



Universidade de São Paulo (USP), Escola
de Engenharia de Lorena (EEL),
Curso de Engenharia Física



Circuitos Elétricos - teoria e prática (LOM3262)

Prof. Dr. Andy Blanco Rodriguez

**Lorena-SP
2025/2**



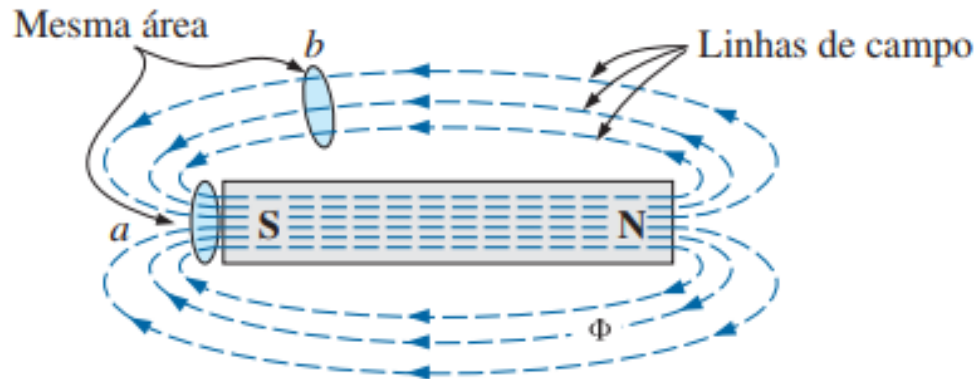
- Indutores;
- Circuitos de 1^{ra} ordem. Circuito RL;
- Circuito RL, fase de carga do indutor;
- Circuito RL, fase de descarga do indutor.



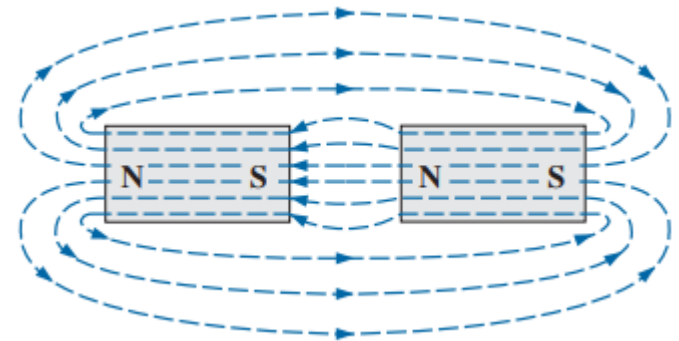
Indutores

Indutores

Campo magnético



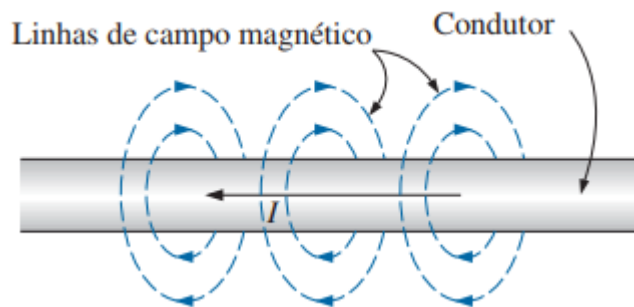
Linhas de campo magnético para um ímã permanente.



Linhas de campo magnético para um sistema de dois ímãs com polos opostos adjacentes.

Indutores

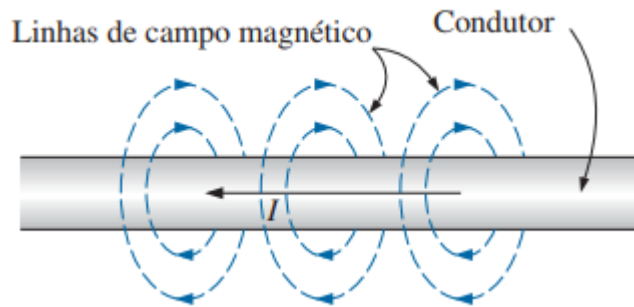
Campo magnético



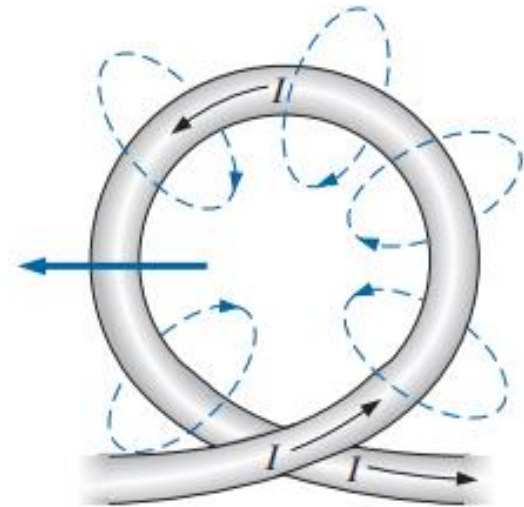
Linhas de campo nas proximidades de um condutor percorrido por corrente.

Indutores

Campo magnético



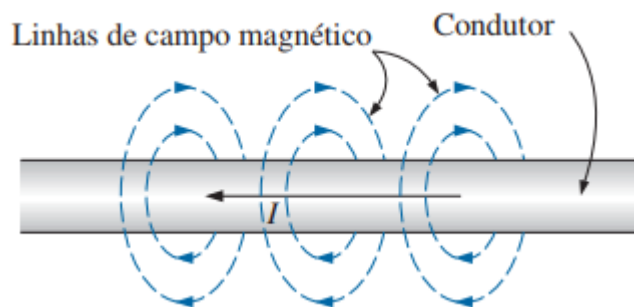
Linhas de campo nas proximidades de um condutor percorrido por corrente.



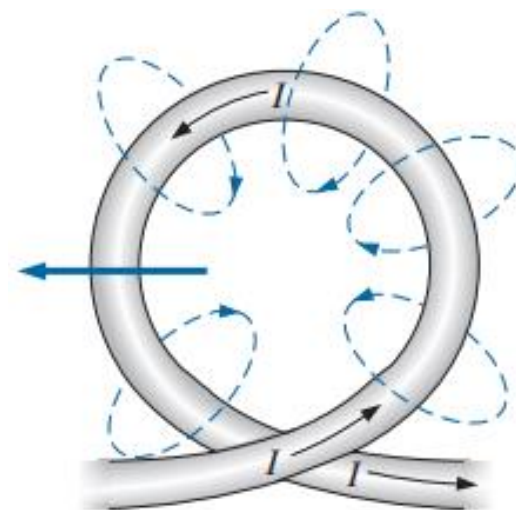
Distribuição de fluxo em uma bobina de uma espira percorrida por corrente.

Indutores

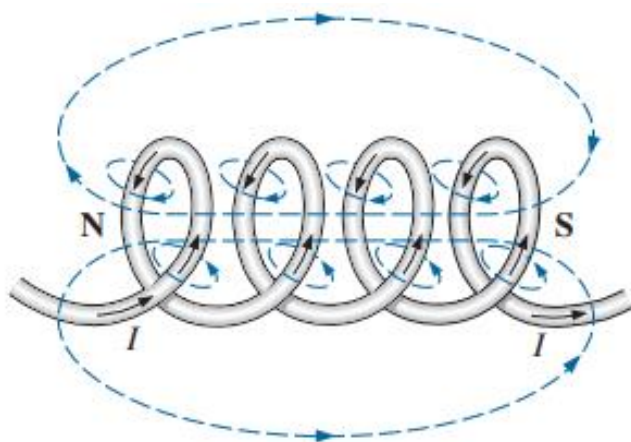
Campo magnético



Linhas de campo nas proximidades de um condutor percorrido por corrente.



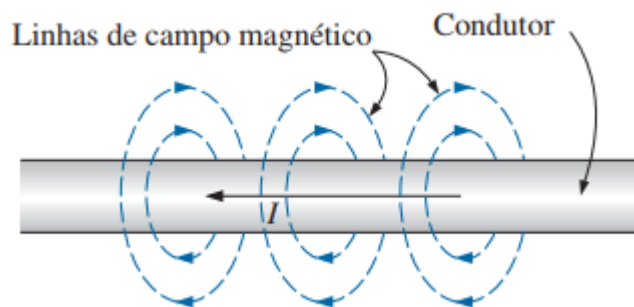
Distribuição de fluxo em uma bobina de uma espira percorrida por corrente.



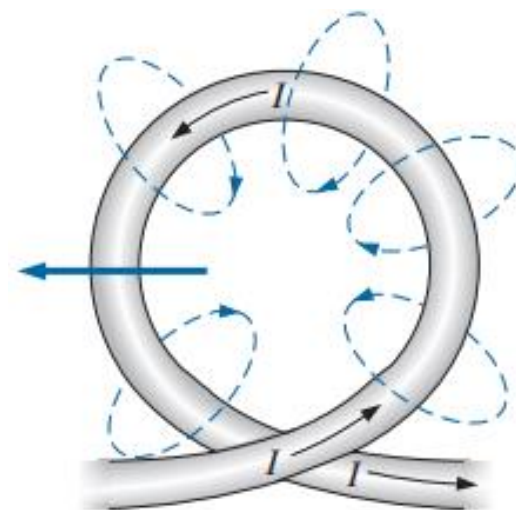
Linhas de campo em uma bobina percorrida por corrente.

Indutores

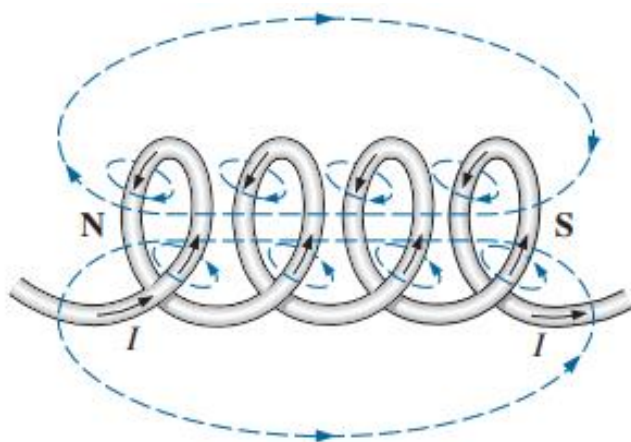
Campo magnético



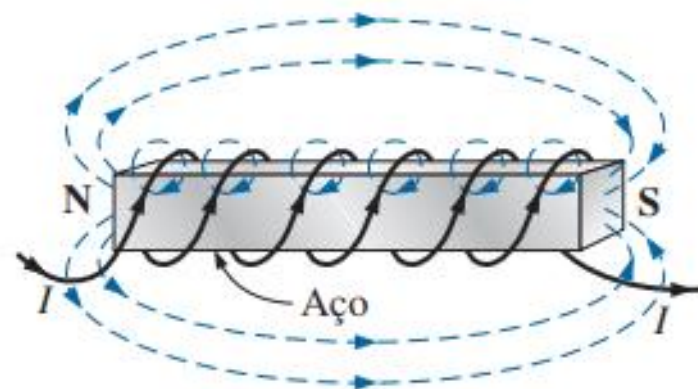
Linhas de campo nas proximidades de um condutor percorrido por corrente.



Distribuição de fluxo em uma bobina de uma espira percorrida por corrente.



Linhas de campo em uma bobina percorrida por corrente.



Eletroímã.



Indutores

Campo magnético

É conhecido através da lei de indução de Faraday que:

$$v = NA \frac{dB}{dt}$$

(Eq 1)

Sendo:

v : Diferença de potencial entre os terminais do indutor;

N : # de espiras da bobina;

A : Área da seção transversal;

B : Campo magnético no interior da bobina.



Indutores

Campo magnético

É conhecido através da lei de indução de Faraday que:

$$v = NA \frac{dB}{dt} \quad (\text{Eq 1})$$

Sendo:

v : Diferença de potencial entre os terminais do indutor;

N : # de espiras da bobina;

A : Área da seção transversal;

B : Campo magnético no interior da bobina.

Ademais, sabe-se que o campo magnético no interior da bobina é:

$$B = i \frac{\mu N}{l} \quad (\text{Eq 2})$$

Sendo:

i : Corrente elétrica;

μ : Permeabilidade magnética;

l : Comprimento do fio.



Indutores

Indutância

$$v = NA \frac{dB}{dt} \quad (\text{Eq 1})$$

$$B = i \frac{\mu N}{l} \quad (\text{Eq 2})$$

Substituindo a Eq 2 na Eq 1:

$$v = NA \frac{dB}{dt} = NA \frac{di}{dt} \frac{\mu N}{l} = \frac{\mu AN^2}{l} \frac{di}{dt}$$

(Eq 3)

$$v = \frac{\mu AN^2}{l} \frac{di}{dt}$$



Indutores

Indutância

$$v = NA \frac{dB}{dt} \quad (\text{Eq 1})$$

$$B = i \frac{\mu N}{l} \quad (\text{Eq 2})$$

Substituindo a Eq 2 na Eq 1:

$$v = NA \frac{dB}{dt} = NA \frac{di}{dt} \frac{\mu N}{l} = \frac{\mu AN^2}{l} \frac{di}{dt}$$

(Eq 3)

$$v = \frac{\mu AN^2}{l} \frac{di}{dt}$$

Indutância (L)

$$L = \frac{\mu AN^2}{l} \quad (\text{Eq 4})$$



Indutores

Indutância

$$v = NA \frac{dB}{dt} \quad (\text{Eq 1})$$

$$B = i \frac{\mu N}{l} \quad (\text{Eq 2})$$

Substituindo a Eq 2 na Eq 1:

$$v = NA \frac{dB}{dt} = NA \frac{di}{dt} \frac{\mu N}{l} = \frac{\mu AN^2}{l} \frac{di}{dt}$$

(Eq 3)

$$v = \frac{\mu AN^2}{l} \frac{di}{dt}$$

Indutância (L)

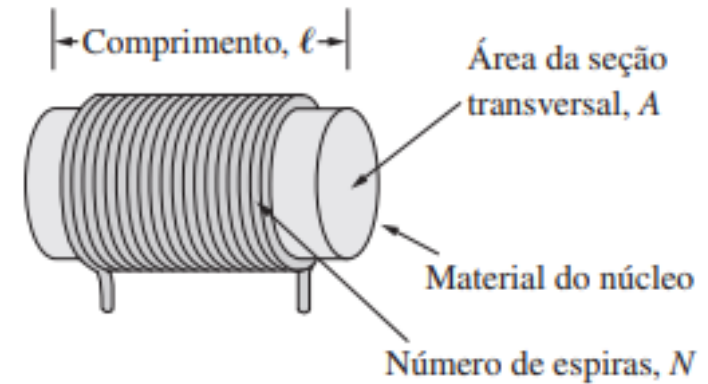
$$L = \frac{\mu AN^2}{l} \quad (\text{Eq 4})$$

A **indutância** é uma medida da **capacidade do indutor para apresentar oposição à variação de corrente através dele**, a unidade de medida é em henrys (H), em homenagem a Joseph Henry (1797-1878).

Indutores

Indutância

$$L = \frac{\mu AN^2}{l} \quad (\text{Eq 4})$$



Indutância (L)

A indutância é uma **característica construtiva do indutor**. Esta depende também das dimensões físicas do componente.

$$1H = \frac{1V \ 1s}{1A}$$

1 henry (F), é **definido** como um nível de indutância que estabelecerá uma tensão de **1 volt através da bobina devido a uma variação na corrente de 1 A/s através da bobina**.



Indutores

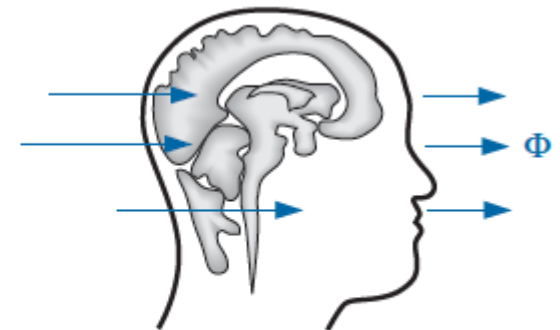
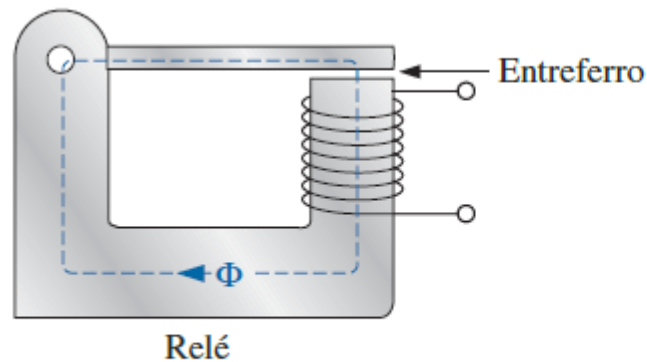
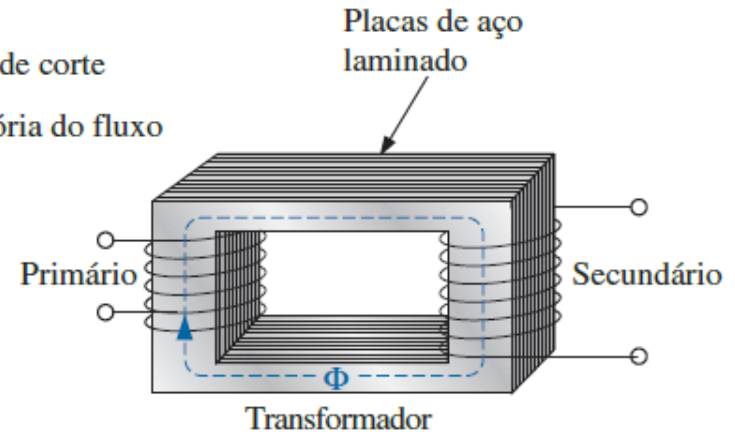
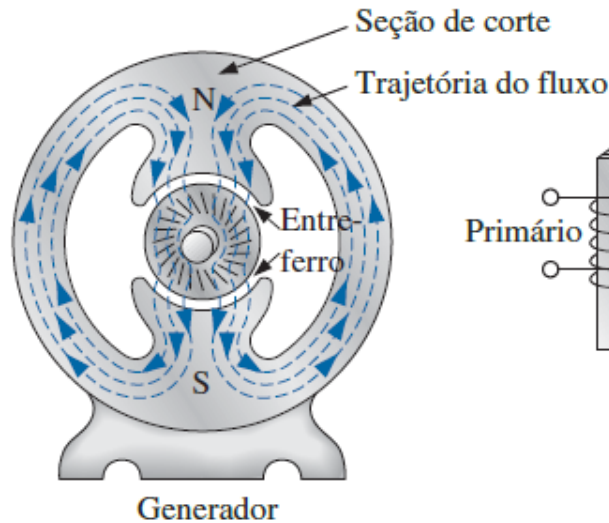
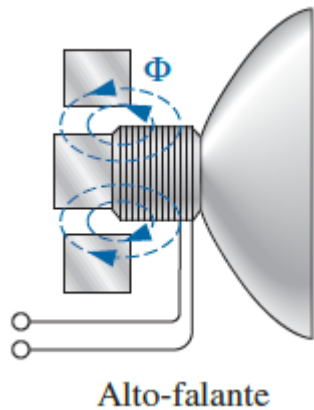
O Indutor

O indutor é um elemento passivo de dois terminais, projetado para armazenar energia em seu campo magnético. Este possui múltiplas aplicações em eletrônica, transformadores, fontes e sistemas de potência. Um indutor consiste em uma **bobina de fio condutor**.



Indutores

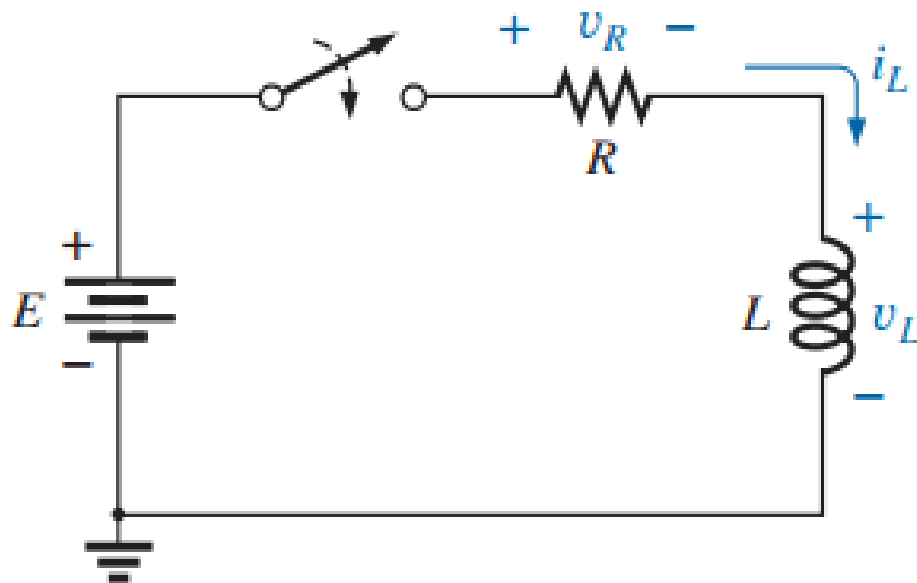
O Indutor



Aplicações em medicina: obtenção de imagens por ressonância magnética

Indutores

O Indutor



Quando uma **corrente** circula através de um indutor, verifica-se que a **tensão** sobre o indutor é diretamente **proporcional** à taxa de variação da corrente elétrica.



Indutores

O Indutor

Formatos, tipos e símbolos

Como os capacitores, os **indutores** também são comercialmente disponíveis em **diversos tipos e valores**.

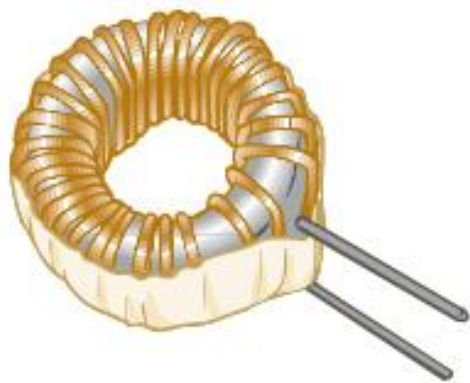
Indutores

O Indutor

Formatos, tipos e símbolos

Classificação de acordo ao formato:

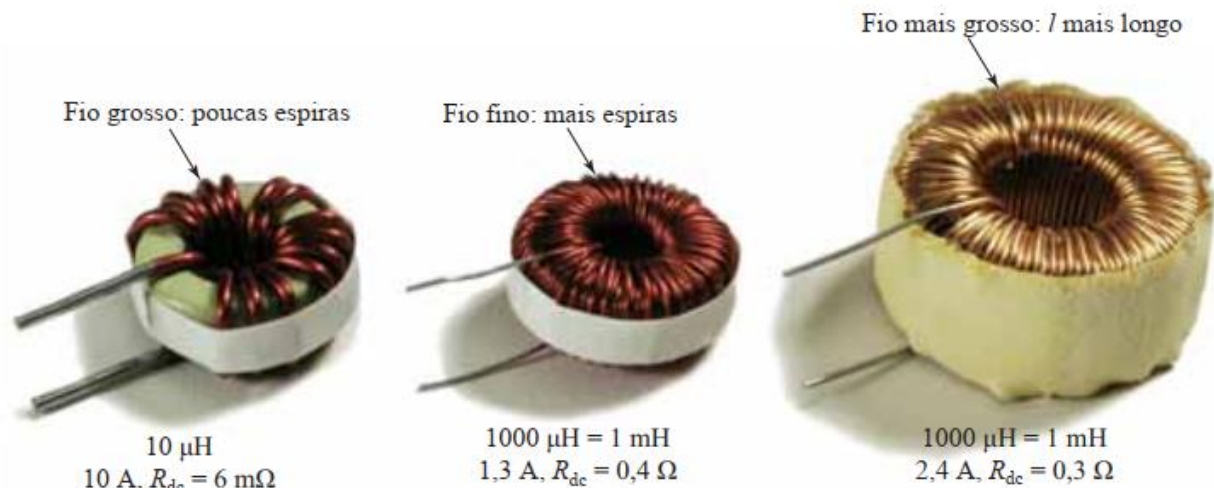
toroidal



Tipo: Toroidal

Valores típicos: 10 μH a 30 mH

Aplicações: Usado em linhas de transmissão para filtrar transitórios e reduzir interferências eletromagnéticas. Encontrado em muitos eletrodomésticos.



Tamanhos relativos de indutores de tipo **toroidal**, que permitem alta corrente.

Indutores

O Indutor

Formatos, tipos e símbolos

fenólico



$1\ \mu\text{H}$
 $350\ \text{mA}, R_{\text{dc}} = 6\ \Omega$



$100.000\ \mu\text{H} = 100\ \text{mH}$
 $11\ \text{mA}, R_{\text{dc}} = 0,7\ \text{k}\Omega$

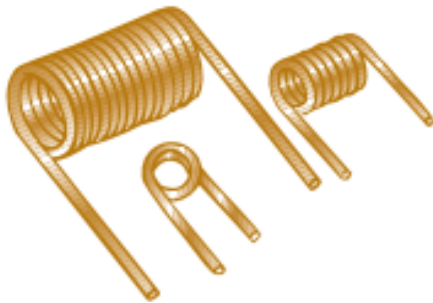
Tamanhos relativos de indutores de tipo **fenólico**: a) núcleo de resina ou plástico; b) núcleo de ferrita.

Indutores

O Indutor

Formatos, tipos e símbolos

núcleo de ar



Tipo: Indutores de núcleo de ar (1-32 espiras)

Valores típicos: 2,5 nH a 1 μ H

Aplicações: Aplicações de alta frequência

montagem em superfície (smd)

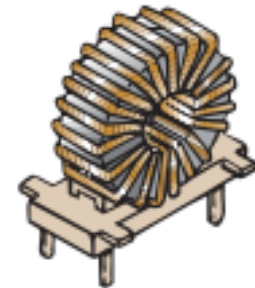


Tipo: Para montagem em superfície

Valores típicos: 0,01 μ H a 250 μ H

Aplicações: Encontrado em muitos circuitos eletrônicos que exigem componentes em miniatura para que sejam montados em placas de circuito impresso com multicamadas.

cilíndrico



Tipo: Cilíndrico de modo comum

Valores típicos: 0,6 mH a 50 mH

Aplicações: Usado em filtros de linha CA, interruptores de suprimento de energia, carregadores de bateria e outros equipamentos eletrônicos.

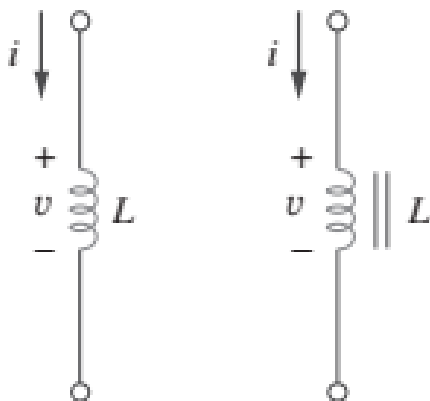
Indutores

O Indutor

Formatos, tipos e símbolos

Classificação de acordo ao modo de operação:

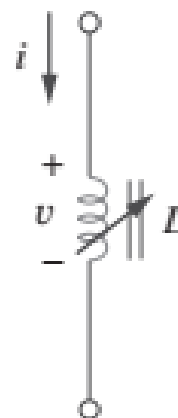
fixos



Símbolos para indutores:

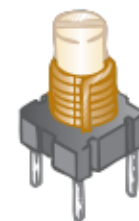
- (a) Fixo com núcleo preenchido com ar;
- (b) Fixo com núcleo de ferro.

variáveis



Símbolos para indutores:

Variável com núcleo de ferro.



Indutores variáveis com uma faixa típica de 1 uF a 100 uF.



Indutores

Relação entre Corrente e Tensão

Lembrando as relações obtidas anteriormente:

$$v = \frac{\mu AN^2}{l} \frac{di}{dt} \quad (\text{Eq 3})$$

$$L = \frac{\mu AN^2}{l} \quad (\text{Eq 4})$$



Indutores

Relação entre Corrente e Tensão

Lembrando as relações obtidas anteriormente:

$$v = \frac{\mu AN^2}{l} \frac{di}{dt} \quad (\text{Eq 3})$$

$$L = \frac{\mu AN^2}{l} \quad (\text{Eq 4})$$

Substituindo a Eq 4 na Eq 3:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (\text{Eq 5})$$

Tensão no indutor



Indutores

Relação entre Corrente e Tensão

Lembrando as relações obtidas anteriormente:

$$v = \frac{\mu AN^2}{l} \frac{di}{dt} \quad (\text{Eq 3})$$

$$L = \frac{\mu AN^2}{l} \quad (\text{Eq 4})$$

Substituindo a Eq 4 na Eq 3:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (\text{Eq 5})$$

Tensão no indutor

Apenas existe tensão no indutor quando ocorrem variações de corrente. Ou seja, ele se comporta como um curto-circuito para fontes de CC.

A tensão poder variar de forma instantânea.



Indutores

Relação entre Corrente e Tensão

Manipulando a Eq 5:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (\text{Eq 5})$$

$$di = \frac{1}{L} v dt$$

$$\int di = \int \frac{1}{L} v dt$$

$$\int di = \frac{1}{L} \int v dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + i(0) \quad (\text{Eq 6})$$

Corrente através do indutor



Indutores

Relação entre Corrente e Tensão

Manipulando a Eq 5:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (\text{Eq 5})$$

$$di = \frac{1}{L} v dt$$

$$\int di = \int \frac{1}{L} v dt$$

$$\int di = \frac{1}{L} \int v dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + i(0) \quad (\text{Eq 6})$$

Corrente através do indutor

A corrente no indutor é acumulada a partir de um instante inicial.

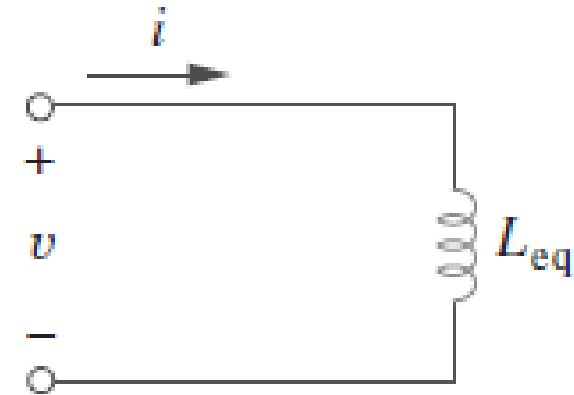
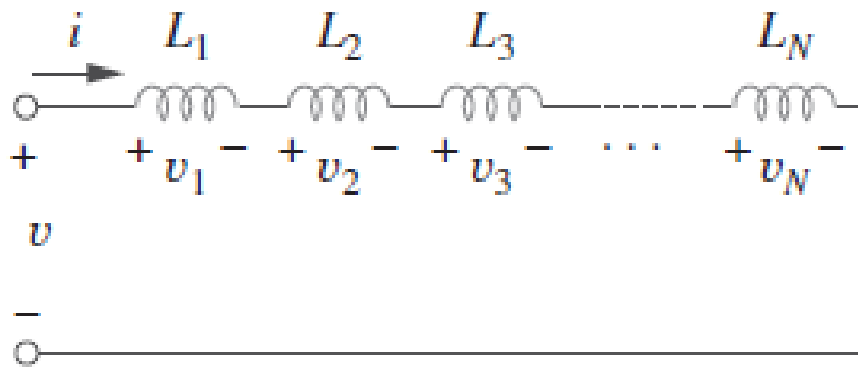
Não ocorrem variações bruscas de corrente através do indutor. A corrente no indutor é sempre contínua ($i(0^-) = i(0^+)$)



Indutores

O Indutor

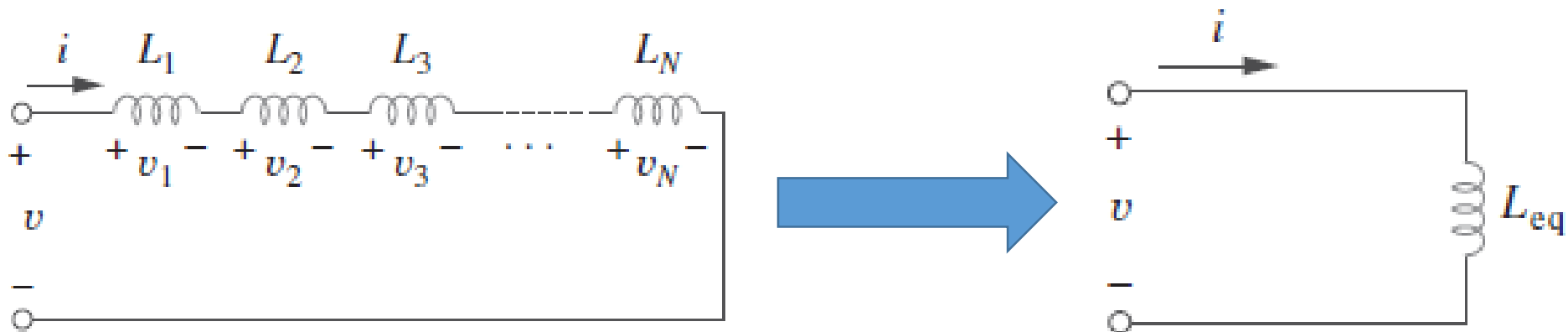
Conexão em série:



Indutores

O Indutor

Conexão em série:

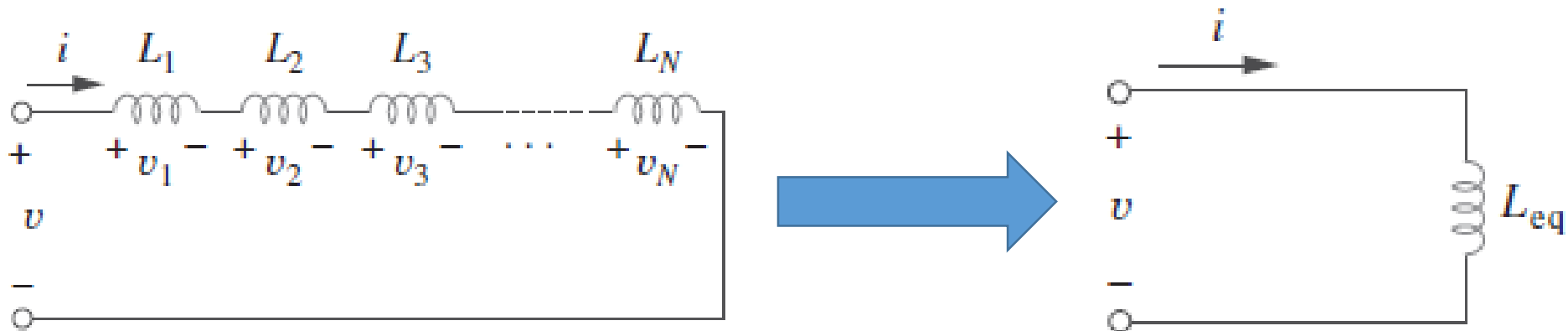


Aplicando LKT: $v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N$

Indutores

O Indutor

Conexão em série:



Aplicando LKT: $v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N$

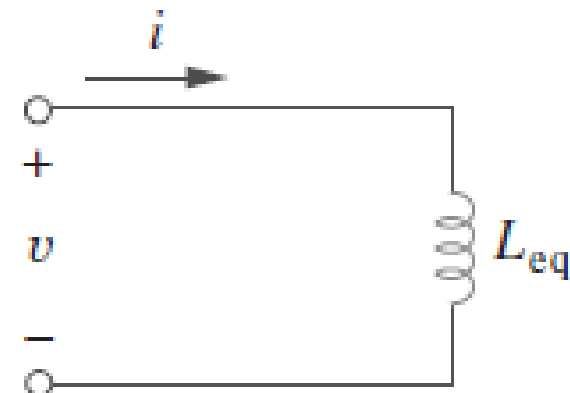
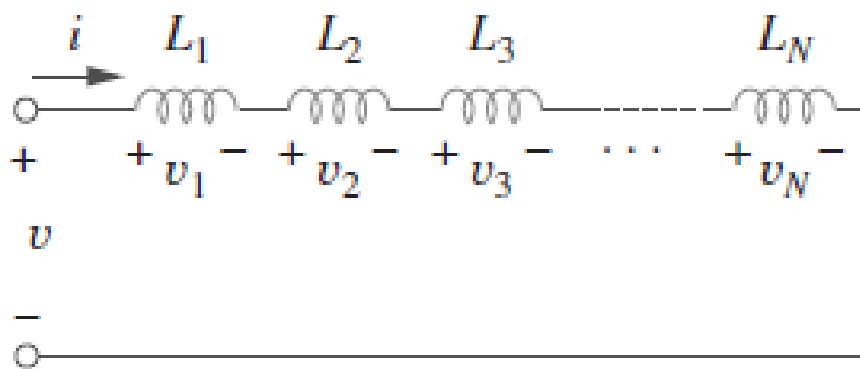
e sabendo que a mesma i passa pelos indutores:

$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt}$$

Indutores

O Indutor

Conexão em série:



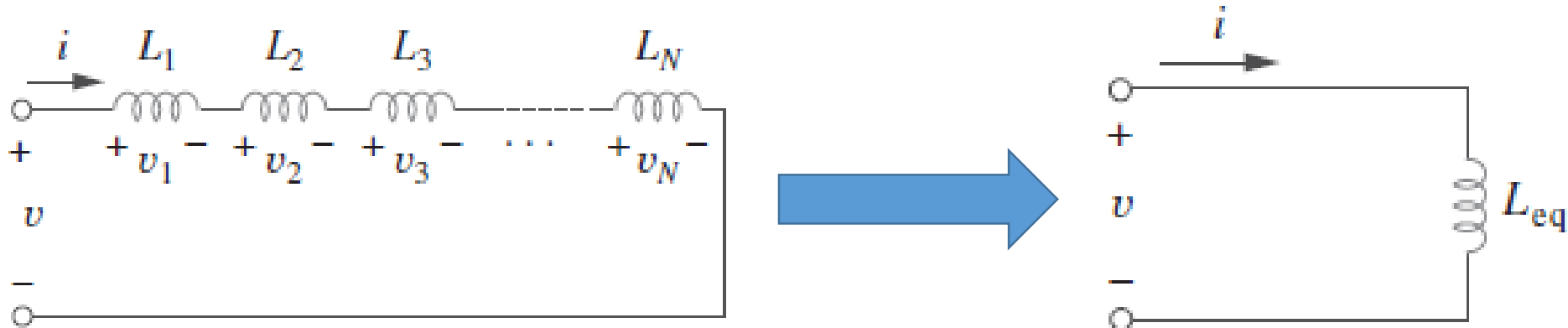
$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} \frac{di}{dt} = \left(\sum_{k=1}^N L_k \right) \frac{di}{dt}$$

Indutores

O Indutor

Conexão em série:



$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} \frac{di}{dt} = \left(\sum_{k=1}^N L_k \right) \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N$$

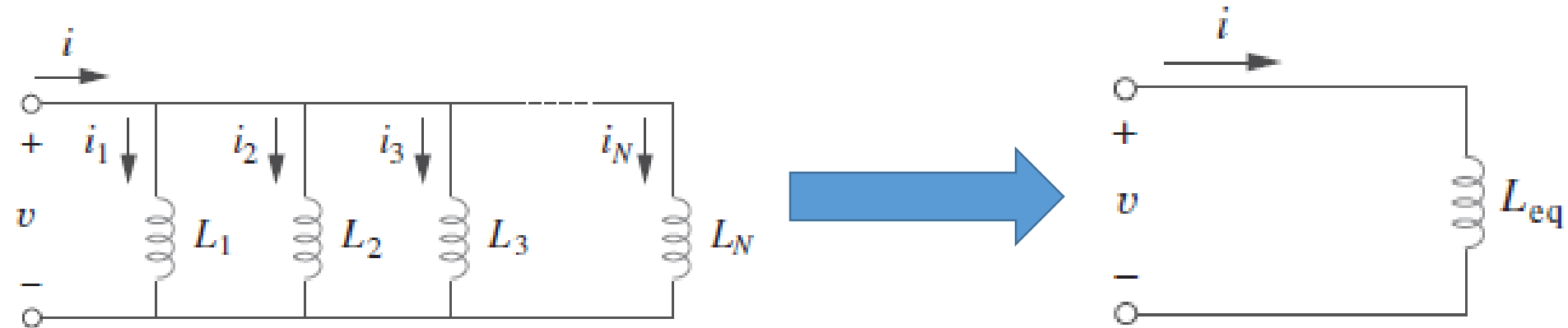
A indutância equivalente de N indutores conectados em série, é a soma das suas indutâncias individuais.



Indutores

O Indutor

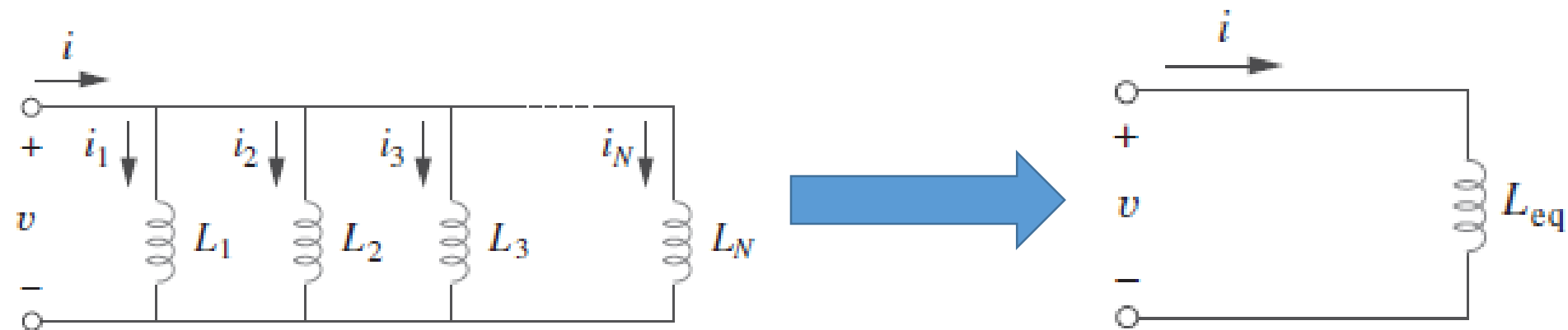
Conexão em paralelo:



Indutores

O Indutor

Conexão em paralelo:

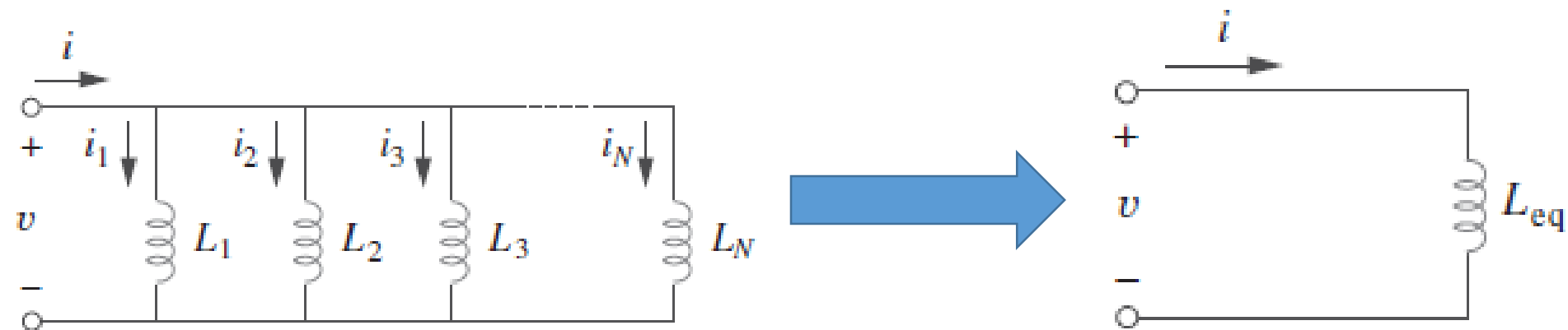


Aplicando LKC:
$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N$$

Indutores

O Indutor

Conexão em paralelo:



Aplicando LKC: $i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N$

sabendo que: $i_k = \frac{1}{L_k} \int_0^t v(t) dt + i_k(0)$

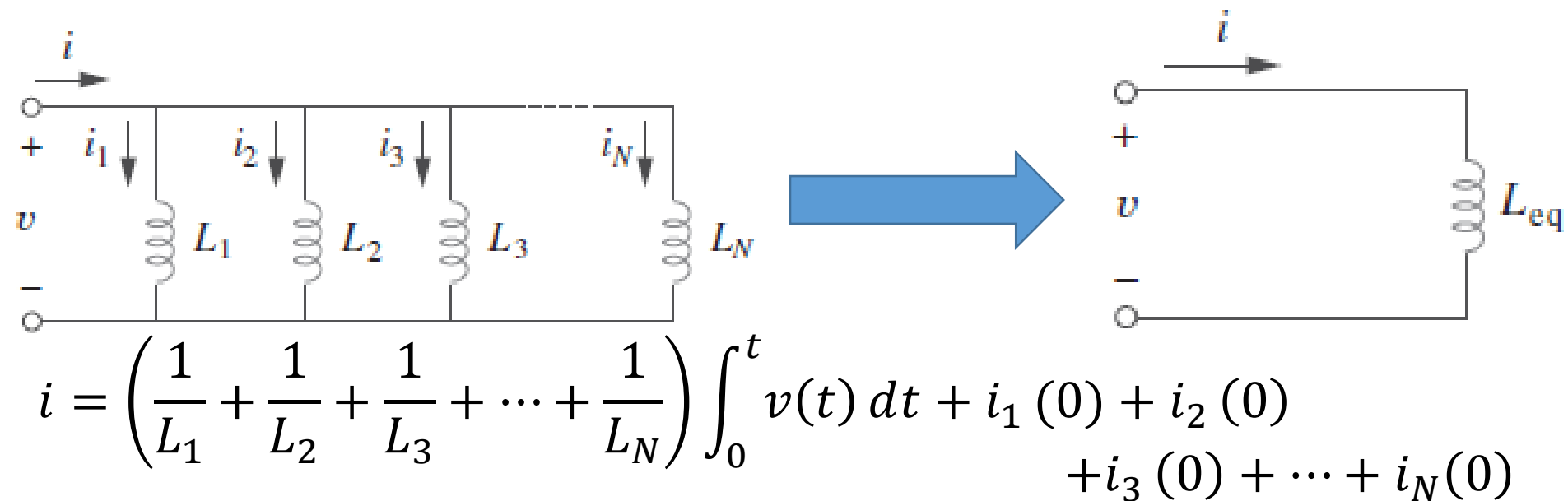
, e que v é igual para todos os L_k , temos:



Indutores

O Indutor

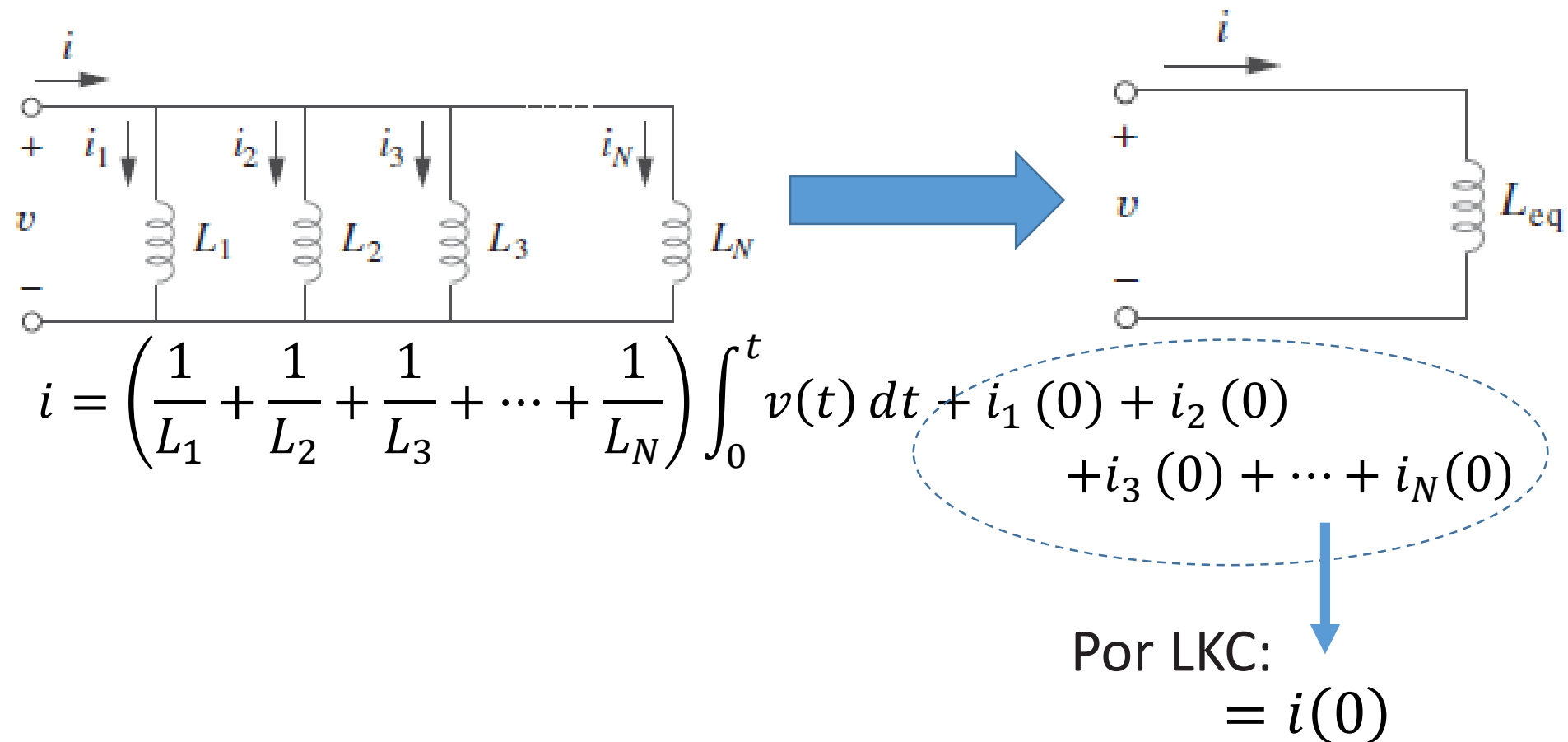
Conexão em paralelo:



Indutores

O Indutor

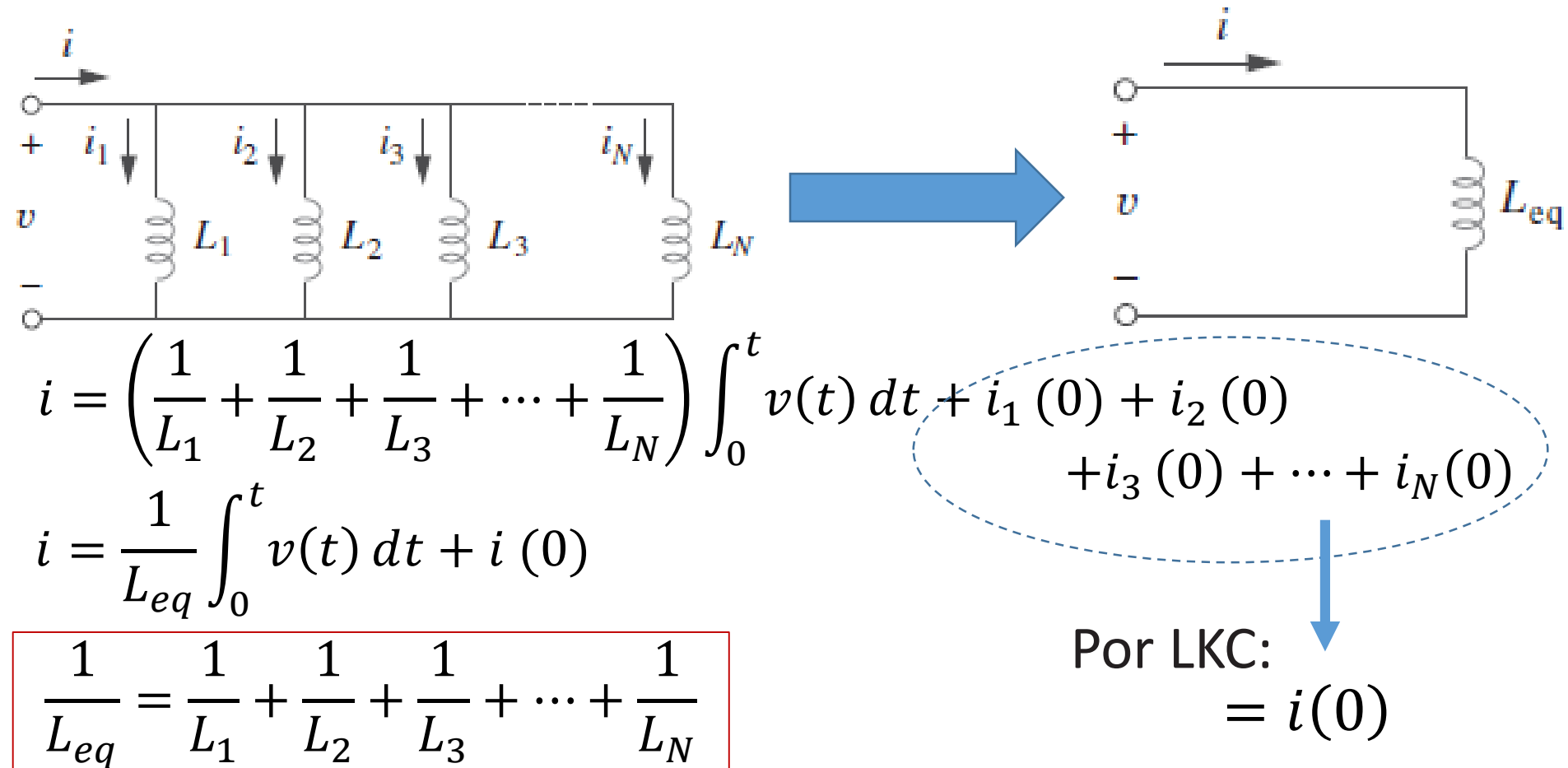
Conexão em paralelo:



Indutores

O Indutor

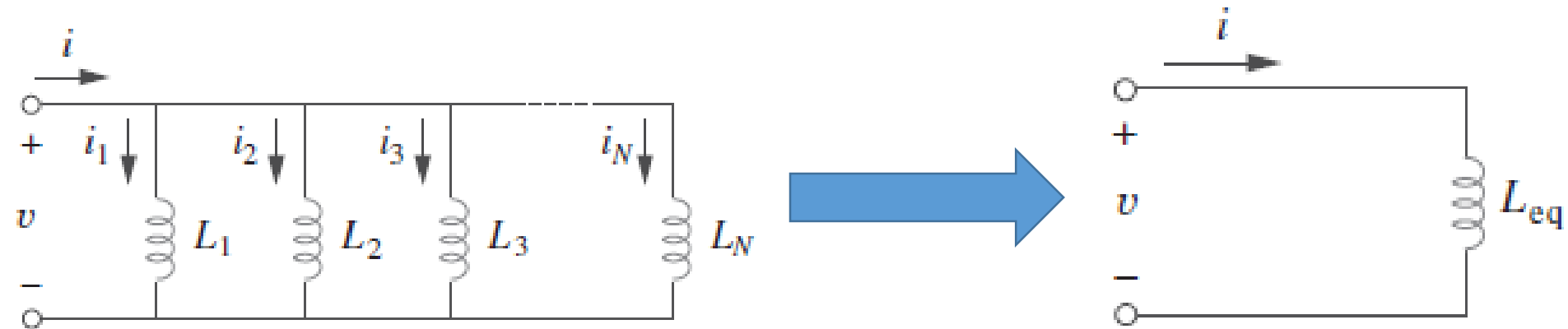
Conexão em paralelo:



Indutores

O Indutor

Conexão em paralelo:



$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \right) \int_0^t v(t) dt + i_1(0) + i_2(0)$$

$$i = \frac{1}{L_{eq}} \int_0^t v(t) dt + i(0)$$

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N}$$

A indutância equivalente de N indutores conectados em paralelo, é o inverso da soma dos inversos das indutâncias individuais.



Indutores

O Indutor

Potência e energia:

Um indutor ideal não dissipa potência em forma de calor, apenas armazena energia em seu campo magnético.

Potência:

$$p = vi = L \frac{di}{dt} i$$



$$p = L \frac{di}{dt} i$$

Energia:

$$w = \int p dt$$

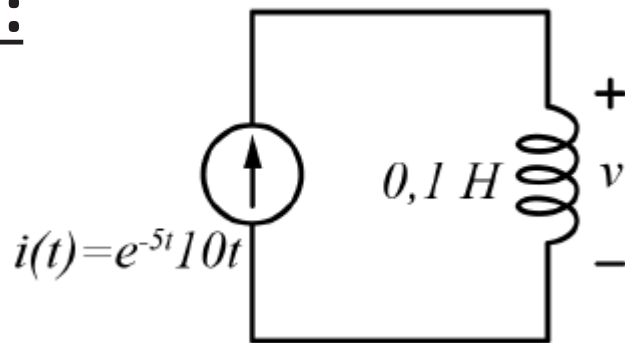


$$w = \frac{1}{2} Li^2$$

Indutores

O Indutor

Potência e energia:



$$w = \frac{1}{2} L i^2$$

$$v(t) = L \frac{d}{dt} (e^{-5t}10t)$$

$$v(t) = L(-5e^{-5t}10t + e^{-5t}10)$$

$$v(t) = L10e^{-5t}(1 - 5t)$$

$$L = 0,1\text{ H}$$

$$v(t) = 0,1 \times 10e^{-5t}(1 - 5t)$$

$$v(t) = e^{-5t}(1 - 5t) [\text{V}]$$

$$w = \frac{1}{2} 0,1 \times (e^{-5t}10t)^2$$

$$w = \frac{1}{2} 0,1 \times e^{-10t}100t^2$$

$$w = 5t^2 e^{-10t} [\text{J}]$$

Energia armazenada



Circuitos de 1^{ra} ordem.

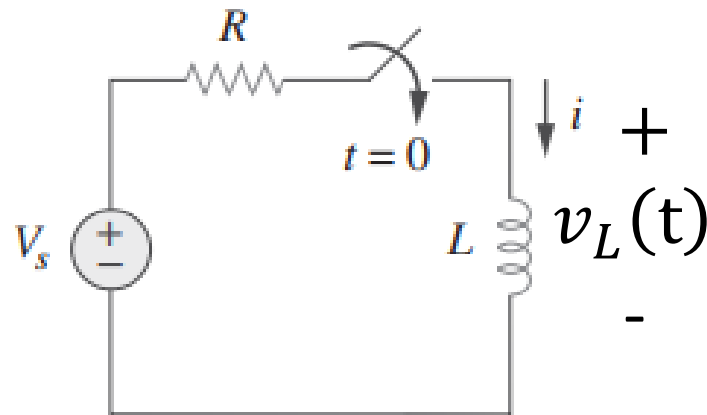
Circuito RL.

Fase de carga do indutor

Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

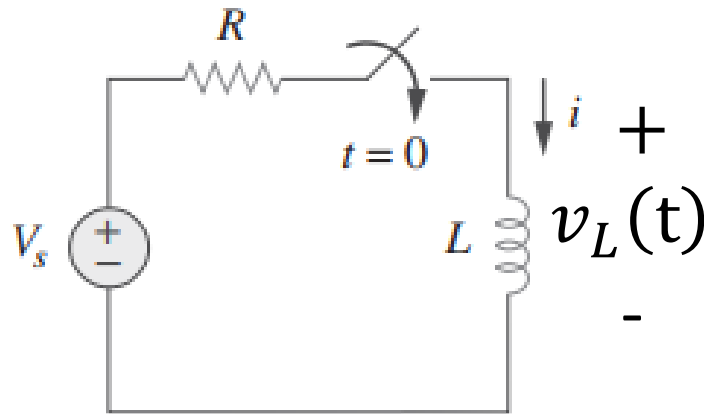
Etapa de carga do indutor. Também chamada de **resposta forçada**, conecta-se a fonte ao circuito:



Circula uma i através de RL, e acumula-se carga em L. Esta, por sua vez, gera uma corrente crescente em L (período transiente).

Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor



O processo continua até: $i_L = i = \frac{V_S}{R}$

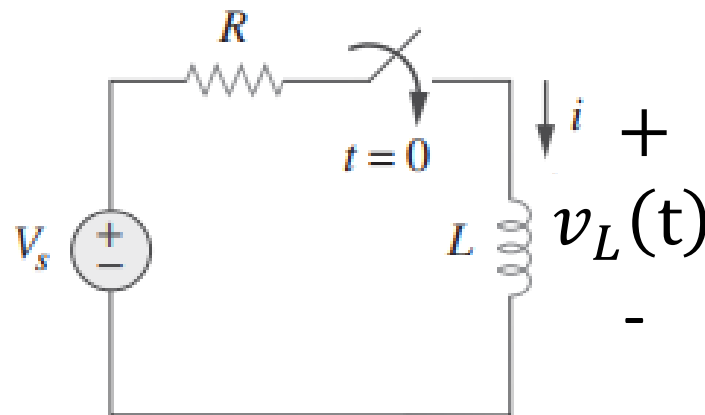
Nesse momento, portanto: $v_R = V_S \rightarrow v_L = 0$

Ou seja, a corrente atinge seu máximo valor no indutor e o **período transiente terminou**.

Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta forçada do circuito RL



A resposta forçada (carga), refere-se ao comportamento de corrente ou tensão do circuito, com a **presença de uma fonte**. Um dos **sinais de estímulos** mais usados é o **degrau unitário** ao circuito RL, em $t = 0$.

Circuito RC

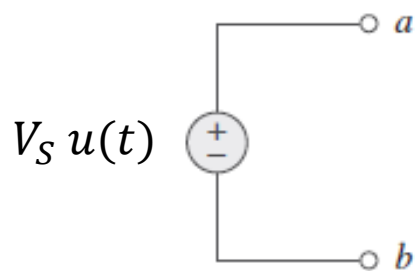
Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

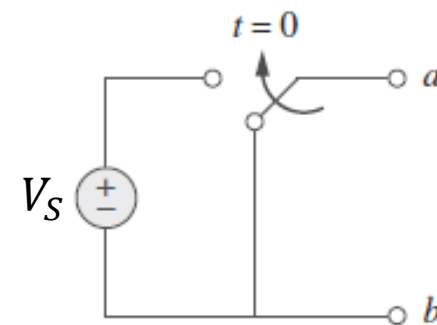
Resposta a um degrau unitário é a
circuito decorrente da **aplicação súbita de uma fonte**
de tensão ou de corrente CC.



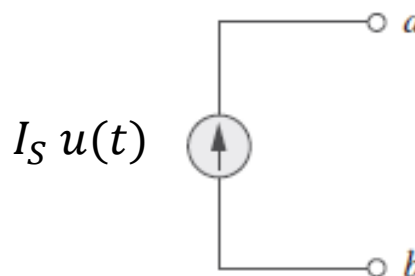
$$V_S u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_S, & t > 0 \end{cases}$$



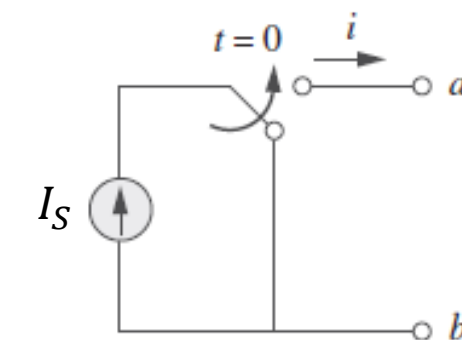
=



$$I_S u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I_S, & t > 0 \end{cases}$$



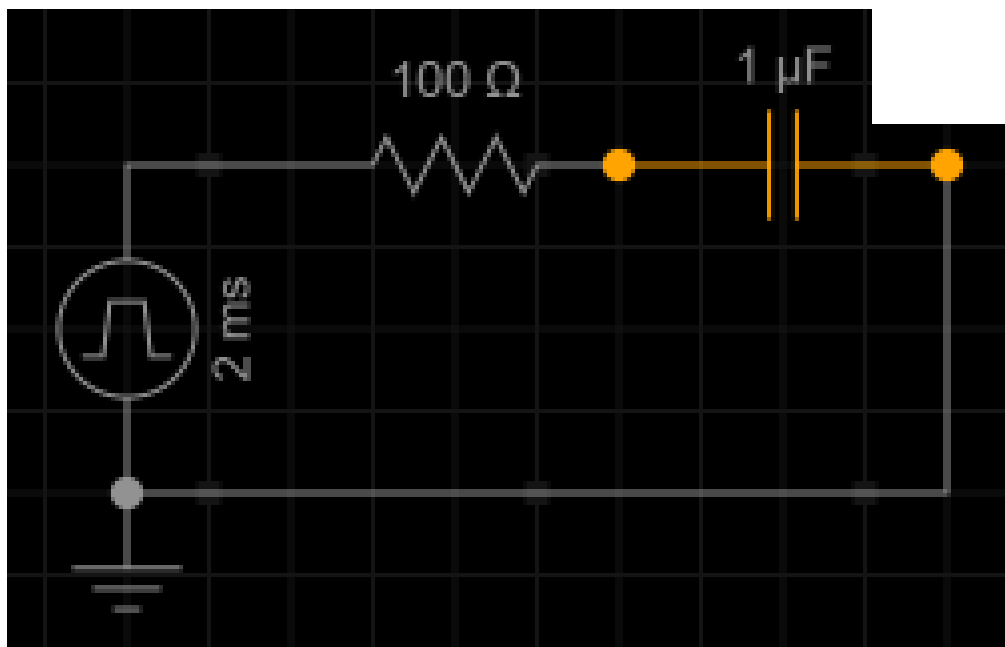
=



Lista de Simulação III

1. Simular o seguinte circuito, com os seguintes componentes:

Uma fonte de tensão independente de tipo de amplitude, 50% do ciclo útil, etc); um resistor de 100 Ω e um capacitor de 1 μF .

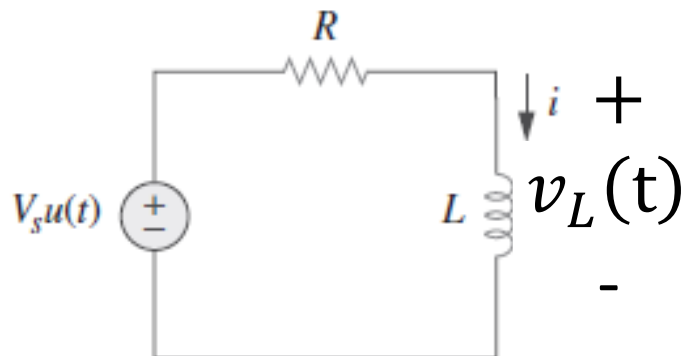


Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário

Considerando uma fonte de tensão CC, conhecendo as características do indutor: $i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_S$

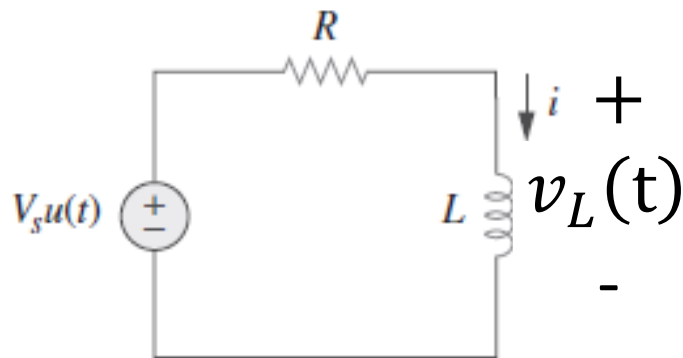


Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário

Considerando uma fonte de tensão CC, conhecendo as características do indutor: $i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_S$



$$\text{LKT: } -V_S u(t) + v_R + v_L = 0$$

$$\text{Lei de Ohm em R: } v_R = i_L R$$

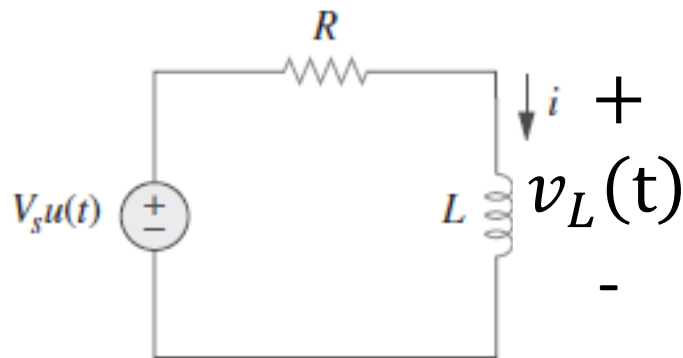
$$\text{Relação I-V em L: } v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário

Considerando uma fonte de tensão CC, conhecendo as características do indutor: $i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_S$



$$\text{LKT: } -V_S u(t) + v_R + v_L = 0$$

$$\text{Lei de Ohm em R: } v_R = i_L R$$

$$\text{Relação I-V em L: } v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$\text{Para } t > 0 \text{ (} u(t) = 1 \text{): } -V_S + i_L R + L \frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_S}{L} - \frac{i_L R}{L}$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} \left(i_L - \frac{V_S}{R} \right)$$

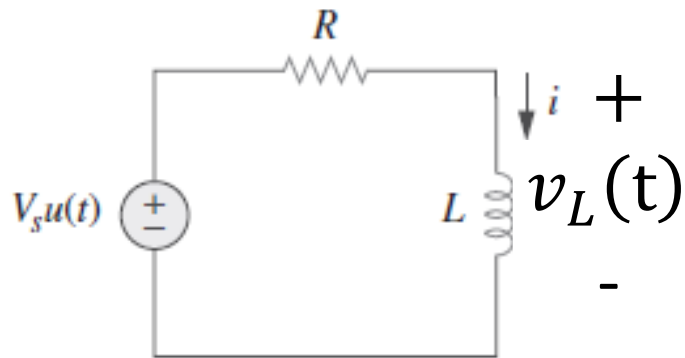


Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário

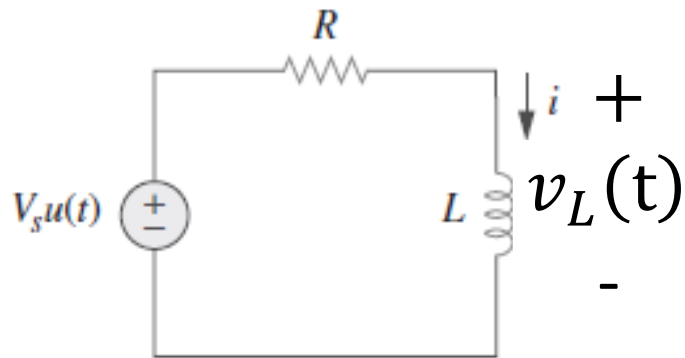
$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} \left(i_L - \frac{V_S}{R} \right)$$



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário



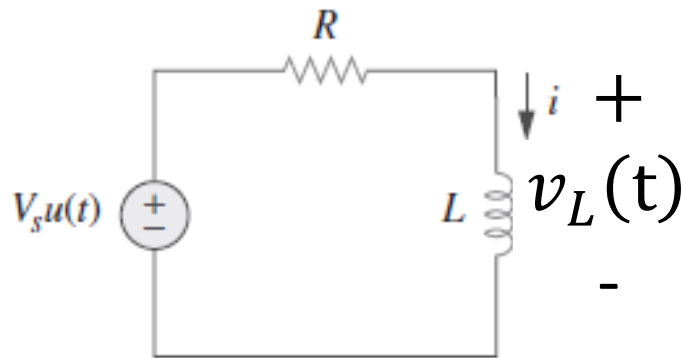
$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} \left(i_L - \frac{V_S}{R} \right)$$

$$\frac{1}{\left(i_L - \frac{V_S}{R} \right)} di_L = -\frac{R}{L} dt$$

Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário



$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} \left(i_L - \frac{V_S}{R} \right)$$

$$\frac{1}{\left(i_L - \frac{V_S}{R} \right)} di_L = -\frac{R}{L} dt$$

Integrando a ambos lados:

$$\int_{I_0}^{i_t} \frac{1}{\left(i_L - \frac{V_S}{R} \right)} di_L = \int_0^t -\frac{R}{L} dt$$

$$\ln \left(i(t) - \frac{V_S}{R} \right) - \ln \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) = -\frac{Rt}{L}$$

$$\ln \left(i_L - \frac{V_S}{R} \right) \Big|_{I_0}^{i(t)} = -\frac{Rt}{L} \Big|_0^t$$

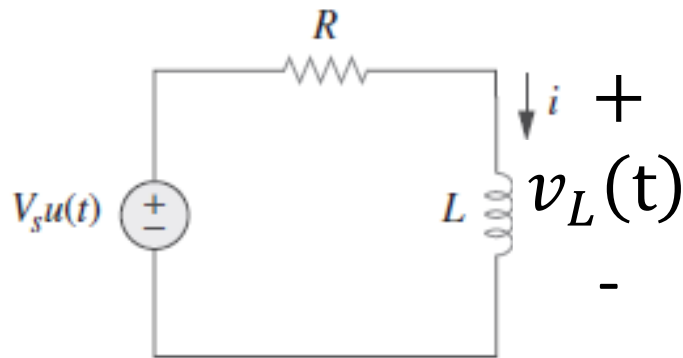
$$\ln \left(\frac{i(t) - \frac{V_S}{R}}{I_0 - \frac{V_S}{R}} \right) = -\frac{Rt}{L}$$



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor
Resposta ao degrau unitário

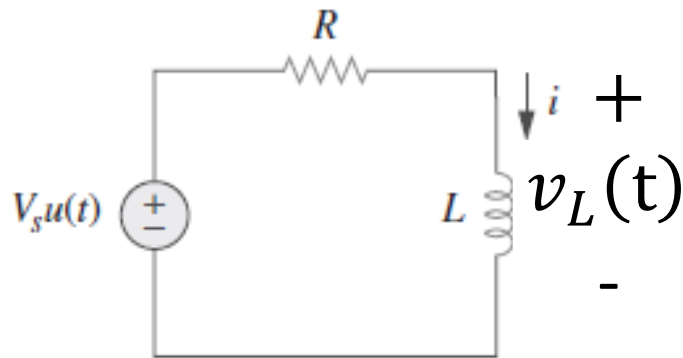
$$\ln \left(\frac{i(t) - \frac{V_S}{R}}{I_0 - \frac{V_S}{R}} \right) = -\frac{Rt}{L}$$



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário



$$i(t) - \frac{V_S}{R} = \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

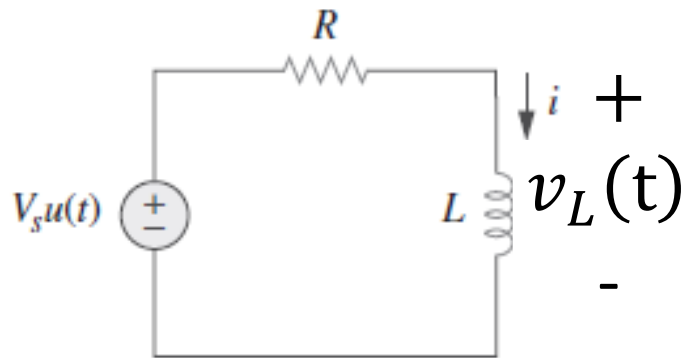
$$\ln \left(\frac{i(t) - \frac{V_S}{R}}{I_0 - \frac{V_S}{R}} \right) = -\frac{Rt}{L}$$

$$\frac{\left(i(t) - \frac{V_S}{R} \right)}{\left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right)} = e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário



$$i(t) - \frac{V_S}{R} = \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$\ln \left(\frac{i(t) - \frac{V_S}{R}}{I_0 - \frac{V_S}{R}} \right) = -\frac{Rt}{L}$$

$$\frac{\left(i(t) - \frac{V_S}{R} \right)}{\left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right)} = e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Resposta ao degrau unitário do circuito RL para $t > 0$:

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Sendo:

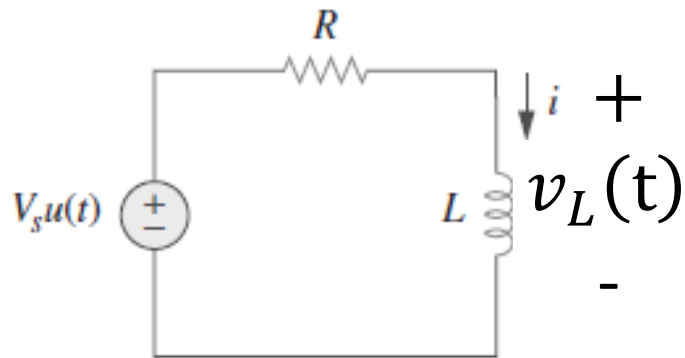
I_S : corrente da fonte

I_0 : condição inicial,
quando $I_c = I_0$

Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

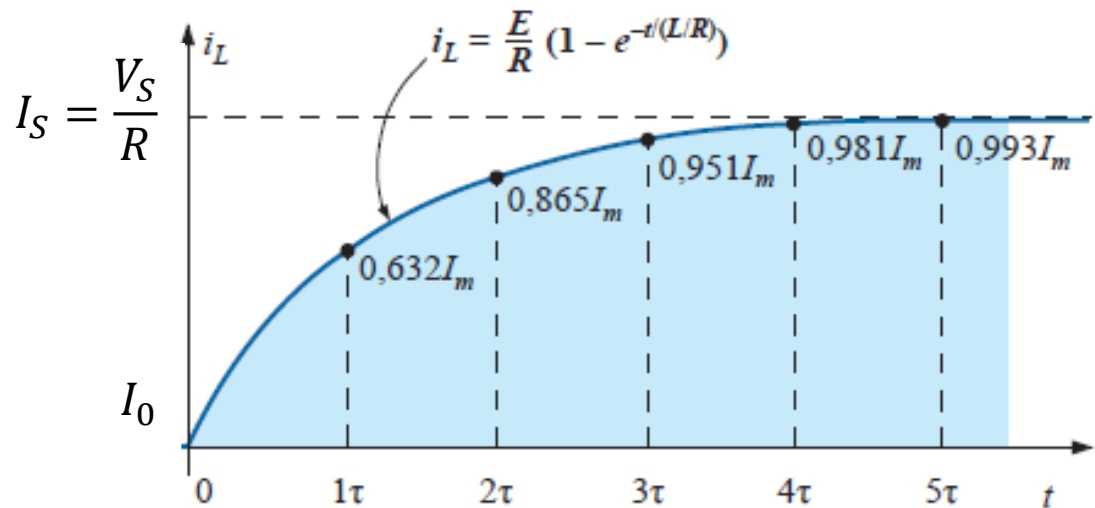
Resposta ao degrau unitário



$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

**Constante de tempo,
em segundos:**

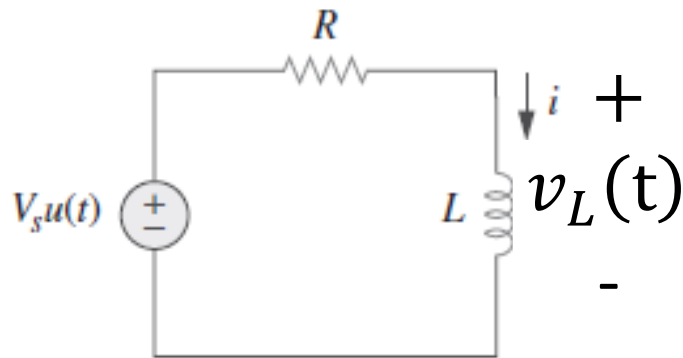
$$\tau = \frac{L}{R}$$



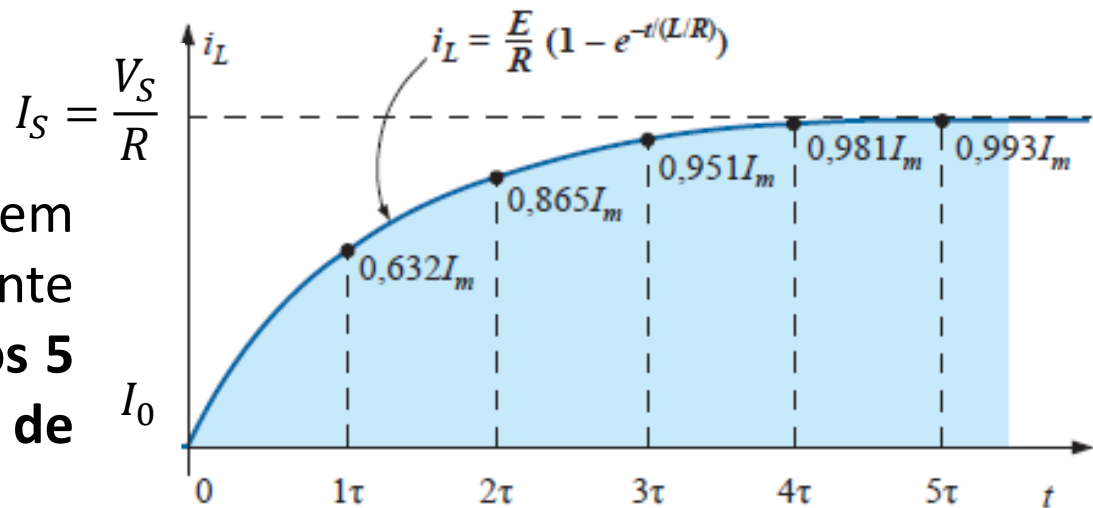
Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário



$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$



A corrente por um indutor em um circuito CC é essencialmente igual à corrente aplicada após 5 constantes de tempo da fase de carga.



Etapas de carga e descarga do indutor

Resposta total ou completa ao degrau unitário

Resposta completa = resposta transiente + resposta em regime estacionário

parte temporária parte permanente



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta total ou completa ao degrau unitário

Resposta completa = resposta transiente + resposta em regime estacionário
parte temporária parte permanente

$$i(t) = i_t + i_{ss}$$

$$i_{ss} = \frac{V_S}{R} \quad i_t = \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-t \frac{R}{L}}$$



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

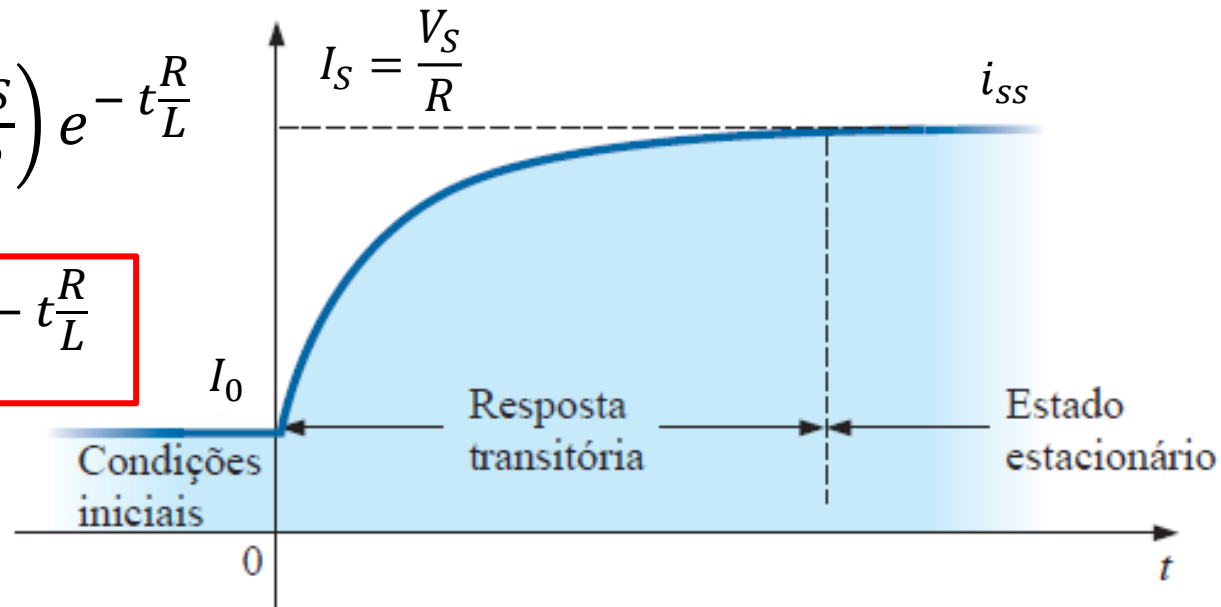
Resposta total ou completa ao degrau unitário

Resposta completa = resposta transiente + resposta em regime estacionário
parte temporária parte permanente

$$i(t) = i_t + i_{ss}$$

$$i_{ss} = \frac{V_S}{R} \quad i_t = \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-t \frac{R}{L}}$$

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-t \frac{R}{L}}$$



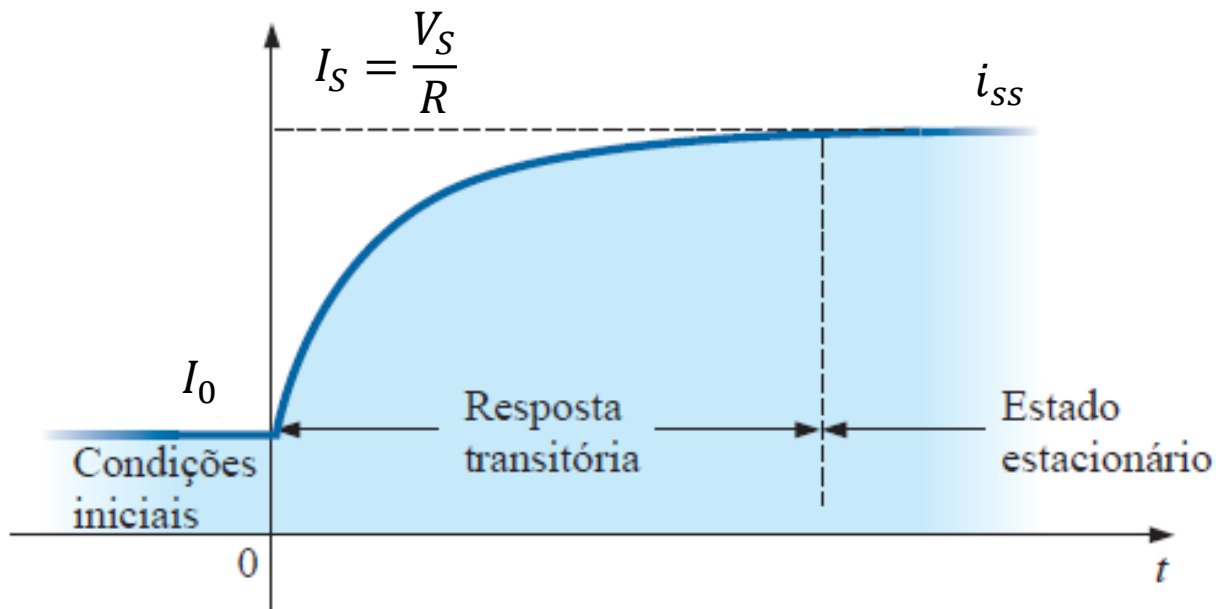


Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta total ou completa ao degrau unitário

$$i(t) = \begin{cases} I_0, & t < 0 \\ \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}, & t > 0 \end{cases}$$





Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

E a tensão v_L ?



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

E a tensão v_L ?

É conhecido que: $v_L = L \frac{di}{dt}$, e considerando $I_0=0$

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-t\frac{R}{L}} = \frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-t\frac{R}{L}}$$



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

E a tensão v_L ?

É conhecido que: $v_L = L \frac{di}{dt}$, e considerando $I_0=0$

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-t\frac{R}{L}} = \frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-t\frac{R}{L}}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d\left(\frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-t\frac{R}{L}}\right)}{dt} = 0 - \frac{V_S}{R} \frac{d(e^{-t\frac{R}{L}})}{dt} = -\frac{V_S}{R} e^{-t\frac{R}{L}} \left(-\frac{R}{L}\right)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = V_S \frac{1}{L} e^{-t\frac{R}{L}}$$



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = V_s \frac{1}{L} e^{-t \frac{R}{L}}$$



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário

$$v_L = L \frac{di}{dt} \qquad \frac{di(t)}{dt} = V_s \frac{1}{L} e^{-t \frac{R}{L}}$$

$$v_L = LV_s \frac{1}{L} e^{-t \frac{R}{L}}$$



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário

$$v_L = L \frac{di}{dt} \quad \frac{di(t)}{dt} = V_S \frac{1}{L} e^{-t \frac{R}{L}}$$

$$v_L = LV_S \frac{1}{L} e^{-t \frac{R}{L}}$$

**Resposta ao degrau unitário
do circuito RL para $t > 0$:**

$$v_L = V_S e^{-t \frac{R}{L}}$$

Sendo:

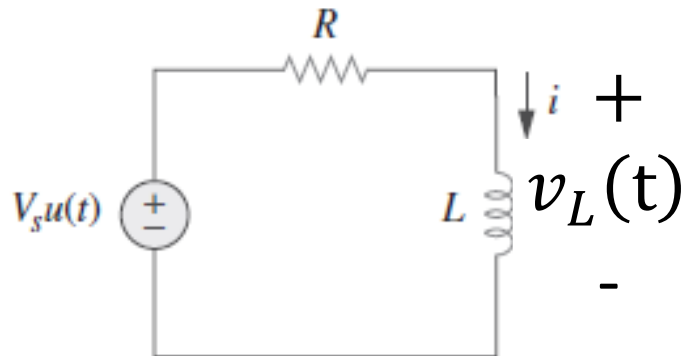
V_S : tensão da fonte

V_0 : condição inicial,
quando $V_L = V_0 = 0$

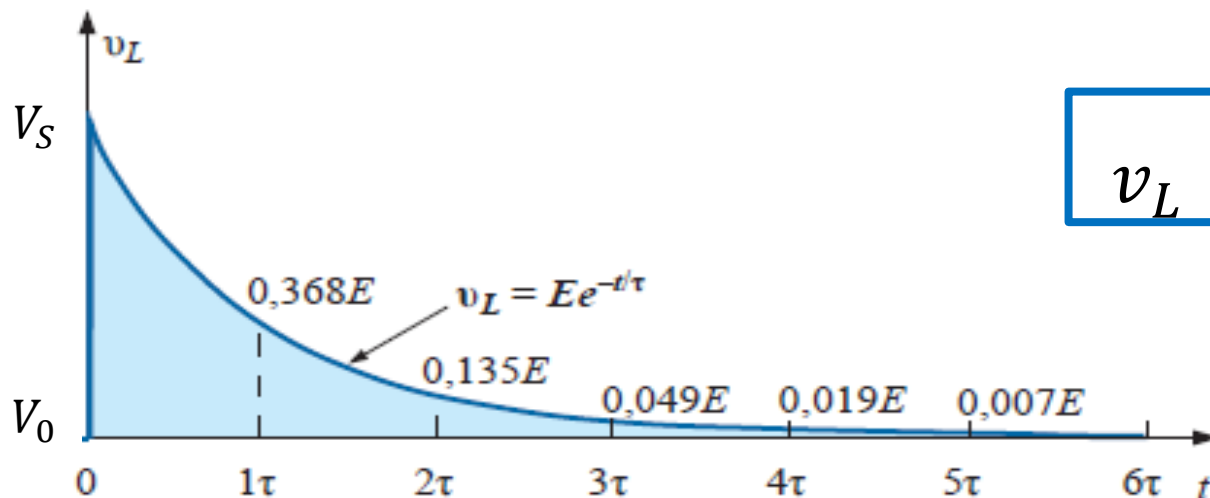
Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário



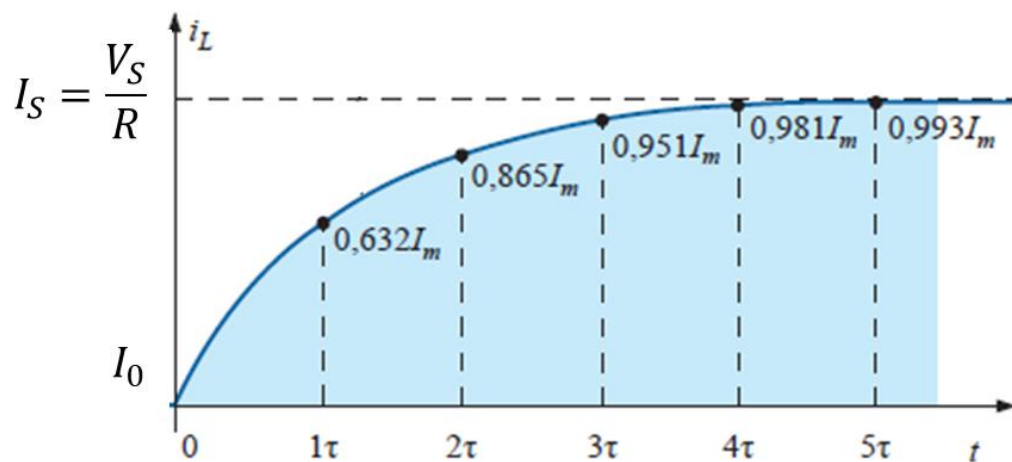
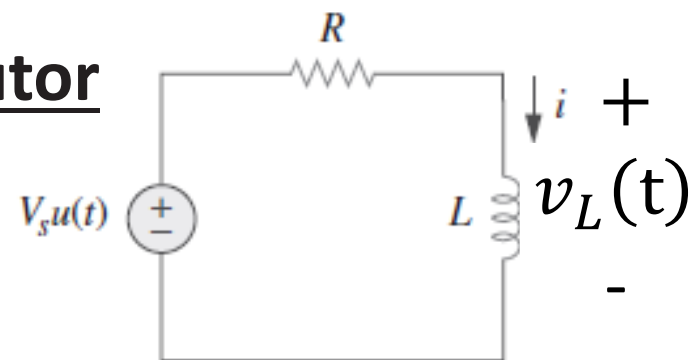
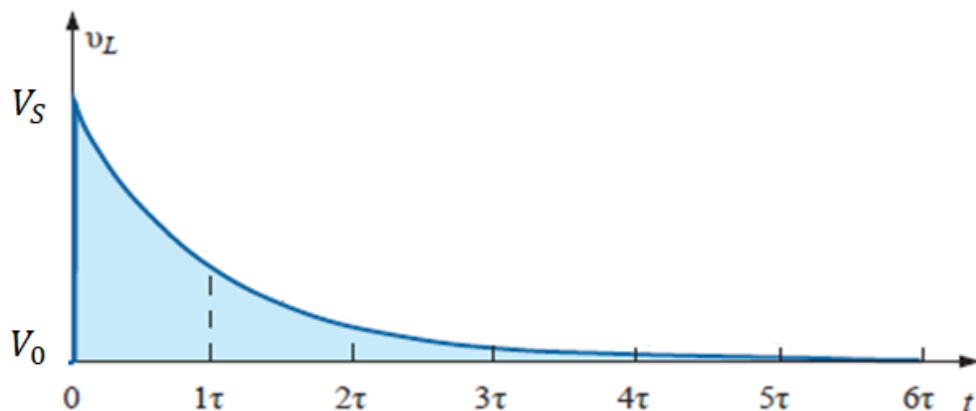
A tensão entre os terminais de um **indutor** em um circuito CC é essencialmente **igual a 0** após 5τ da fase de carga.



$$v_L = V_S e^{-t \frac{R}{L}}$$

Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor **Resposta ao degrau unitário**



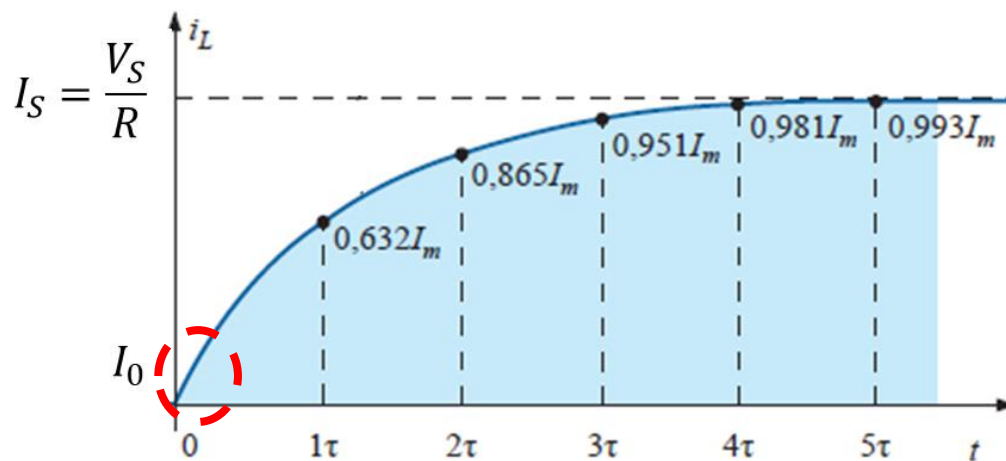
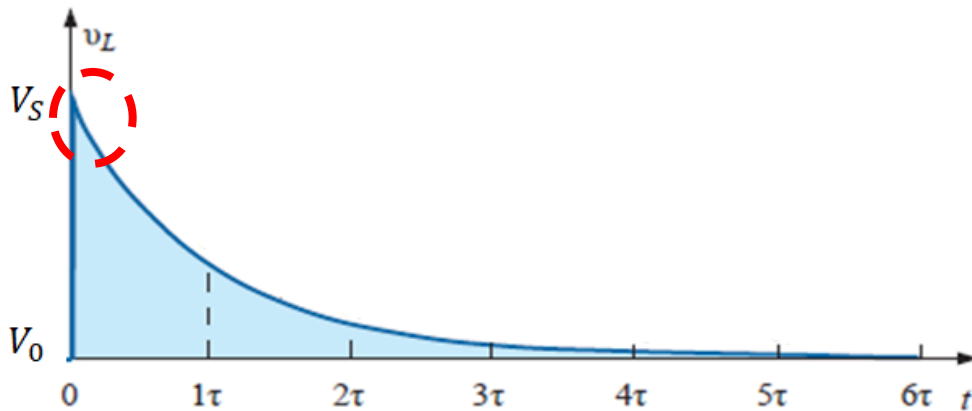
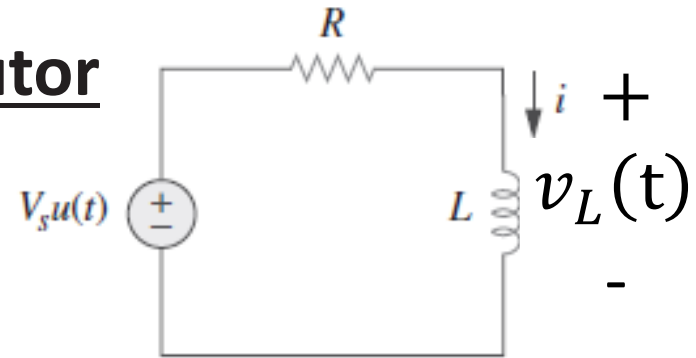
Comentários ...



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

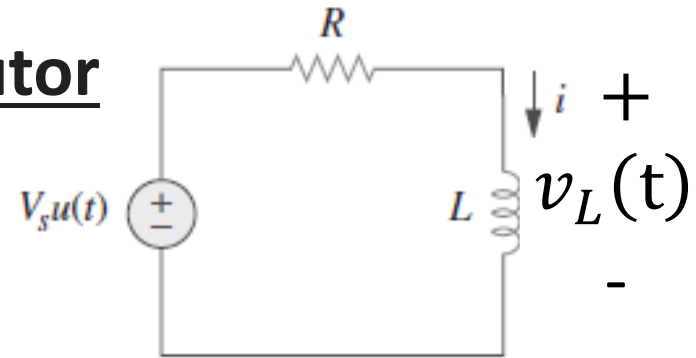
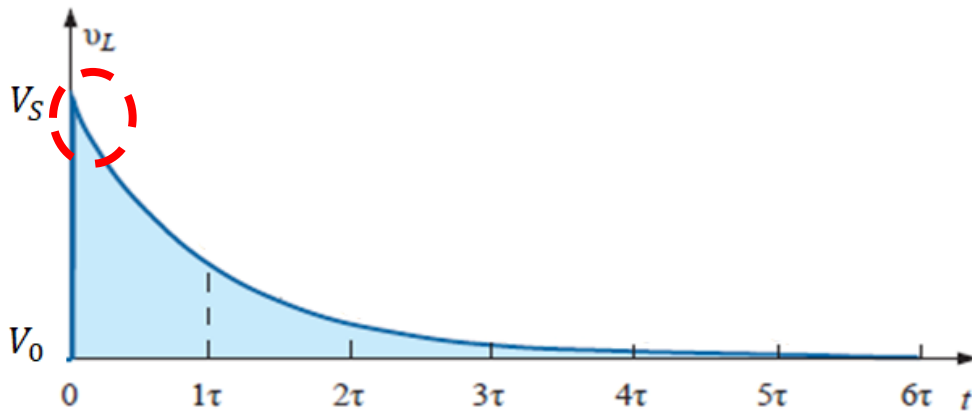
Resposta ao degrau unitário



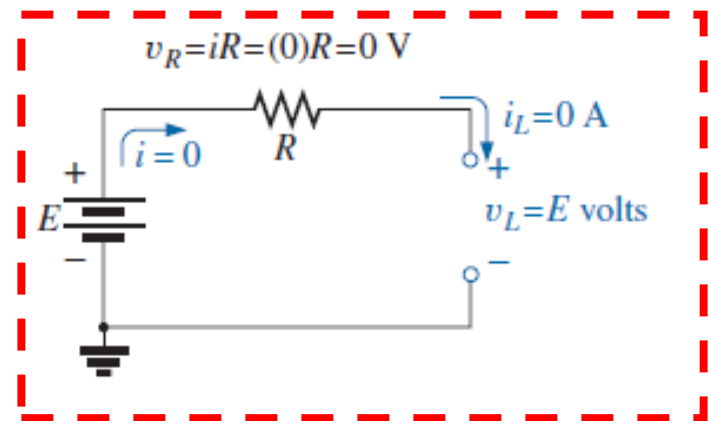
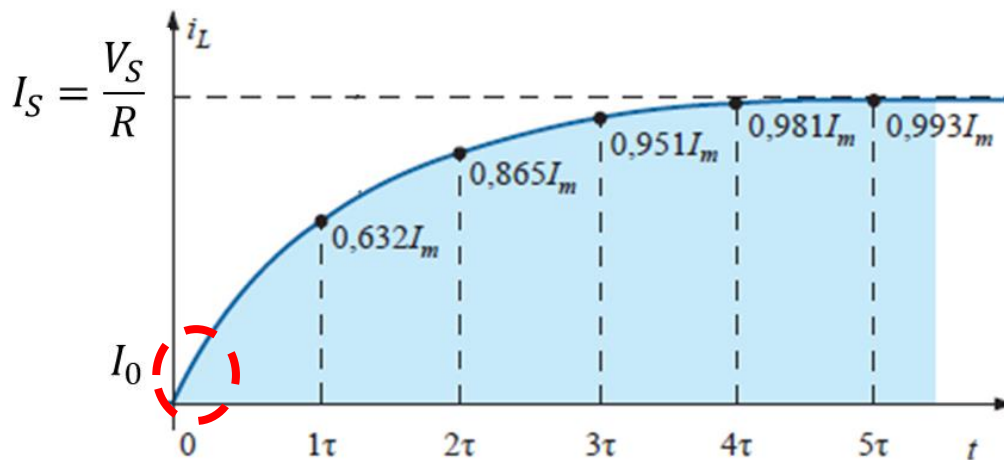
Circuito RL

Etapas de carga e descarga do indutor

Resposta ao degrau unitário



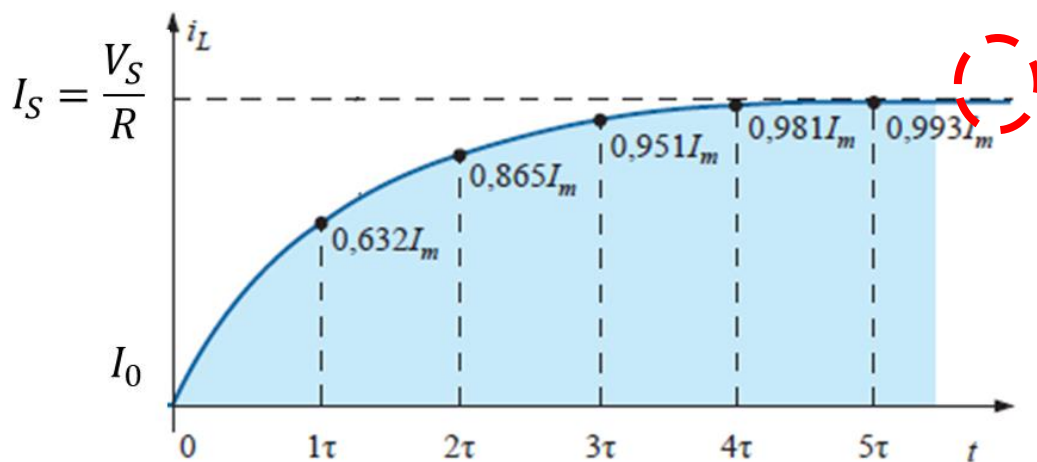
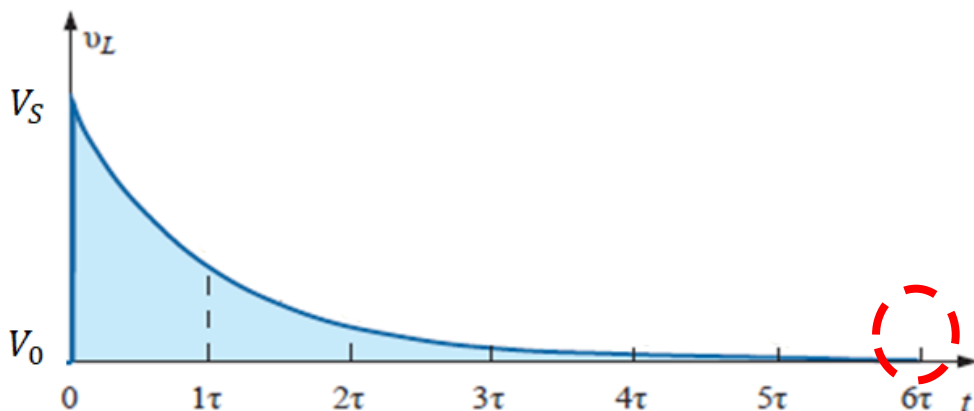
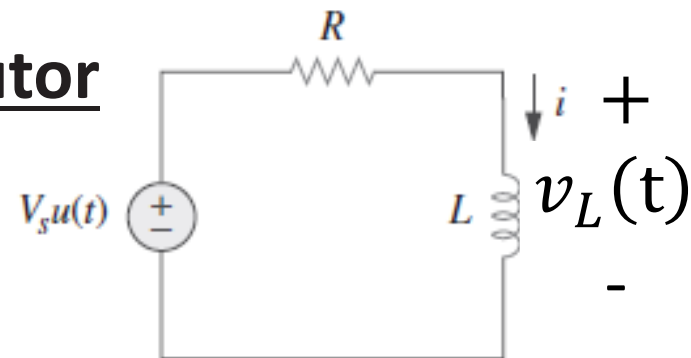
Um indutor pode ser substituído por um circuito aberto equivalente no instante que começa a carga do circuito RL.



Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

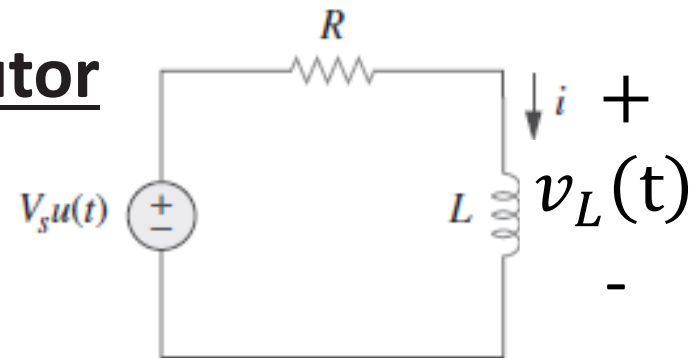
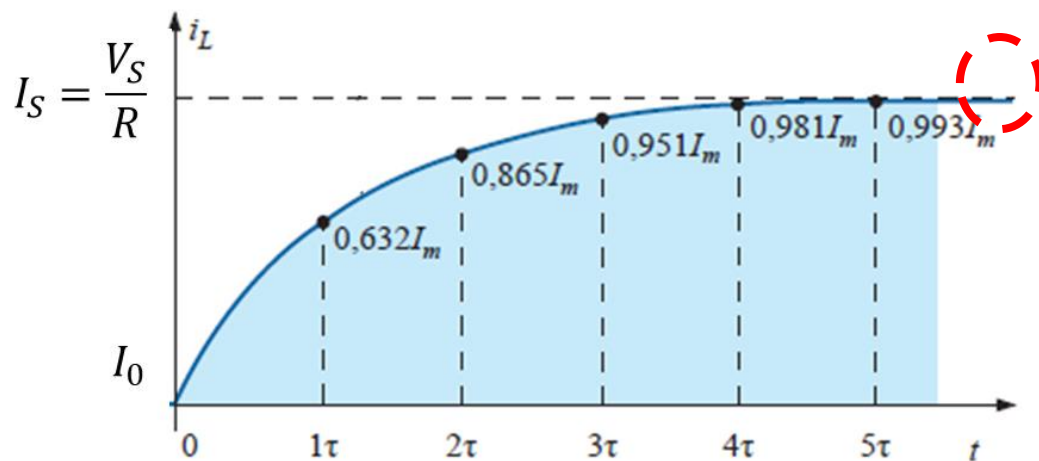
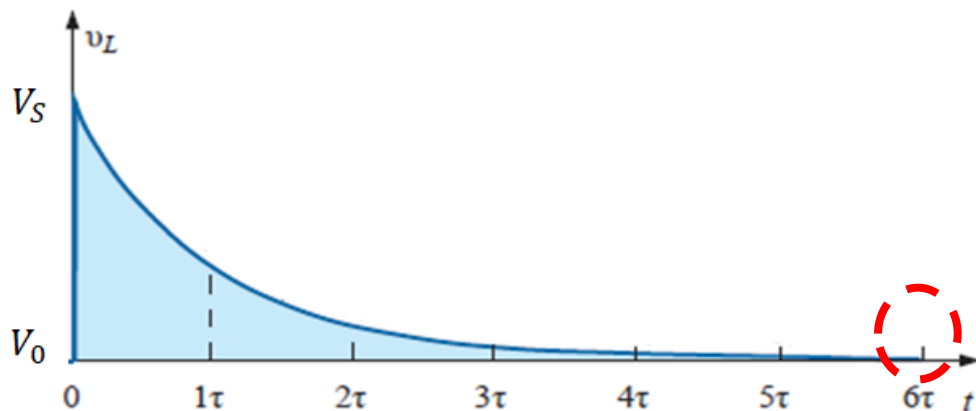
Resposta ao degrau unitário



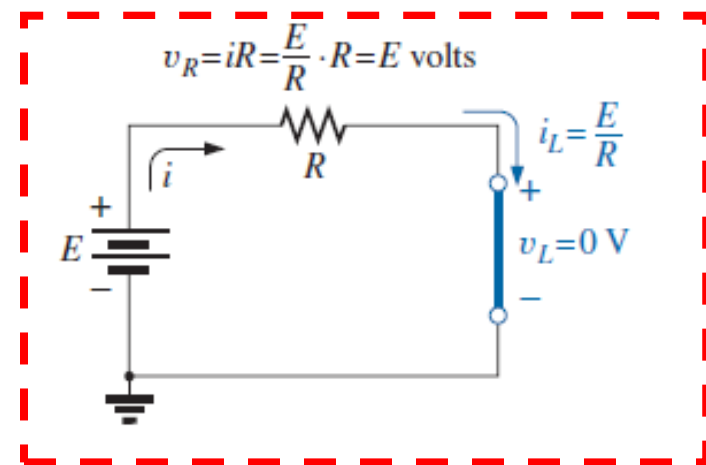
Circuito RL

Etapas de **carga** e **descarga** do indutor

Resposta ao degrau unitário



Um **indutor** pode ser **substituído** por um **curto-circuito** equivalente no instante que **termina a carga** do circuito RL.





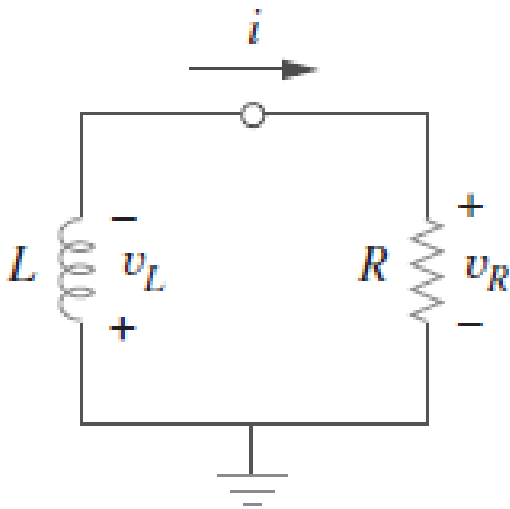
Circuitos de 1^{ra} ordem.

Circuito RL.

Fase de descarga do indutor

Circuito RL

Etapas de carga e descarga do indutor



Considerando L inicialmente carregado: $i_L = I_0$

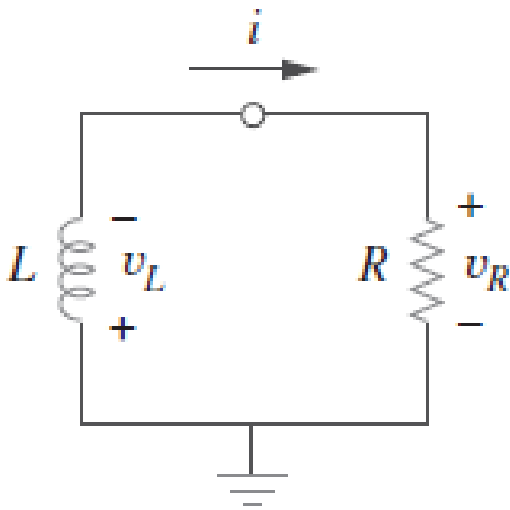
$$\text{LKT: } v_L + v_R = 0$$

$$\text{Lei de Oh em R: } v_R = iR$$

$$\text{Relação I-V em L: } v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Circuito RL

Etapas de carga e descarga do indutor



Considerando L inicialmente carregado: $i_L = I_0$

$$\text{LKT: } v_L + v_R = 0$$

$$\text{Lei de Oh em R: } v_R = iR$$

$$\text{Relação I-V em L: } v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Considerando que: $i_C = i$

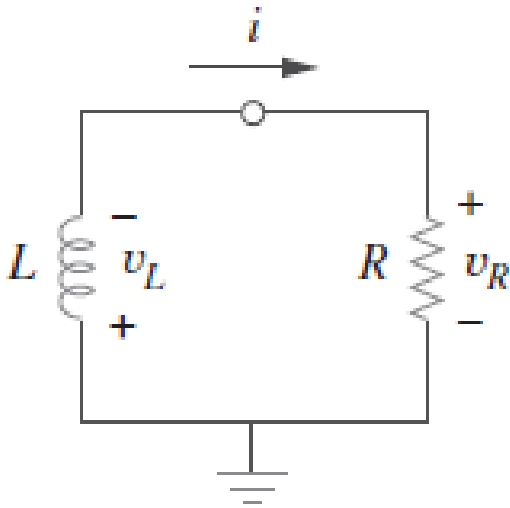
$$L \frac{di}{dt} + iR = 0$$

A solução dessa expressão é alguma função cuja derivada (di/dt) seja igual à própria função (i).
Ou seja, uma exponencial, na forma:

$$i(t) = k e^{st} \quad i(t) : \text{função corrente em L no tempo,} \\ k \text{ e } S : \text{parâmetros ajustáveis.}$$

Circuito RL

Etapas de carga e descarga do indutor

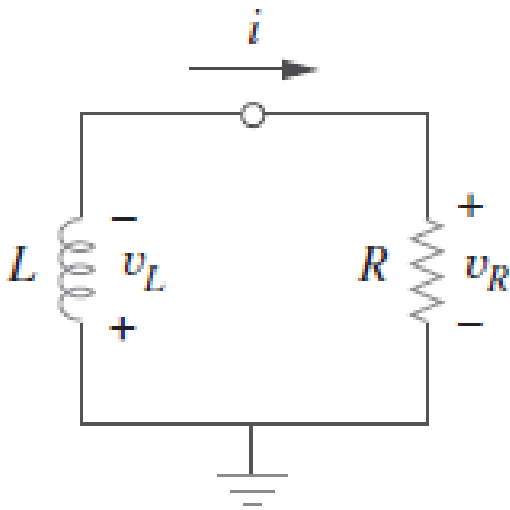


$$L \frac{di}{dt} + iR = 0$$

$$i(t) = k e^{st}$$

Circuito RL

Etapas de carga e descarga do indutor



$$L \frac{di}{dt} + iR = 0$$

$$i(t) = ke^{st}$$

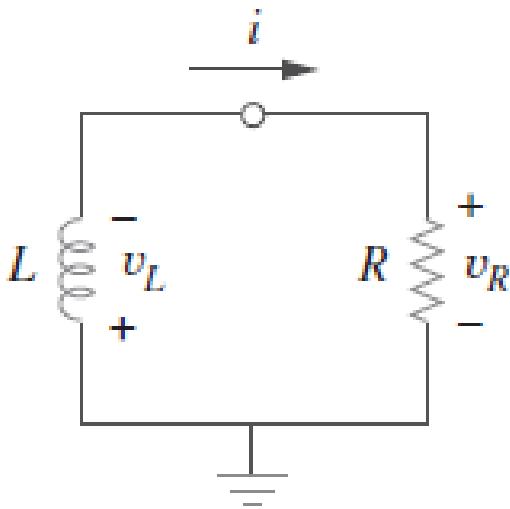
$$L \frac{d(ke^{st})}{dt} + R(ke^{st}) = 0$$

$$Lske^{st} + Rke^{st} = 0$$

$$ke^{st} (sL + R) = 0$$

Circuito RL

Etapas de carga e descarga do indutor



$$L \frac{di}{dt} + iR = 0$$

$$i(t) = k e^{st}$$

$$L \frac{d(k e^{st})}{dt} + R(k e^{st}) = 0$$

$$L s k e^{st} + R k e^{st} = 0$$

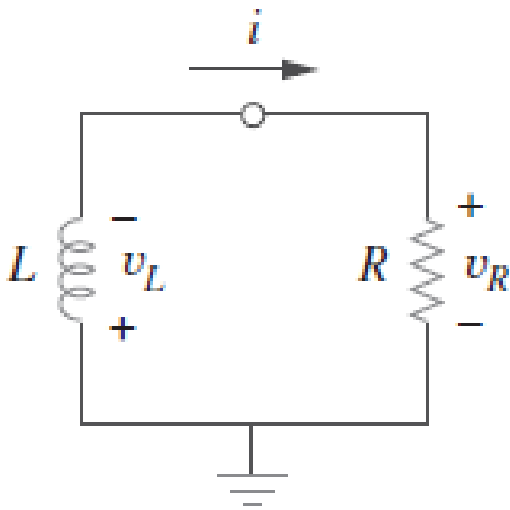
$$k e^{st} (sL + R) = 0$$

Existem 3 soluções:

$$\begin{array}{lcl}
 k = 0 & \longrightarrow & \text{Carga inicial em L igual a 0} \\
 e^{st} = 0 & \longrightarrow & e^{st} = e^{-\infty} \longrightarrow \begin{array}{l} s < 0 \\ t = \infty \end{array}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} k = 0 \\ e^{st} = 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Soluções} \\ \text{não} \\ \text{viáveis} \end{array}$$

Circuito RL

Etapas de carga e descarga do indutor



$$L \frac{di}{dt} + iR = 0$$

$$i(t) = ke^{st}$$

$$L \frac{d(ke^{st})}{dt} + R(ke^{st}) = 0$$

$$Lske^{st} + Rke^{st} = 0$$

$$ke^{st} (sL + R) = 0$$

Existem 3 soluções:

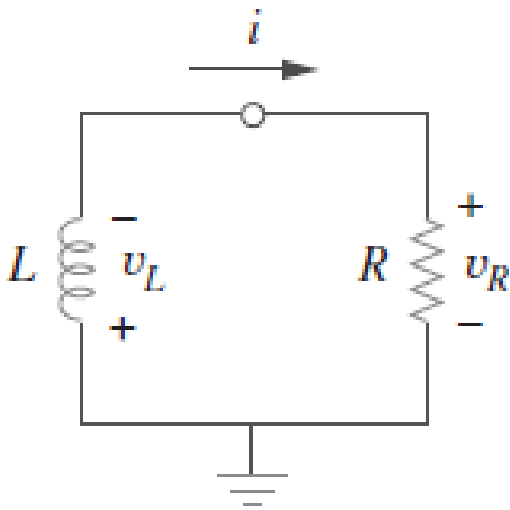
$$sL + R = 0$$

Solução viável



Circuito RL

Etapas de carga e descarga do indutor

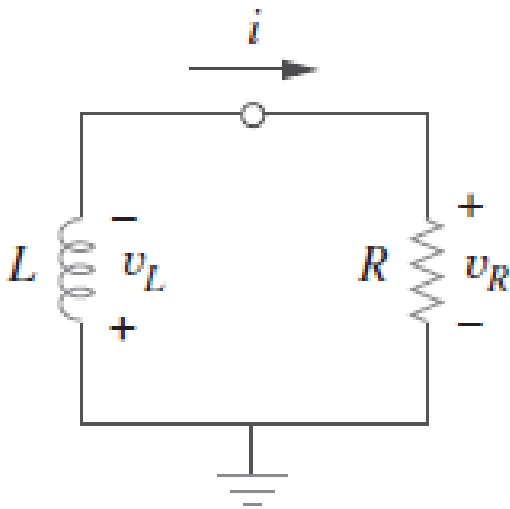


$$ke^{st}(sL + R) = 0$$

$$sL + R = 0$$

Circuito RL

Etapas de carga e descarga do indutor



$$ke^{st}(sL + R) = 0$$

$$sL + R = 0$$

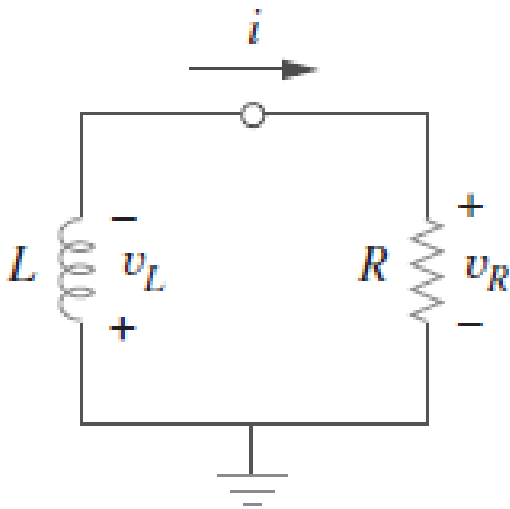
Se cumpre se: $s = -\frac{R}{L}$

Portanto:

$$i(t) = ke^{st} \quad i(t) = ke^{-t\frac{R}{L}}$$

Circuito RL

Etapas de carga e descarga do indutor



$$ke^{st} (sL + R) = 0$$

$$sL + R = 0$$

$$\text{Se cumpre se: } s = -\frac{R}{L}$$

Portanto:

$$i(t) = ke^{st} \quad i(t) = ke^{-t\frac{R}{L}}$$

Considerando a condição inicial, $t = 0$, quando $i_L = I_0$, então:

$$i(0) = I_0 = ke^{-0\frac{R}{L}} \quad \longrightarrow \quad k = I_0$$

$$i(t) = I_0 e^{-t\frac{R}{L}}$$



Circuito RL

Etapas de carga e descarga do indutor

**Resposta natural do circuito RL,
com L inicialmente carregado:**

$$i(t) = I_0 e^{-t \frac{R}{L}}$$

Sendo:

I_0 : condição inicial,
quando $i_c = I_0 \neq 0$

Circuito RL

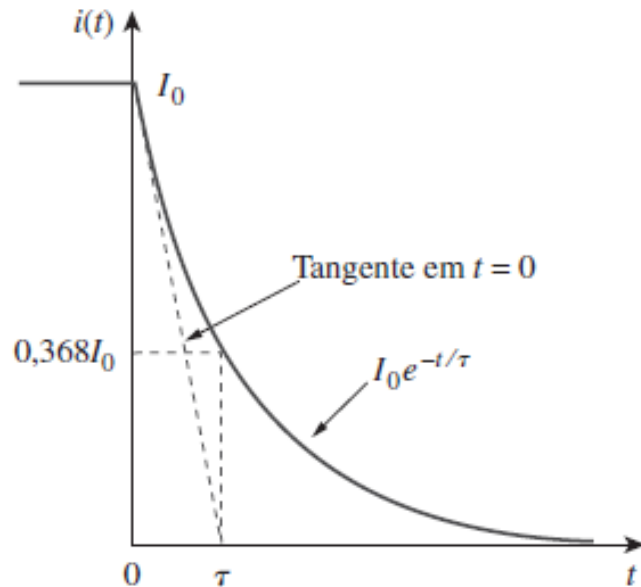
Etapas de carga e descarga do indutor

Resposta natural do circuito RL,
com L inicialmente carregado:

$$i(t) = I_0 e^{-t \frac{R}{L}}$$

Sendo:

I_0 : condição inicial,
quando $i_c = I_0 \neq 0$



Constante de tempo,
em segundos:

$$\tau = \frac{L}{R}$$



Resumos das características de R, C e L

Relação	Resistor (R)	Capacitador (C)	Indutor (L)
$v-i$:	$v = iR$	$v = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0)$	$v = L \frac{di}{dt}$
$i-v$:	$i = v/R$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0)$
p ou w :	$p = i^2 R = \frac{v^2}{R}$	$w = \frac{1}{2} C v^2$	$w = \frac{1}{2} L i^2$
Série:	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$	$L_{eq} = L_1 + L_2$
Paralelo:	$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$C_{eq} = C_1 + C_2$	$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$
Em CC:	Idem	Circuito aberto	Curto-circuito
Variável do cicuito que não pode mudar abruptamente:	Não se aplica	v	i

[†] Supõe-se o uso da regra de sinais (passivo).



Exercícios

1. Estudar os exemplos e o conteúdo da aula.



Referências

Alexader, C. K., Sadiku, M., N., O. Fundamentos Circuitos Elétricos , 5ta ed. Mc Graw Hill, 2013.

Boylestad, R., L. Introdução à análise de circuitos, 12nd ed. Pearson, 2012.

<https://pt.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-natural-and-forced-response/a/ee-rc-natural-response>

Figura Lembrando :

<https://zenkit.com/en/blog/10-ways-to-remember-what-you-study/>



Universidade de São Paulo (USP), Escola
de Engenharia de Lorena (EEL),
Curso de Engenharia Física



Obrigado

Prof. Dr. Andy Blanco Rodriguez

andy.blanco@usp.br

**Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR), Sala A 53C, Área II da EEL-USP,
Estrada Chiquito de Aquino, N° 1000, Lorena, São Paulo, Brasil.**