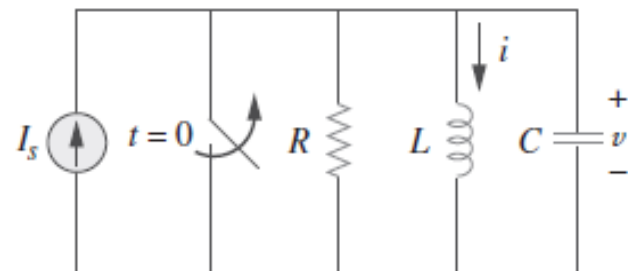
$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t)$$

Mesma solução que a resposta natural

$$\left\{ \begin{array}{ll} i(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} & \text{Amortecimento supercrítico} \\ i(t) = e^{-\alpha t} (k_2 + k_1 t) & \text{Amortecimento crítico} \\ i(t) = e^{-\alpha t} [m_1 \cos(\omega_d t) + m_2 \sin(\omega_d t)] & \text{Subamortecido} \end{array} \right.$$

Circuito RLC paralelo

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{i - I_s}{LC} = 0$$

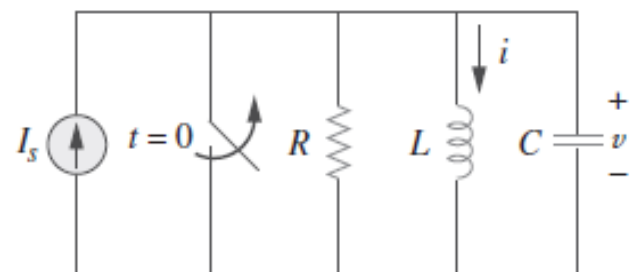
Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

A **solução** para essa equação possui duas componentes: **resposta transiente** $i_t(t)$ e **resposta de estado estável** $i_{ss}(t)$, ou seja:

$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t) \quad \longrightarrow \quad i_{ss}(t) = i(\infty) = I_s$$

Circuito RLC paralelo

Etapas de **carga** e **descarga** do circuito RLC



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{i - I_s}{LC} = 0$$

Resposta ao degrau do circuito RLC, com C e L inicialmente descarregados.

Portanto, a solução completa ao degrau unitário do circuito RLC paralelo é:

$$i(t) = I_s + k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad \text{Amortecimento supercrítico}$$

$$i(t) = I_s + e^{-\alpha t} (k_2 + k_1 t) \quad \text{Amortecimento crítico}$$

$$i(t) = I_s + e^{-\alpha t} [m_1 \cos(\omega_d t) + m_2 \sin(\omega_d t)] \quad \text{Subamortecido}$$



Exercícios

1. Estudar os exemplos e o conteúdo da aula.



Referências

Alexader, C. K., Sadiku, M., N., O. Fundamentos Circuitos Elétricos , 5ta ed. Mc Graw Hill, 2013.

Boylestad, R., L. Introdução à análise de circuitos, 12nd ed. Pearson, 2012.



Universidade de São Paulo (USP), Escola
de Engenharia de Lorena (EEL),
Curso de Engenharia Física



Obrigado

Prof. Dr. Andy Blanco Rodriguez

andy.blanco@usp.br

**Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR), Sala A 53C, Área II da EEL-USP,
Estrada Chiquito de Aquino, N° 1000, Lorena, São Paulo, Brasil.**