



Universidade de São Paulo (USP), Escola
de Engenharia de Lorena (EEL),
Curso de Engenharia Física



Circuitos Elétricos - teoria e prática (LOM3262)

Prof. Dr. Andy Blanco Rodriguez

**Lorena-SP
2025/2**



- Capacitores;
- Circuitos de 1^{ra} ordem. Circuito RC;
- Circuito RC, fase de carga do capacitor;
- Circuito RC, fase de descarga do capacitor.

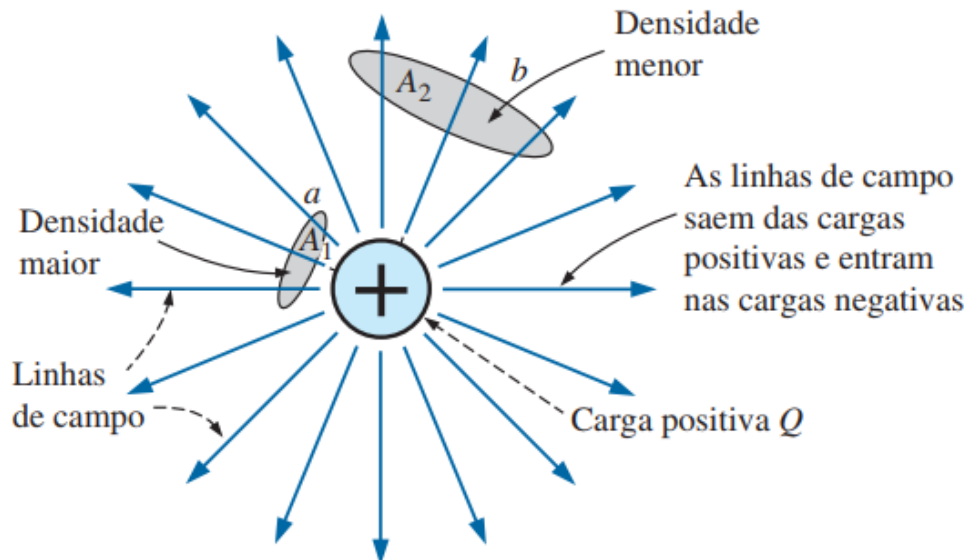


Capacitores



Capacitores

Campo elétrico



Distribuição das linhas de campo em torno de uma carga positiva isolada.

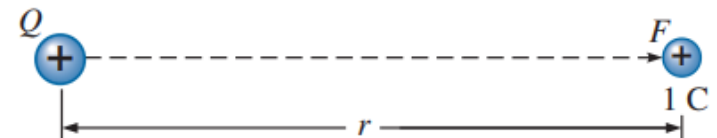
Intensidade do campo elétrico:

$$\mathcal{E} = \frac{kQ}{r^2} \quad (\text{N/C})$$

$K = 9 \times 10^9 \text{ N} \times \text{m}^2/\text{C}^2$;

Q : carga;

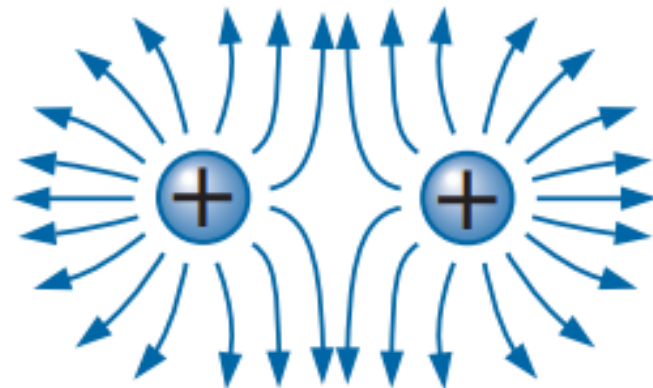
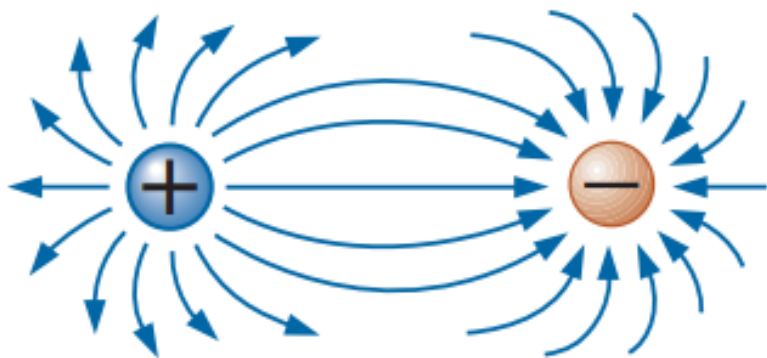
r : distância entre as cargas.



A intensidade do campo (designada pela letra $\mathcal{E}$) em um ponto é a força que atua em uma carga unitária positiva nesse ponto.

Capacitores

Campo elétrico



Distribuição de linhas de campo: **(a) cargas de tipos opostos; (b) cargas do mesmo tipo.**

As linhas de campo se dirigem de um corpo positivamente carregado para um corpo negativamente carregado, sempre começam ou terminam perpendicularmente às superfícies carregadas e nunca se interceptam.



Capacitores

Campo elétrico

Considerando o campo elétrico produzido pelas placas paralelas, e a diferença de potencial entre as placas, é obtida a expressão:

$$v = \frac{\sigma L}{\epsilon_0} \quad (\text{Eq 1})$$

Sendo:

v : Diferença de potencial entre as placas do capacitor;

σ : Densidade superficial de cargas;

L : Distância de separação entre as placas;

ϵ_0 : Permissividade do material entre as placas.



Capacitores

Campo elétrico

Considerando o campo elétrico produzido pelas placas paralelas, e a diferença de potencial entre as placas, é obtida a expressão:

$$v = \frac{\sigma L}{\epsilon_0} \quad (\text{Eq 1})$$

Sendo:

v : Diferença de potencial entre as placas do capacitor;

σ : Densidade superficial de cargas;

L : Distância de separação entre as placas;

ϵ_0 : Permissividade do material entre as placas.

Ademais, é conhecido que σ é a relação entre a quantidade de carga armazenada na placa (Q) e a área dessa placa (A):

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (\text{Eq 2})$$

Sendo:

Q : Quantidade de carga armazenada na placa;

A : Área da placa.



Capacitores

Capacitância

$$v = \frac{\sigma L}{\epsilon_0} \quad (\text{Eq 1})$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (\text{Eq 2})$$

Substituindo a Eq 2 na Eq 1:

$$v = \frac{QL}{A\epsilon_0}$$

$$Q = v \frac{A\epsilon_0}{L} \quad (\text{Eq 3})$$



Capacitores

Capacitância

$$v = \frac{\sigma L}{\epsilon_0} \quad (\text{Eq 1})$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (\text{Eq 2})$$

Substituindo a Eq 2 na Eq 1:

$$v = \frac{QL}{A\epsilon_0}$$

$$Q = v \frac{A\epsilon_0}{L} \quad (\text{Eq 3})$$

Capacitância (C)

$$C = \frac{A\epsilon_0}{L} \quad (\text{Eq 4})$$



Capacitores

Capacitância

$$v = \frac{\sigma L}{\epsilon_0} \quad (\text{Eq 1})$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (\text{Eq 2})$$

Substituindo a Eq 2 na Eq 1:

$$v = \frac{QL}{A\epsilon_0}$$

$$Q = v \frac{A\epsilon_0}{L} \quad (\text{Eq 3})$$

Capacitância (C)

$$C = \frac{A\epsilon_0}{L} \quad (\text{Eq 4})$$

A capacitância é a habilidade do capacitor de armazenar energia em seu campo elétrico. A unidade de medida é o farad (F), em homenagem ao físico inglês Michael Faraday (1791-1867).



Capacitores

Capacitância

$$v = \frac{\sigma L}{\epsilon_0} \quad (\text{Eq 1})$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (\text{Eq 2})$$

Substituindo a Eq 2 na Eq 1:

$$v = \frac{QL}{A\epsilon_0}$$

$$Q = v \frac{A\epsilon_0}{L} \quad (\text{Eq 3})$$

1 farad (F), é definido como um nível de capacitância que resulta em 1 coulomb de carga nas placas devido à aplicação de 1 volt entre estas.

$$1F = \frac{1C}{1V}$$

Capacitância (C)

$$C = \frac{A\epsilon_0}{L} \quad (\text{Eq 4})$$

A capacitância é a habilidade do capacitor de armazenar energia em seu campo elétrico. A unidade de medida é o farad (F), em homenagem ao físico inglês Michael Faraday (1791-1867).



Capacitores

Capacitância

$$Q = v \frac{A\epsilon_0}{L}$$

(Eq 3)

$$C = \frac{A\epsilon_0}{L}$$

(Eq 4)

Substituindo a Eq 4 na Eq 3:

$$C = \frac{Q}{v}$$

(Eq 5)

Capacitância (C)

A capacitância é uma **característica construtiva do capacitor**. Esta será maior quando a área das placas for maior e quando a permissividade do dielétrico for maior. E será inversamente proporcional à distância de separação das placas.



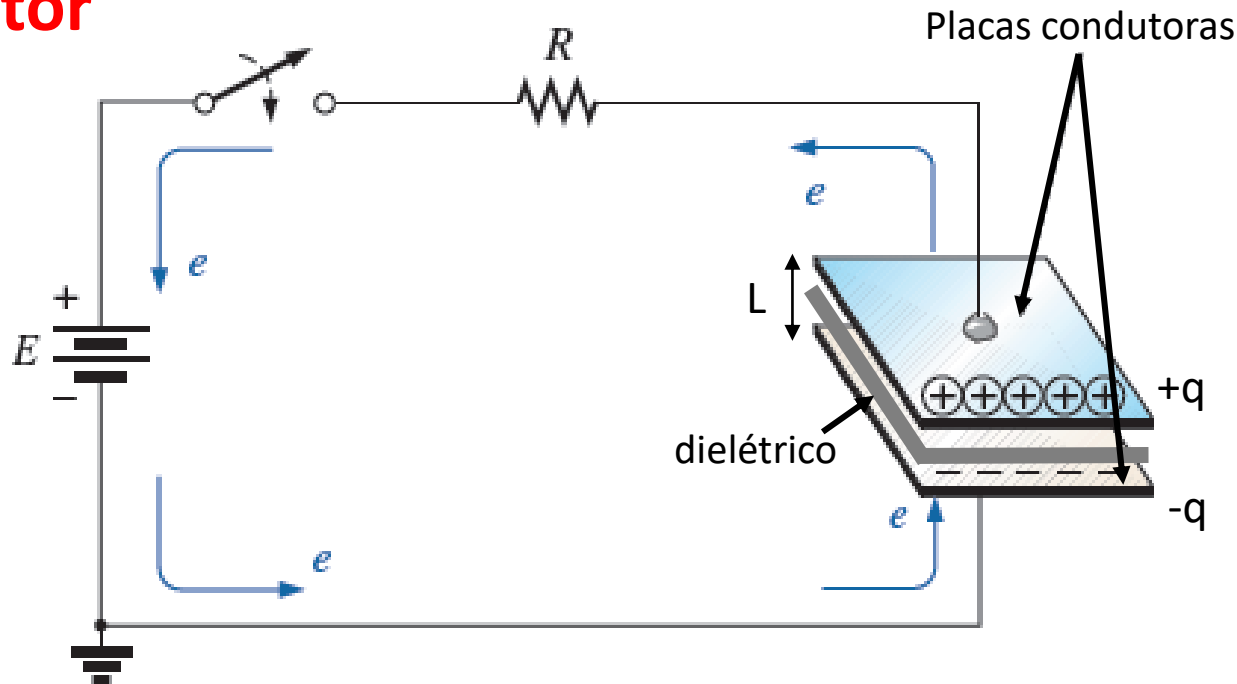
Capacitores

O Capacitor

O capacitor é um elemento passivo de dois terminais, projetado para armazenar energia em seu campo elétrico. Este possui múltiplas aplicações em eletrônica, comunicação, computadores e sistemas de potência.

Capacitores

O Capacitor



Ao aplicar um ΔV entre as placas de C , a o polo positivo da fonte atrai elétrons. O que provoca o surgimento de cargas positivas em C . Assim, uma placa terá $+q$ (e $+\sigma$) e a outra $-q$ ($-\sigma$), estabelecendo-se o campo elétrico.



Capacitores

O Capacitor

Formatos, tipos e símbolos

O **capacitor**, também chamado de **condensador** ou **acumulador**, **sempre tem uma estrutura de dois terminais e um isolante**. No entanto, este componente possui muitas variações.

Capacitores

O Capacitor

Formatos, tipos e símbolos

Classificação de acordo ao tipo de dielétrico:

Eletrolíticos

Uma substância não metálica (**eletrólito**) é colocada entre as placas de C.

Tem polaridade.

Sua faixa de **C** está entre μF e mF (**alta**).



Capacitores

O Capacitor

Formatos, tipos e símbolos

Classificação de acordo ao tipo de dielétrico:

Filme de poliéster

São **leves**, em termos de peso.

Podem ser usados outros dielétricos como mica e poliestireno.

Os capacitores de filme são enrolados e encerrados em filmes plásticos ou metálicos.





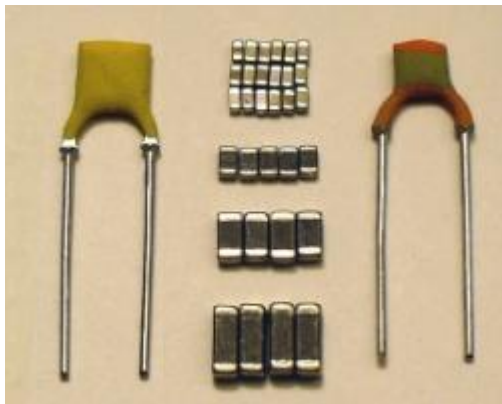
Capacitores

O Capacitor

Formatos, tipos e símbolos

Classificação de acordo ao tipo de dielétrico:

cerâmicos



mica



tântalo



<https://embarcados.com.br/tipos-de-capacitores/>

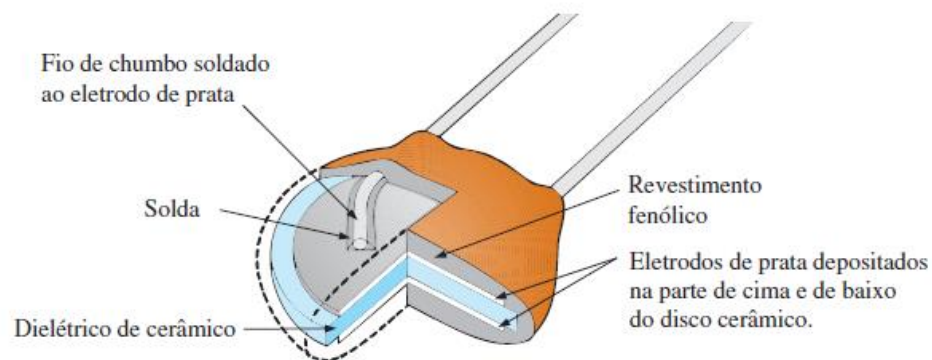
Capacitores

O Capacitor

Formatos, tipos e símbolos

Classificação de acordo ao formato:

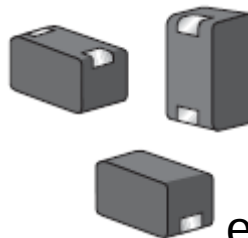
disco



cilíndrico



Montagem em superfície



eletrolíticos



filme de poliéster

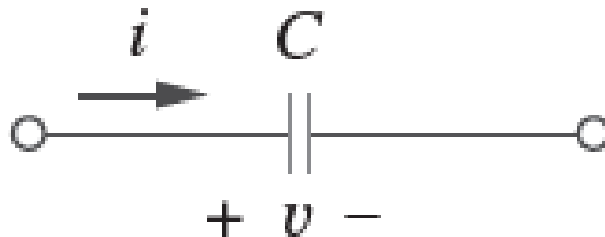
Capacitores

O Capacitor

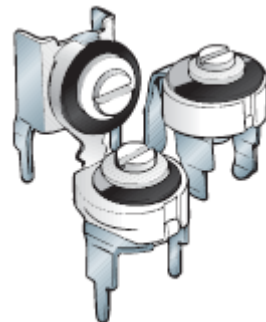
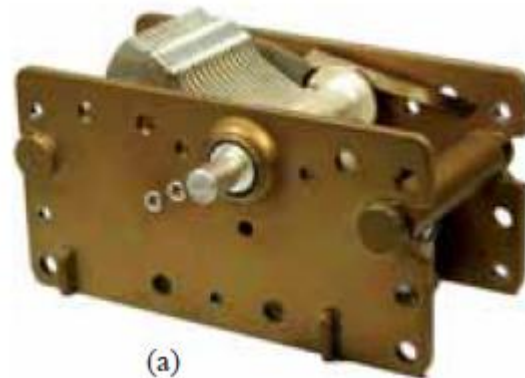
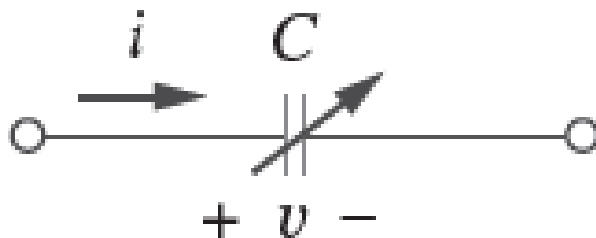
Formatos, tipos e símbolos

Classificação de acordo ao modo de operação:

fixos



variáveis





Capacitores

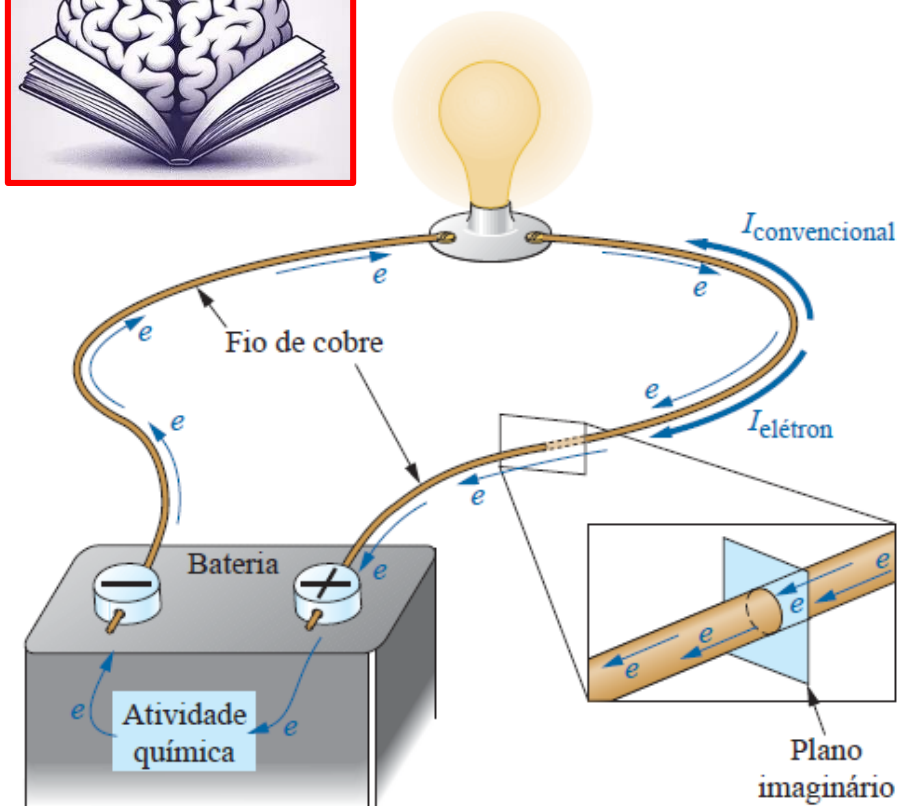
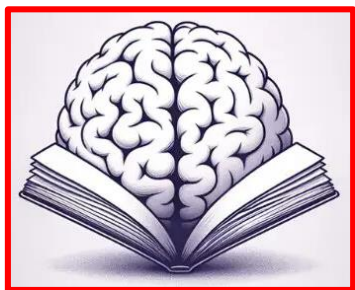
Relação entre Corrente e Tensão



Capacitores

Relação entre Corrente e Tensão

Corrente (Ampère):



Se $6,242 \times 10^{18}$ elétrons (**1 coulomb**) passam através do plano imaginário em **1 segundo**, diz-se que o fluxo de carga, ou corrente, é de **1 ampère (A)**.

$$I = \frac{Q}{t}$$

I = ampères (A)
 Q = coulombs (C)
 t = tempo (s)



Capacitores

Relação entre Corrente e Tensão

É conhecido que a **corrente elétrica instantânea** é igual à variação das cargas em um período de tempo, conforme a relação abaixo:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

(Eq 6)



Capacitores

Relação entre Corrente e Tensão

É conhecido que a **corrente elétrica instantânea** é igual à variação das cargas em um período de tempo, conforme a relação abaixo:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

(Eq 6)

Substituindo a Eq 5 na Eq 6:

$$C = \frac{Q}{v}$$

(Eq 5)

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

(Eq 7)

Corrente através do capacitor



Capacitores

Relação entre Corrente e Tensão

É conhecido que a **corrente elétrica instantânea** é igual à variação das cargas em um período de tempo, conforme a relação abaixo:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

(Eq 6)

Substituindo a Eq 5 na Eq 6:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

(Eq 7)

Corrente através do capacitor

Apenas circula corrente através do capacitor quando ocorrem variações de tensão. Ou seja, ele se comporta como um **circuito aberto** para fontes de CC.

A corrente poder variar de forma instantânea.



Capacitores

Relação entre Corrente e Tensão

Manipulando a Eq 7:

$$dv = \frac{1}{C} i dt \quad \int dv = \int \frac{1}{C} i dt \quad \int dv = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v(0) \quad (\text{Eq 8})$$

Tensão sobre o capacitor



Capacitores

Relação entre Corrente e Tensão

Manipulando a Eq 7:

$$dv = \frac{1}{C} i dt \quad \int dv = \int \frac{1}{C} i dt \quad \int dv = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v(0) \quad (\text{Eq 8})$$

Tensão sobre o capacitor

A tensão no capacitor é acumulada a partir de um instante inicial.

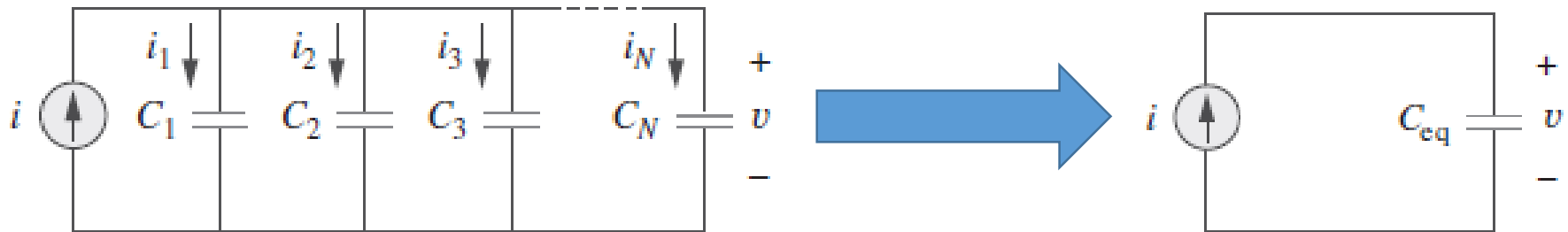
Não ocorrem variações bruscas de tensão sobre o capacitor. A tensão no capacitor é sempre contínua ($v(0^-) = v(0^+)$)



Capacitores

O Capacitor

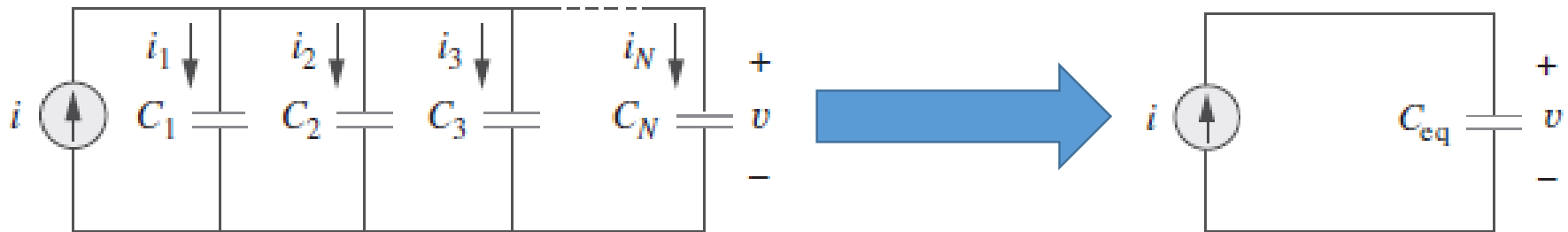
Conexão em paralelo:



Capacitores

O Capacitor

Conexão em paralelo:

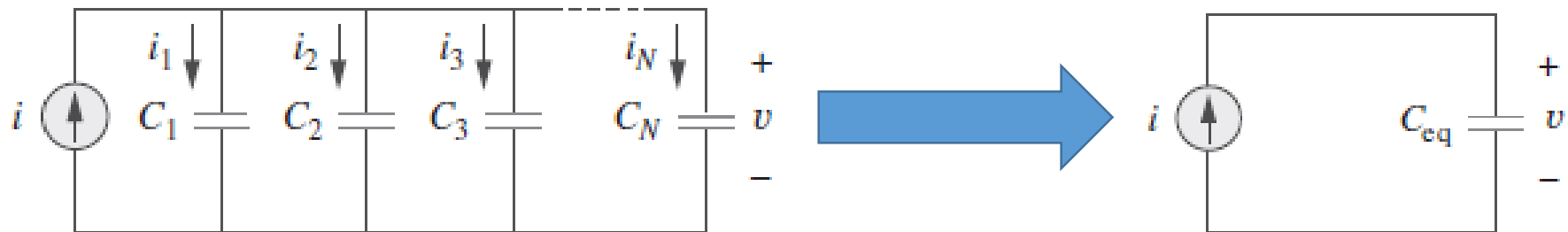


Aplicando LKC: $i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N$

Capacitores

O Capacitor

Conexão em paralelo:



Aplicando LKC: $i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N$

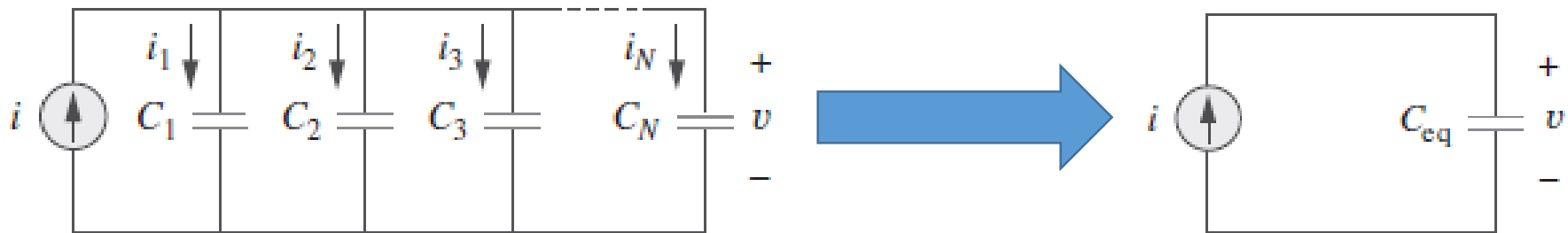
Sabendo que: $i = C \frac{dv}{dt}$, e que v é igual para todos os C_k :

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt}$$

Capacitores

O Capacitor

Conexão em paralelo:



$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} + \cdots + C_N \frac{dv}{dt}$$

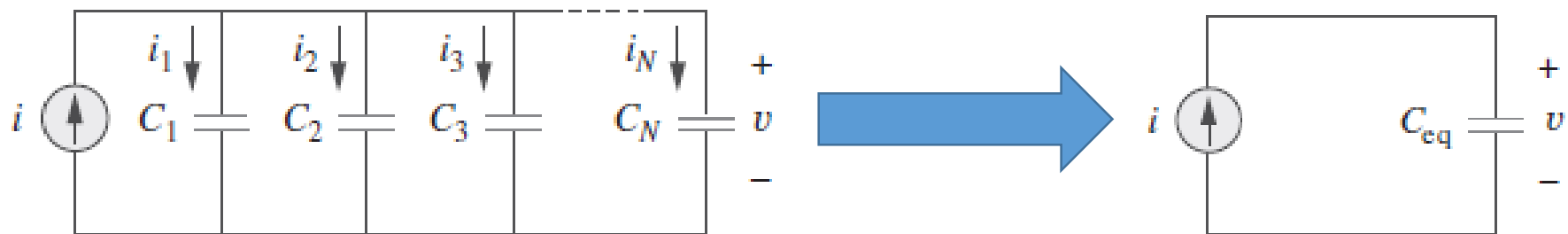
$$C_{eq} \frac{dv}{dt} = \left(\sum_{k=1}^N C_k \right) \frac{dv}{dt}$$



Capacitores

O Capacitor

Conexão em paralelo:



$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt}$$

$$C_{eq} \frac{dv}{dt} = \left(\sum_{k=1}^N C_k \right) \frac{dv}{dt}$$

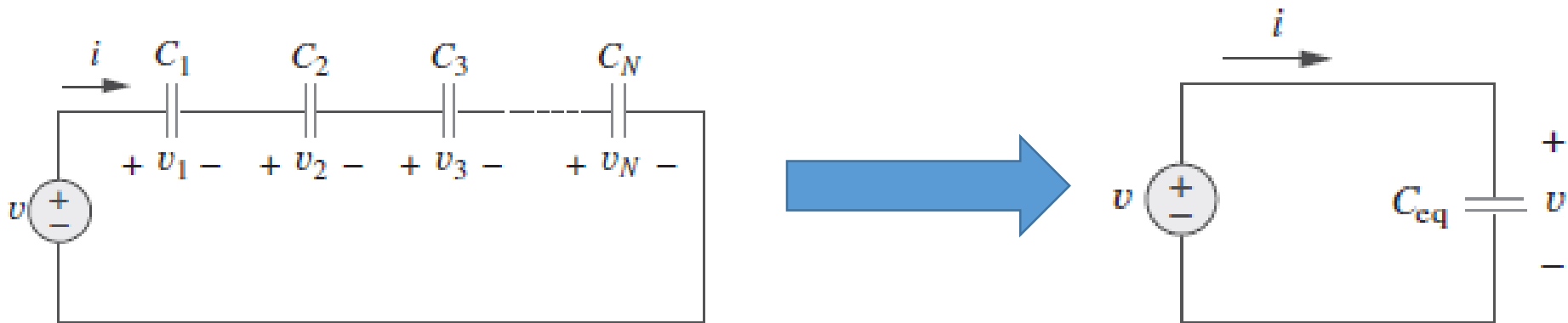
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N$$

A capacitância equivalente de N capacitores conectados em paralelo, é a soma das suas capacitâncias individuais.

Capacitores

O Capacitor

Conexão em série:



Aplicando LKT, e sabendo que a mesma i passa pelos capacitores:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N$$

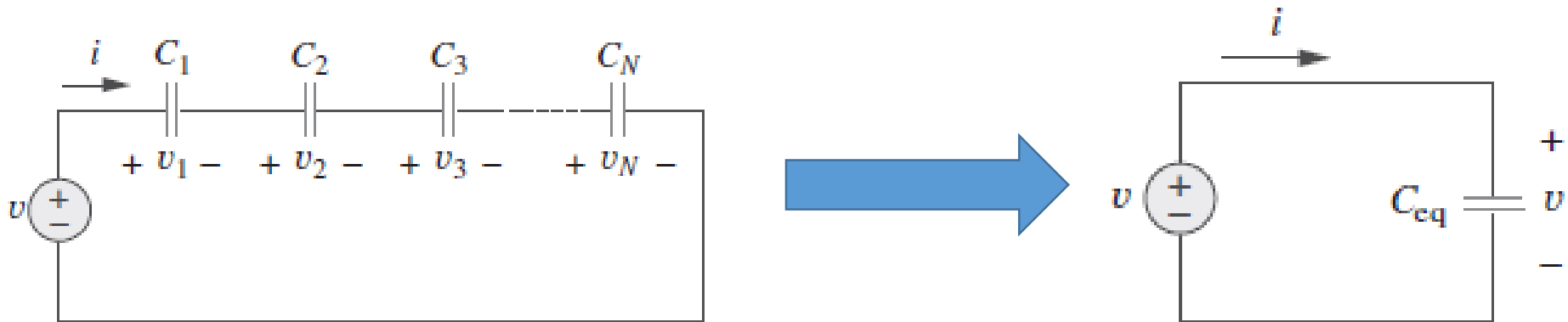
sabendo que: $v_k(t) = \frac{1}{C_k} \int_0^t i(t) dt + v_k(0)$ temos:



Capacitores

O Capacitor

Conexão em série:

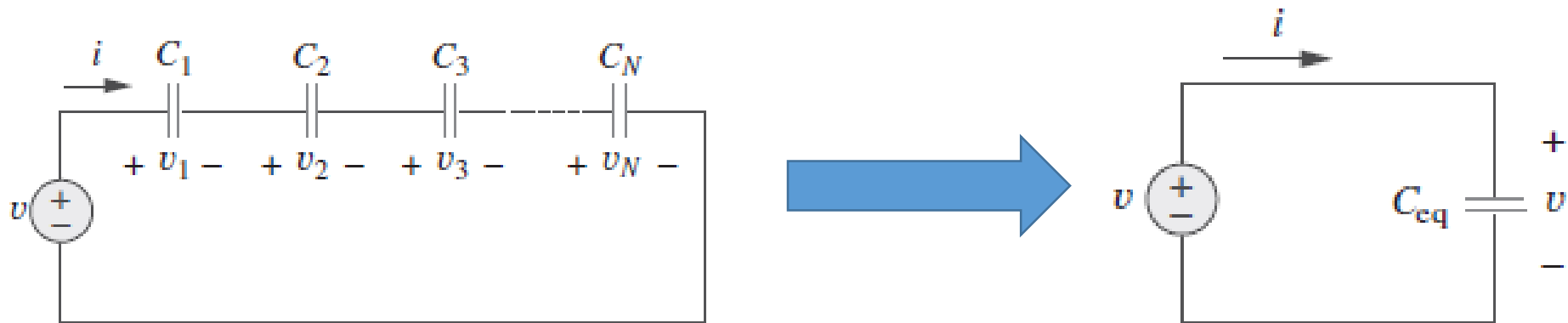


$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_N} \right) \int_0^t i(t) dt + v_1(0) + v_2(0) + v_3(0) + \cdots + v_N(0)$$

Capacitores

O Capacitor

Conexão em série:



$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \int_0^t i(t) dt + v_1(0) + v_2(0) + v_3(0) + \dots + v_N(0)$$

Por LKT:

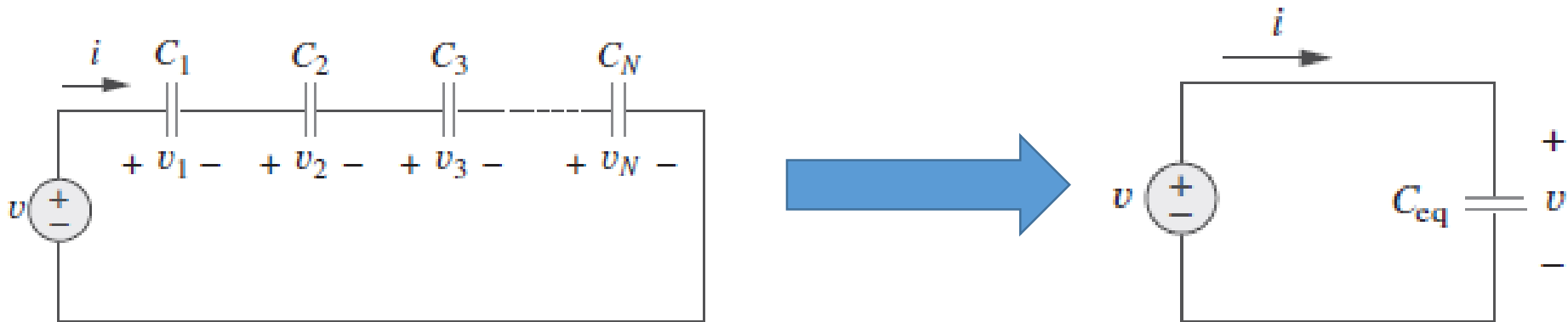
$$= v(0)$$



Capacitores

O Capacitor

Conexão em série:



$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \int_0^t i(t) dt + v_1(0) + v_2(0) + v_3(0) + \dots + v_N(0)$$

$$v = \frac{1}{C_{eq}} \int_0^t i(t) dt + v(0)$$

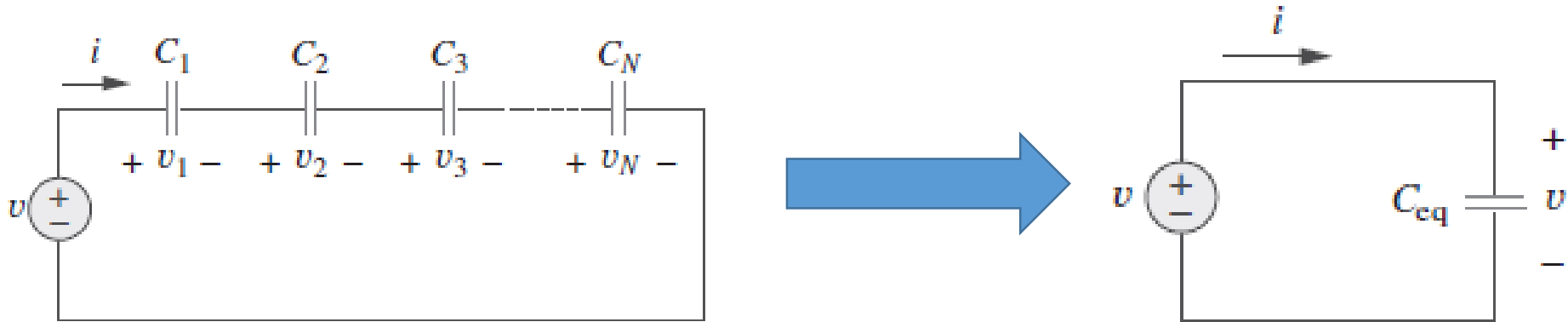
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

Por LKT: $\downarrow$
 $= v(0)$

Capacitores

O Capacitor

Conexão em série:



$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \int_0^t i(t) dt + v(0)$$

$$v = \frac{1}{C_{eq}} \int_0^t i(t) dt + v(0)$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

A capacitância equivalente de N capacitores conectados em série, é o inverso da soma dos inversos das capacitâncias individuais.



Capacitores

O Capacitor

Potência e energia:

Um **capacitor ideal** não dissipa potência em forma de **calor**, apenas **armazena energia**. O capacitor recupera potência do circuito ao **acumular energia em seu campo elétrico** e devolve para o circuito a energia previamente armazenada quando entrega potência para o circuito.



Capacitores

O Capacitor

Potência:

$$p = vi = vC \frac{dv}{dt}$$



$$p = Cv \frac{dv}{dt}$$

Energia:

$$w = \int p dt$$



$$w = \frac{1}{2} C v^2$$

Considerando que: $v = \frac{Q}{C}$



$$w = \frac{Q^2}{2C}$$



Capacitores

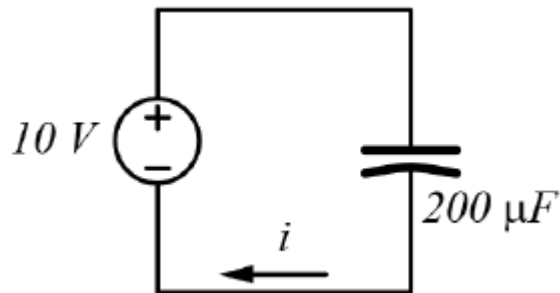
O Capacitor

Exemplo:

$$p = C v \frac{dv}{dt}$$

$$w = \frac{1}{2} C v^2$$

$$w = \frac{Q^2}{2C}$$



$$v = 10 \text{ V}$$

$$C = 200 \mu\text{F}$$

$$i = 0 \text{ A}$$

Na condição de equilíbrio não há fluxo de cargas.

$$w = \frac{1}{2} 200 \times 10^{-6} \times 10^2$$

$$w = 100 \times 10^{-4}$$

$$w = 10^{-2} \text{ J}$$

$$w = 10 \text{ mJ}$$

Energia armazenada.



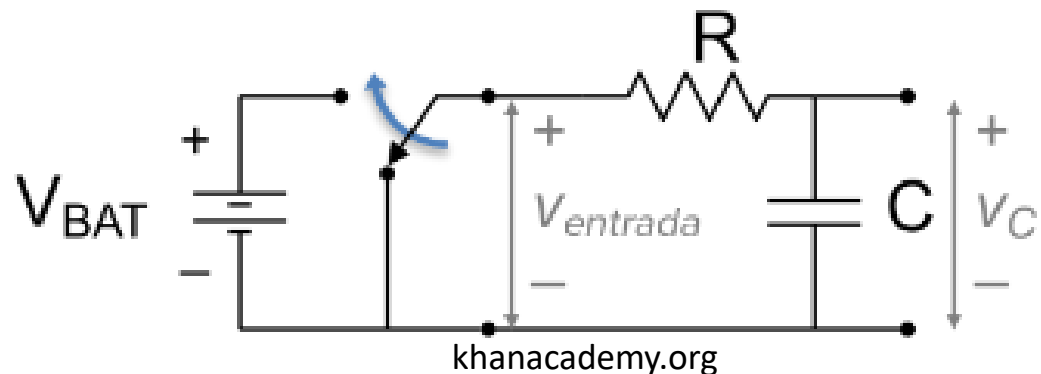
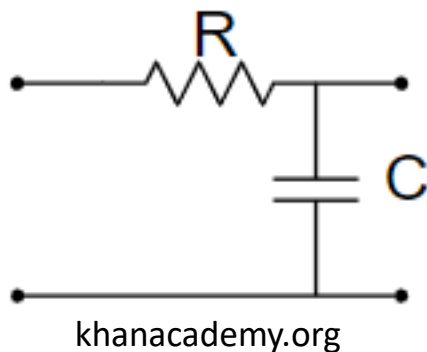
Circuitos de 1^{ra} ordem.

Circuito RC

Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

No estudo de circuitos de **1^{ra} ordem**, é comum analisar seu comportamento em duas etapas: **carga** e **descarga** do capacitor. Exemplo é o circuito RC.

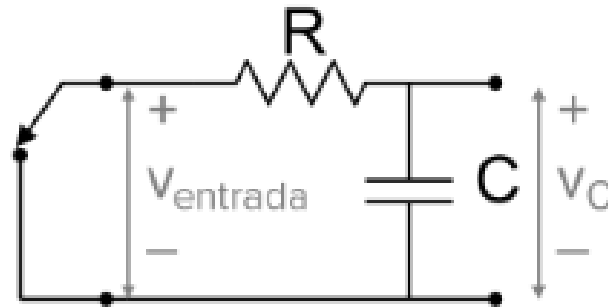


Um **circuito de primeira ordem** é caracterizado por uma **equação diferencial de primeira ordem**.

Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor

Estado inicial, antes de alimentar o circuito com uma fonte (“estado estacionário” ou “em repouso” ou “em equilíbrio”):



khanacademy.org

Supondo que o circuito esteve **muito tempo sem carga**. E que **qualquer carga que pode ter sido armazenada no capacitor no passado já foi dissipada através de R**, sendo:

$$q_c = 0 \quad \longrightarrow \quad v_c = \frac{q_c}{C} = \frac{0}{C} = 0 \quad \longrightarrow \quad i_c = i_c = 0$$



Circuitos de 1^{ra} ordem.

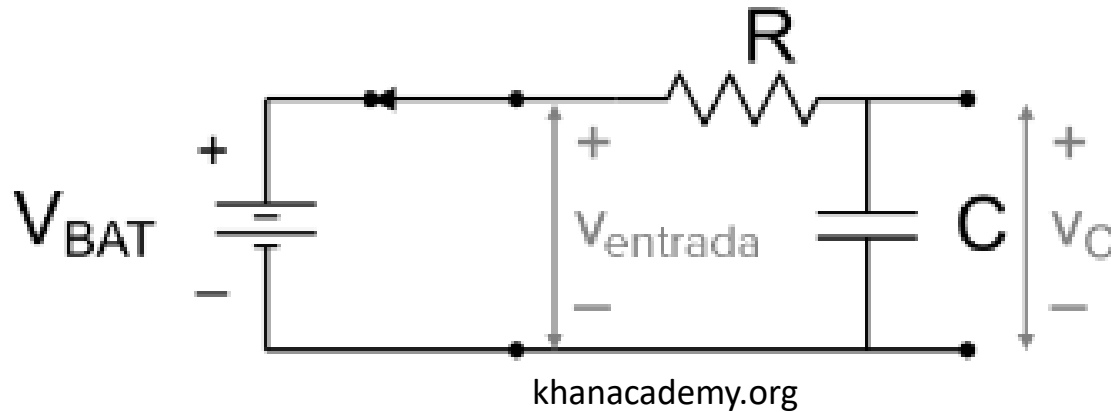
Circuito RC.

Fase de carga do capacitor

Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

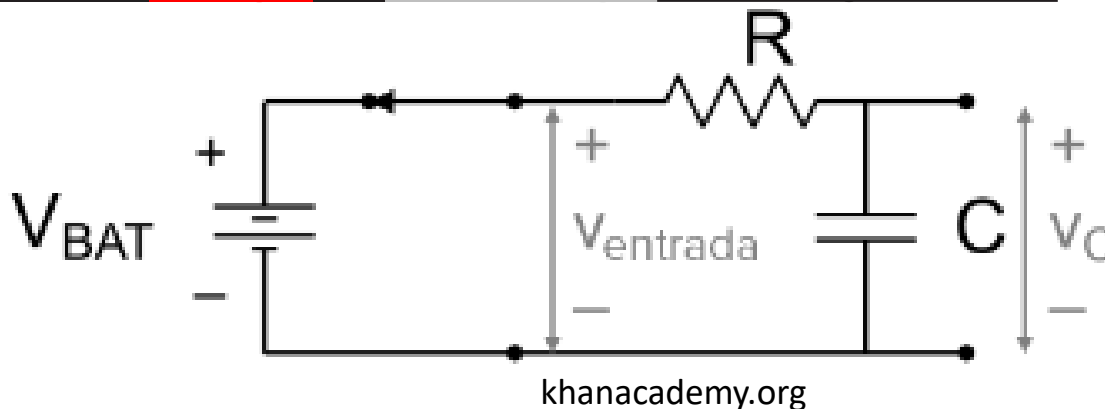
Etapa de carga do capacitor. Também chamada de **resposta forçada**, conecta-se a fonte ao circuito:



Circula uma i através de RC, e acumula-se carga em C. Esta, por sua vez, gera uma tensão crescente em C ($v_c = q/C$) (período transiente).

Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor



O processo continua até:

$$v_C = V_{BAT}$$

Nesse momento, portanto:

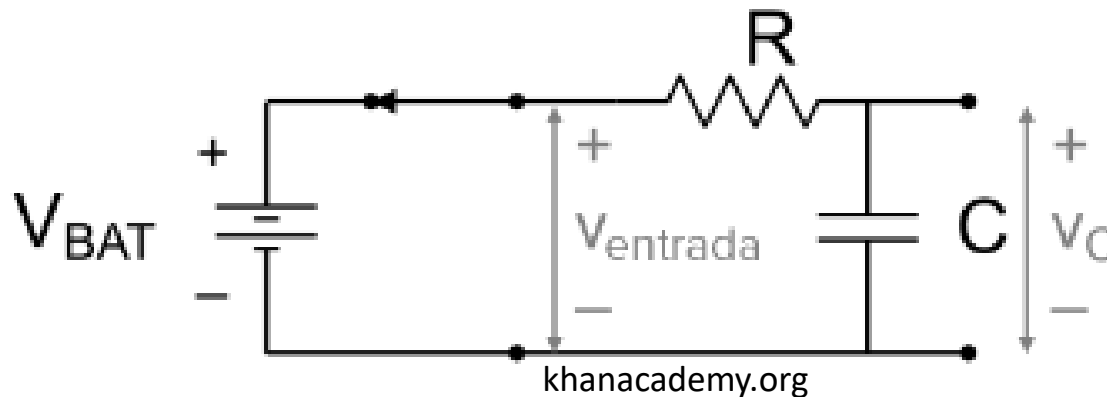
$$v_R = 0 \rightarrow i = 0$$

Ou seja, a corrente (ou carga) para de fluir para o capacitor e o **período transiente terminou**.

Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta forçada do circuito RC



A resposta forçada (carga), refere-se ao comportamento de corrente ou tensão do circuito, com a **presença de uma fonte**. Um dos **sinais de estímulos** mais usados é o **degrau unitário** ao circuito RC, em $t = 0$.



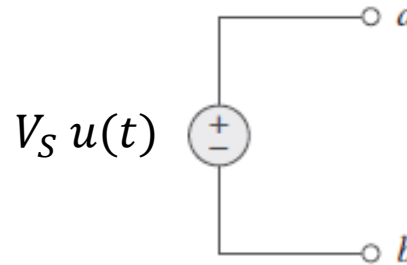
Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

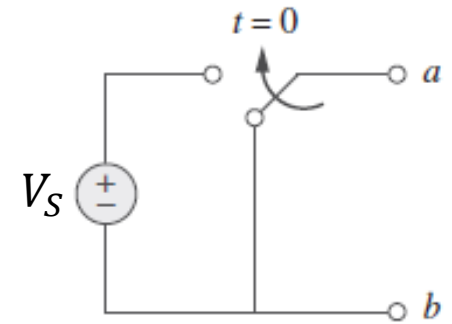
Resposta ao degrau unitário

Resposta a um degrau unitário é a resposta do circuito decorrente da **aplicação súbita de uma fonte de tensão ou de corrente CC.**

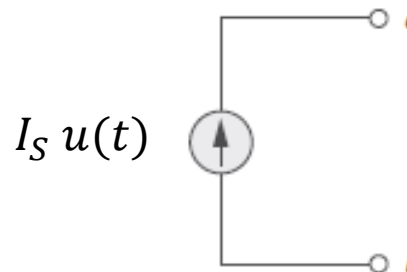
$$V_S u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_S, & t > 0 \end{cases}$$



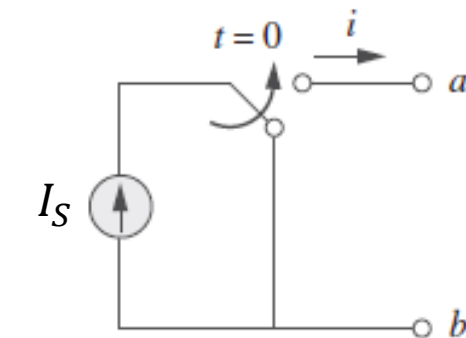
=



$$I_S u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I_S, & t > 0 \end{cases}$$



=

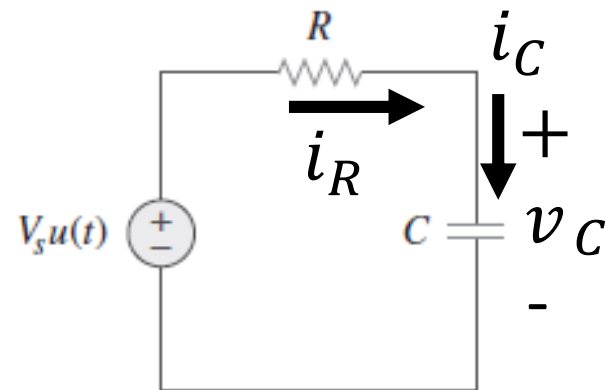


Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

Considerando uma fonte de tensão CC, conhecendo as características do capacitor: $v_C(0^-) = v_C(0^+) = V_S$

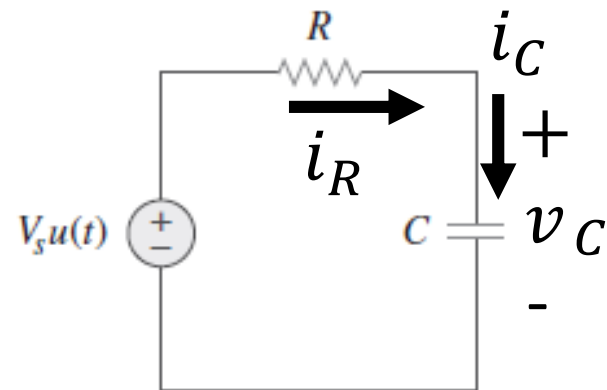


Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

Considerando uma fonte de tensão CC, conhecendo as características do capacitor: $v_C(0^-) = v_C(0^+) = V_S$



$$\text{LKC: } i_C - i_R = 0$$

$$\text{Lei de Ohm em R: } i_R = \frac{V_S u(t) - v_C}{R}$$

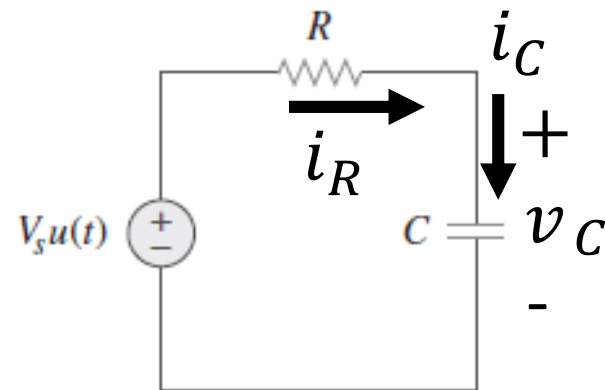
$$\text{Relação I-V em C: } i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

Considerando uma fonte de tensão CC, conhecendo as características do capacitor: $v_C(0^-) = v_C(0^+) = V_S$



$$\text{LKC: } i_C - i_R = 0$$

$$\text{Lei de Ohm em R: } i_R = \frac{V_S u(t) - v_C}{R}$$

$$\text{Relação I-V em C: } i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

Para $t > 0$ ($u(t) = 1$), aplicando LKC:

$$C \frac{dv_C}{dt} - \frac{V_S - v_C}{R} = 0$$

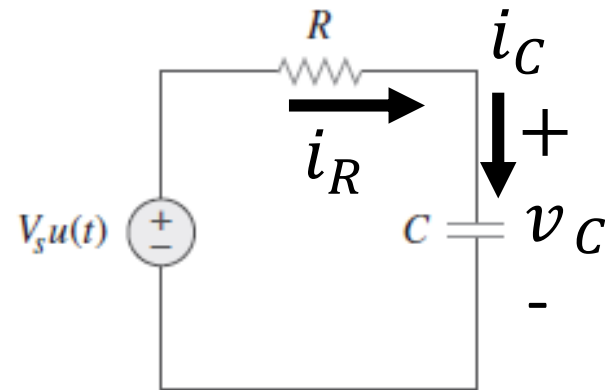
$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{V_S - v_C}{RC} = - \left(\frac{v_C - V_S}{RC} \right)$$



Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário



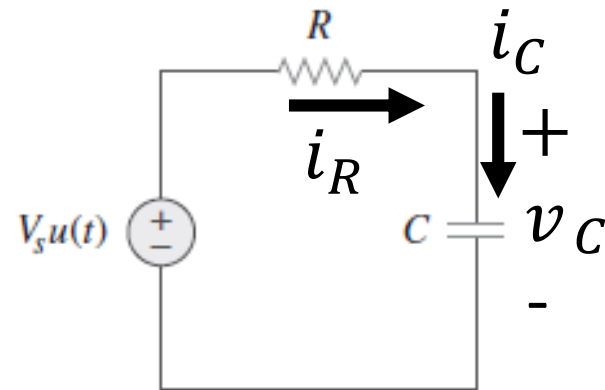
$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C - V_S}{RC}$$



Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário



$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C - V_S}{RC}$$

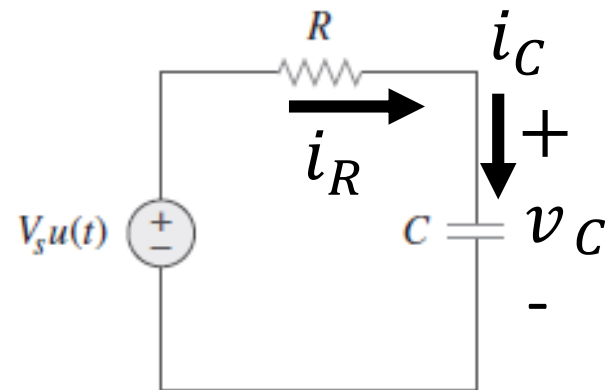
$$dv_C = -\frac{v_C - V_S}{RC} dt$$

$$\frac{1}{v_C - V_S} dv_C = -\frac{1}{RC} dt$$

Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário



$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C - V_S}{RC}$$

$$dv_C = -\frac{v_C - V_S}{RC} dt$$

$$\frac{1}{v_C - V_S} dv_C = -\frac{1}{RC} dt$$

Integrando a ambos lados:

$$\int_{V_0}^{v_t} \frac{1}{v_C - V_S} dv_C = \int_0^t -\frac{1}{RC} dt$$

$$\ln(v_C - V_S) \Big|_{V_0}^{v(t)} = -\frac{t}{RC} \Big|_0^t$$

$$\ln(v(t) - V_S) - \ln(V_0 - V_S) = -\frac{t}{RC}$$

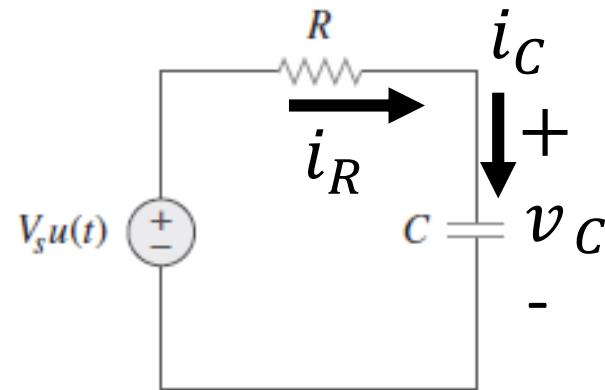
$$\ln\left(\frac{v(t) - V_S}{V_0 - V_S}\right) = -\frac{t}{RC}$$



Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

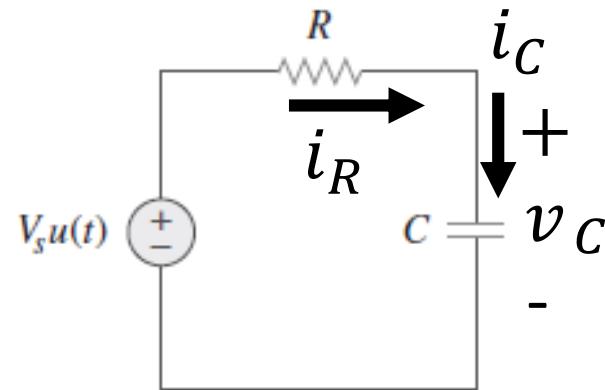


$$\ln \left(\frac{v(t) - V_S}{V_0 - V_S} \right) = -\frac{t}{RC}$$

Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário



$$\ln \left(\frac{v(t) - V_S}{V_0 - V_S} \right) = -\frac{t}{RC}$$

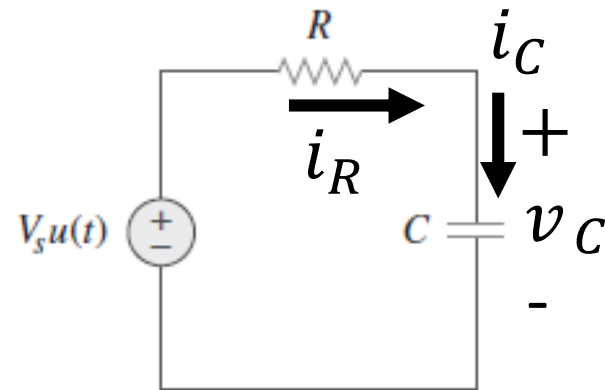
$$\frac{v(t) - V_S}{V_0 - V_S} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v(t) - V_S = (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário



$$\ln \left(\frac{v(t) - V_S}{V_0 - V_S} \right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{v(t) - V_S}{V_0 - V_S} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v(t) - V_S = (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

**Resposta ao degrau unitário
do circuito RC para $t > 0$:**

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Sendo:

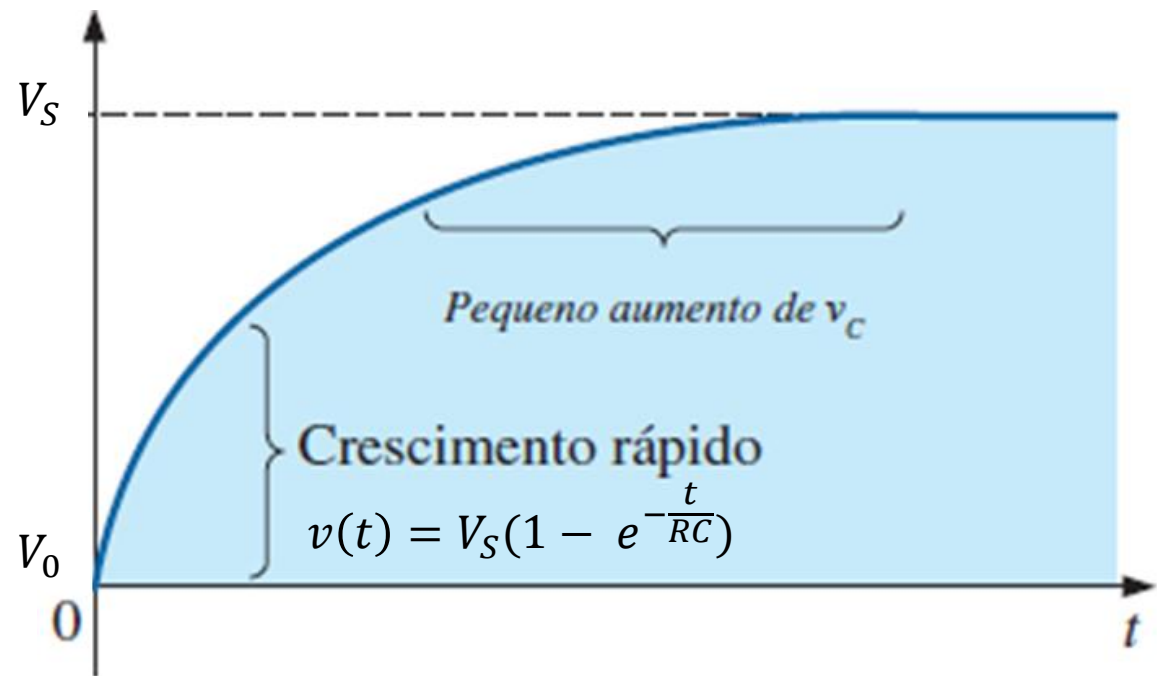
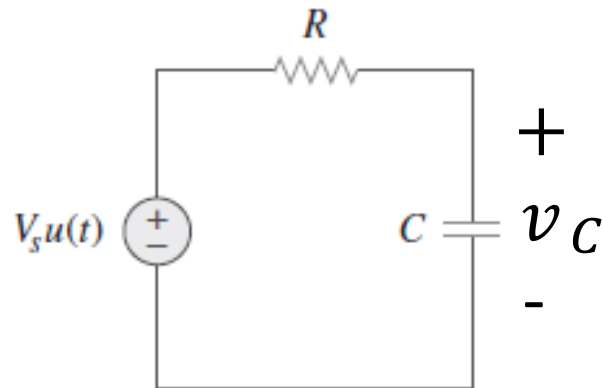
V_S : tensão da fonte

V_0 : condição inicial,
quando $V_c = V_0$

Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário



$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

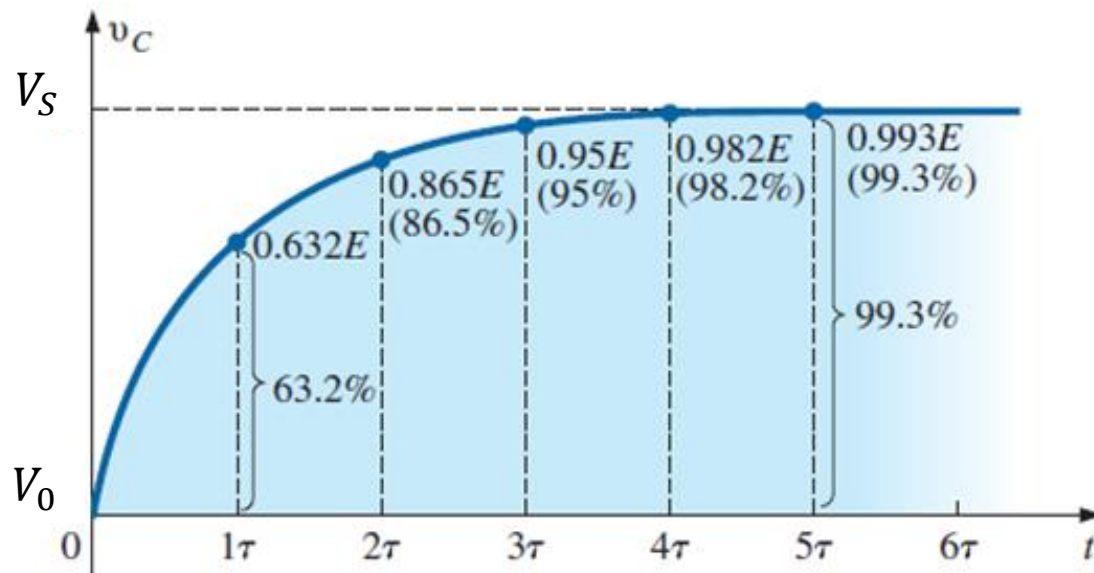


Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$



A tensão através de um capacitor em um circuito CC é essencialmente igual à tensão aplicada após 5 constantes de tempo da fase de carga.

Constante de tempo, em segundos:

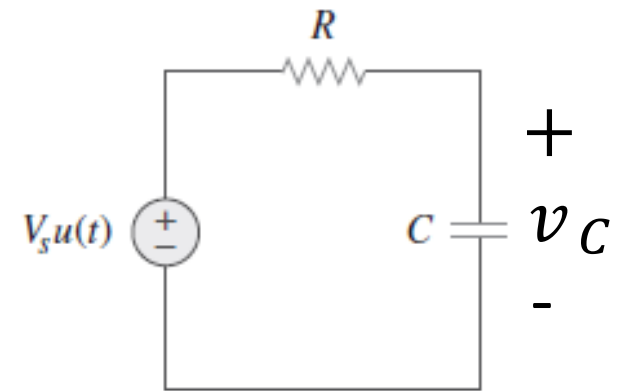
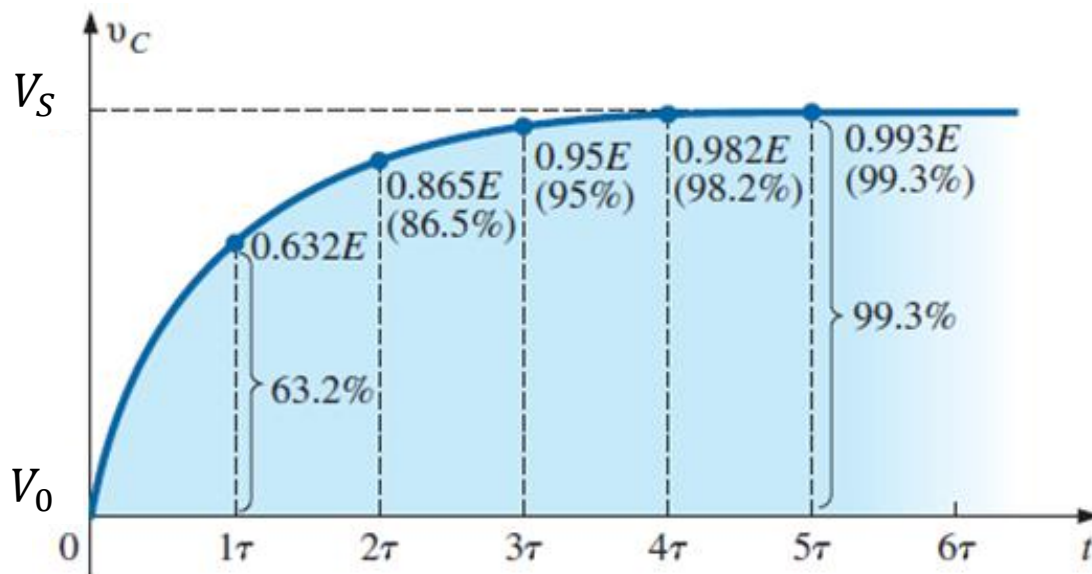
$$\tau = RC$$

Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$



Um **capacitor** pode ser **substituído** por um **circuito aberto** equivalente assim que a **fase de carga** em um **circuito CC** tiver passado.



Etapas de carga e descarga do capacitor

Resposta total ou completa ao degrau unitário

$$\text{Resposta completa} = \underset{\text{parte temporária}}{\text{resposta transiente}} + \underset{\text{parte permanente}}{\text{resposta em regime estacionário}}$$



Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta total ou completa ao degrau unitário

Resposta completa = resposta transiente + resposta em regime estacionário
parte temporária parte permanente

$$v(t) = v_t + v_{ss} \quad v_t = (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad v_{ss} = V_S$$



Circuito RC

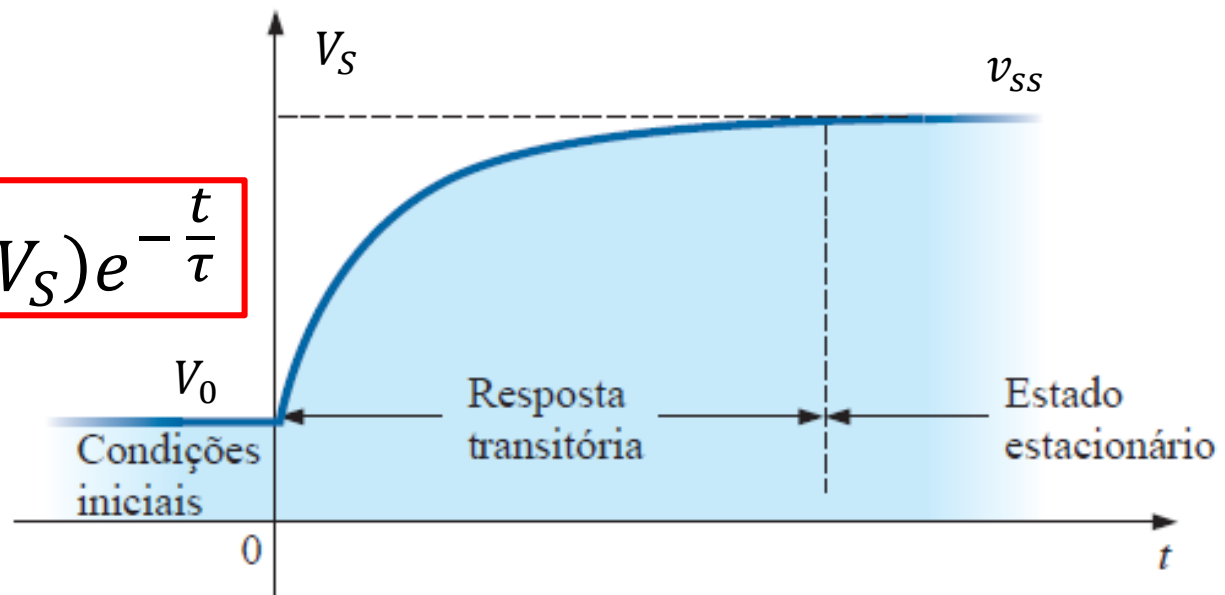
Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta total ou completa ao degrau unitário

Resposta completa = resposta transiente + resposta em regime estacionário
parte temporária parte permanente

$$v(t) = v_t + v_{ss} \quad v_t = (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad v_{ss} = V_S$$

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

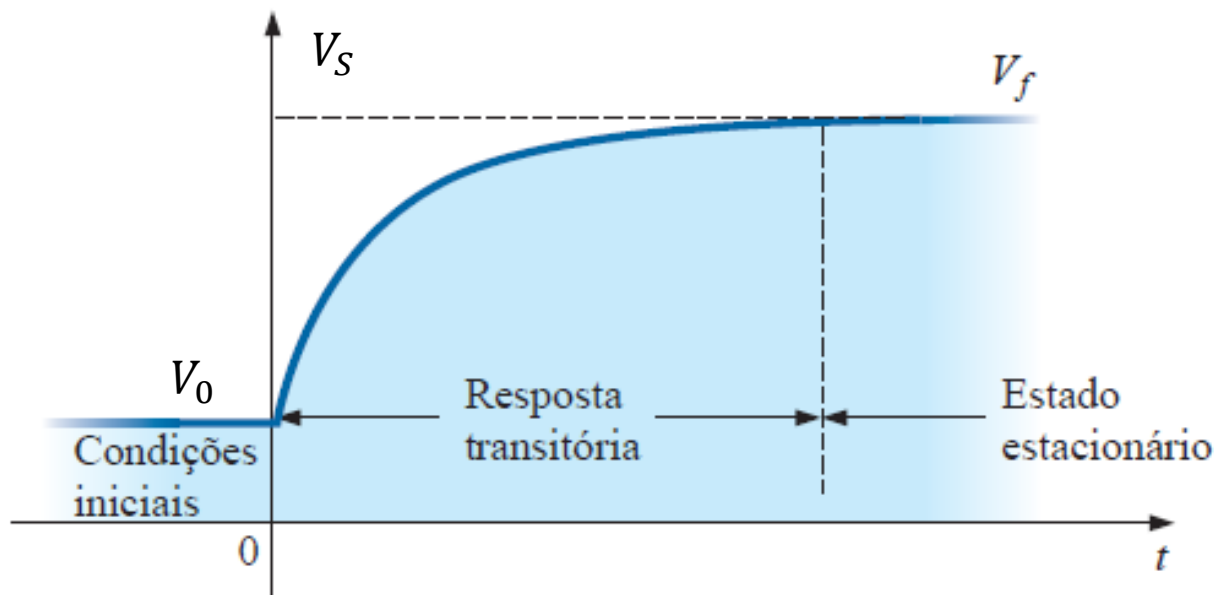


Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor

Resposta total ou completa ao degrau unitário

$$v(t) = \begin{cases} V_0, & t < 0 \\ V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{\tau}}, & t > 0 \end{cases}$$





Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

E a corrente i_c ?



Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

É conhecido que: $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$

Considerando $V_0=0$

$$v(t) = V_S + (0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}} = V_S - V_S e^{-\frac{t}{RC}}$$



Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

É conhecido que: $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$

Considerando $V_0=0$

$$v(t) = V_S + (0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}} = V_S - V_S e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\left(V_S - V_S e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{dt} = 0 - V_S \frac{d\left(e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{dt} = -V_S e^{-\frac{t}{RC}} \left(-\frac{1}{RC}\right)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = V_S \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$



Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

$$\frac{dv(t)}{dt} = V_s \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$



Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

$$\frac{dv(t)}{dt} = V_s \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$i_C = CV_s \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$



Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

$$\frac{dv(t)}{dt} = V_s \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$i_C = CV_s \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

**Resposta ao degrau unitário
do circuito RC para $t > 0$:**

$$i_C = \frac{V_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Sendo:

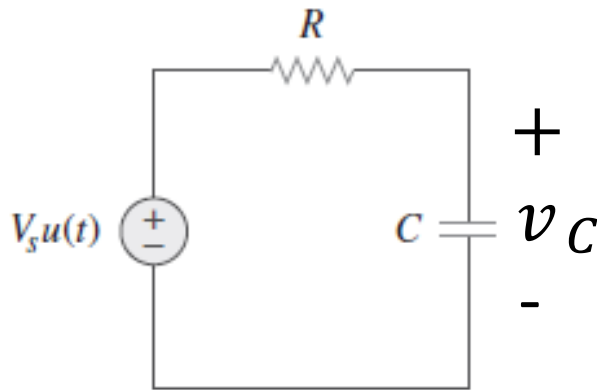
V_s : tensão da fonte

V_0 : condição inicial,
quando $V_c = V_0 = 0$

Circuito RC

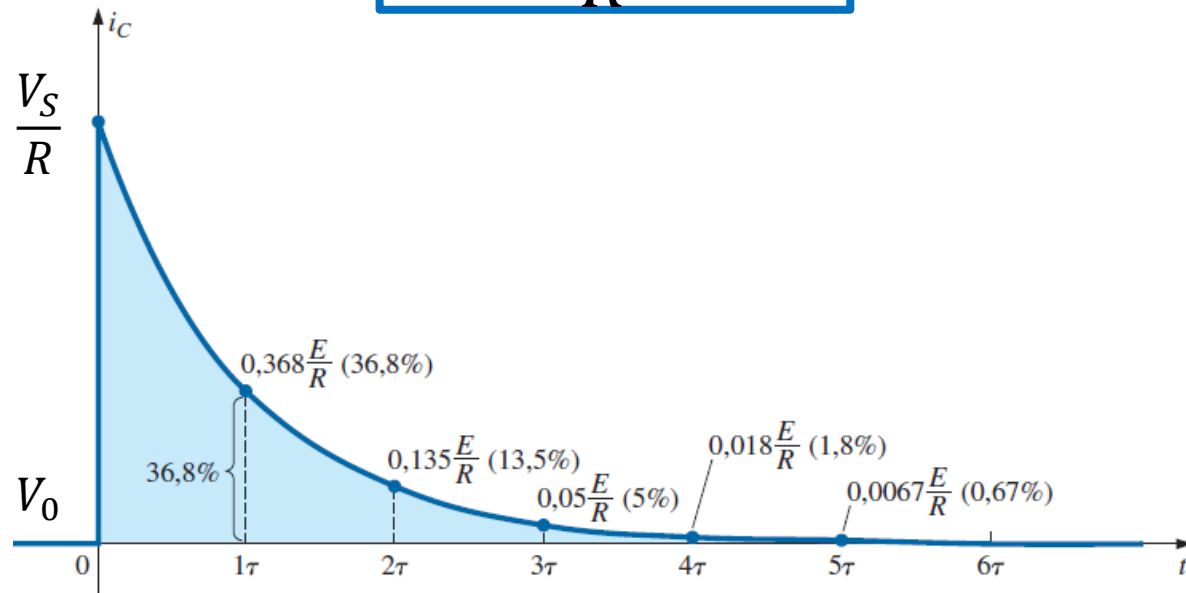
Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário



A corrente através de um capacitor em um circuito CC é essencialmente **igual a 0** após 5τ da fase de carga.

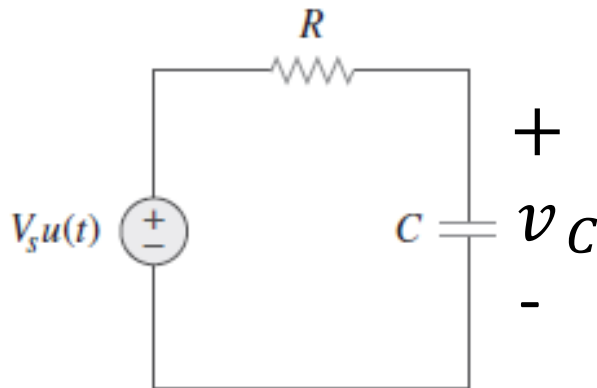
$$i_C = \frac{V_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



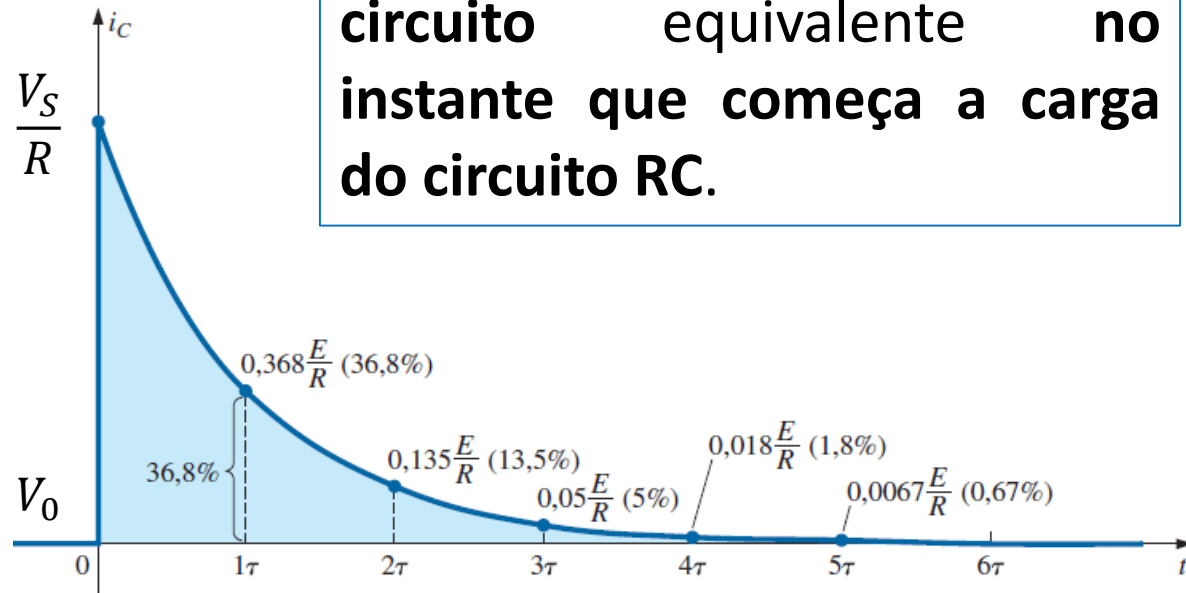
Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário



Um capacitor pode ser substituído por um curto-circuito equivalente no instante que começa a carga do circuito RC.





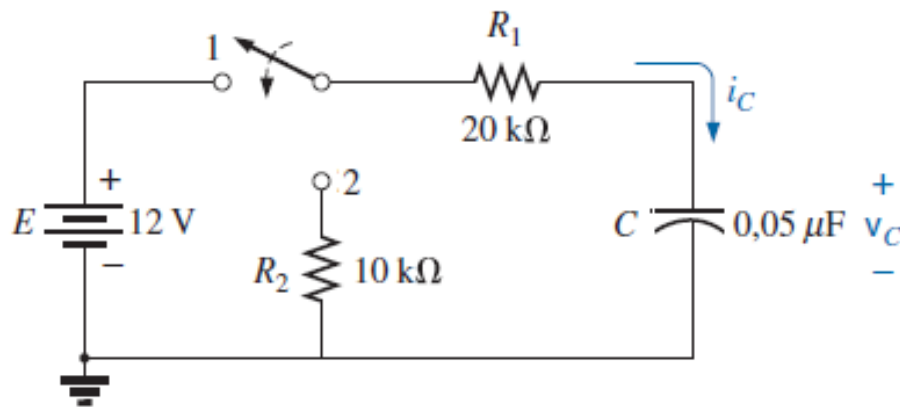
Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

Exemplo

Dado o seguinte circuito: a) Calcule as expressões matemáticas para o comportamento transitório de v_C e da corrente i_C se o capacitor estava inicialmente descarregado e a chave for colocada na posição 1 em $t = 0$ s.



$$\tau = R_1 C = (20 \text{ k}\Omega)(0,05 \text{ }\mu\text{F}) = 1 \text{ ms}$$

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v(t) = E + (0 - E)e^{-\frac{t}{1 \text{ ms}}}$$

$$v(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{1 \text{ ms}}}\right)$$

$$v(t) = 12 \text{ V}\left(1 - e^{-\frac{t}{1 \text{ ms}}}\right)$$

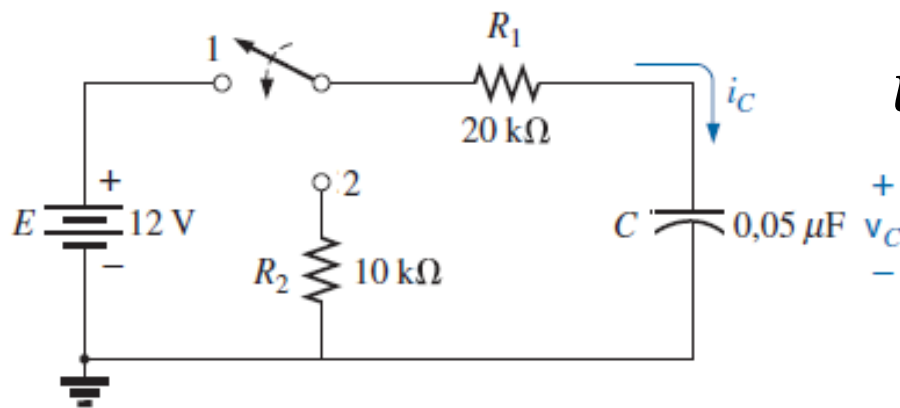
Circuito RC

Etapas de **carga** e **descarga** do capacitor

Resposta ao degrau unitário

Exemplo

Dado o seguinte circuito: a) Calcule as expressões matemáticas para o comportamento transitório de v_C e da corrente i_C se o capacitor estava inicialmente descarregado e a chave for colocada na posição 1 em $t = 0$ s.



$$\begin{aligned}\tau &= R_1 C = (20 \text{ k}\Omega)(0,05 \text{ }\mu\text{F}) \\ &= 1 \text{ ms}\end{aligned}$$

$$i_C = \frac{V_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad i_C = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{1 \text{ ms}}}$$

$$i_C = \frac{12 \text{ V}}{20 \text{ k}\Omega} e^{-\frac{t}{1 \text{ ms}}}$$

$$i_C = 0,6 \text{ mA } e^{-\frac{t}{1 \text{ ms}}}$$



Circuitos de 1^{ra} ordem.

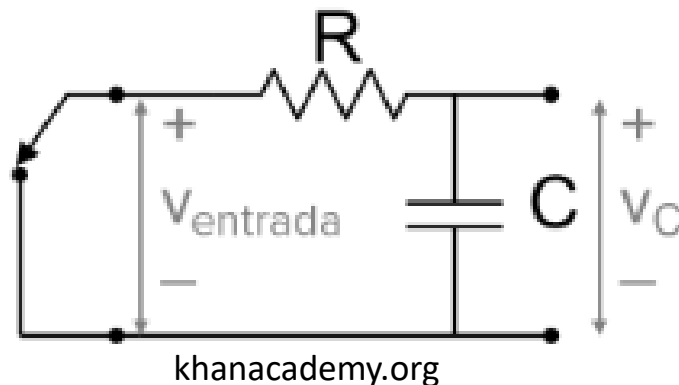
Circuito RC.

Fase de descarga do capacitor

Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor

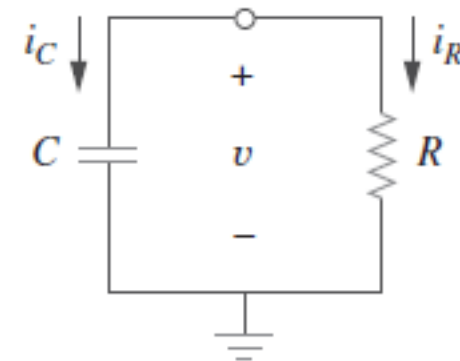
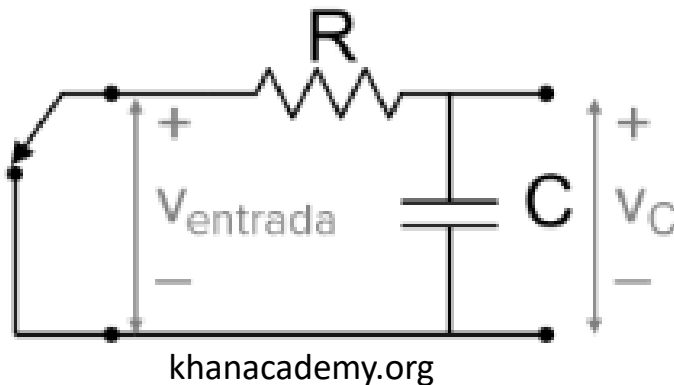
Etapas de descarga do capacitor. Também chamada de resposta natural, a fonte é desconectada do circuito:



Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor

Etapa de descarga do capacitor. Também chamada de resposta natural, a fonte é desconectada do circuito:

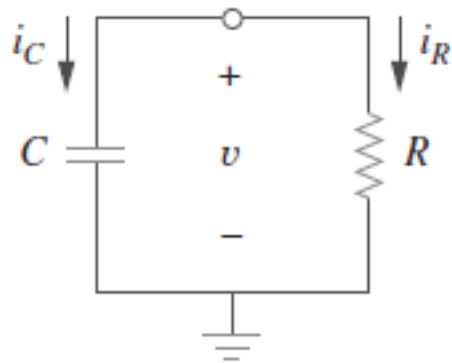


Em C está armazenada uma carga, então há uma tensão inicial através dele: $v_C \neq 0 \longrightarrow v_R \neq 0 \longrightarrow i_R \neq 0$

Essa carga, continuará a fluir até que seja extinta. Assim RC voltará ao seu estado original de equilíbrio.

Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor



Considerando C inicialmente carregado: $v_C = V_0$

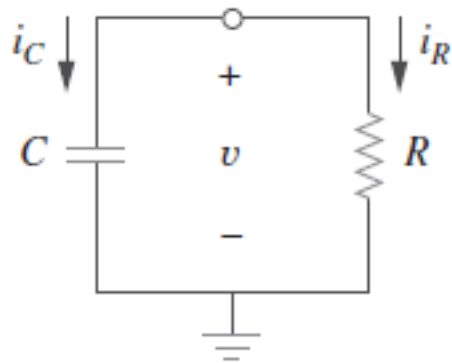
$$\text{LKC: } i_C + i_R = 0$$

$$\text{Lei de Ohm em R: } i_R = \frac{v_C}{R}$$

$$\text{Relação I-V em C: } i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor



Considerando C inicialmente carregado: $v_C = V_0$

$$\text{LKC: } i_C + i_R = 0$$

$$\text{Lei de Ohm em R: } i_R = \frac{v_C}{R}$$

$$\text{Relação I-V em C: } i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

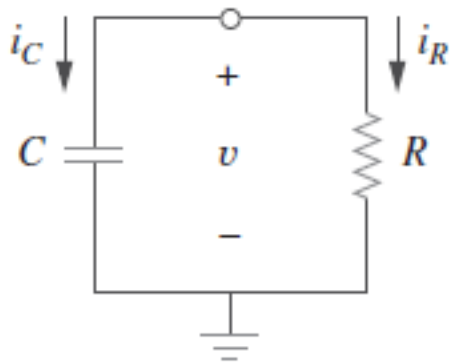
Considerando que: $v_C = v_R = v$, e aplicando LKC:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$



Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor



Considerando C inicialmente carregado: $v_C = V_0$

$$\text{LKC: } i_C + i_R = 0$$

$$\text{Lei de Ohm em R: } i_R = \frac{v_C}{R}$$

$$\text{Relação I-V em C: } i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

Considerando que: $v_C = v_R = v$, e aplicando LKC:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

A solução dessa expressão é alguma função cuja derivada (dv/dt) seja igual à própria função (v).
Ou seja, uma exponencial, na forma:

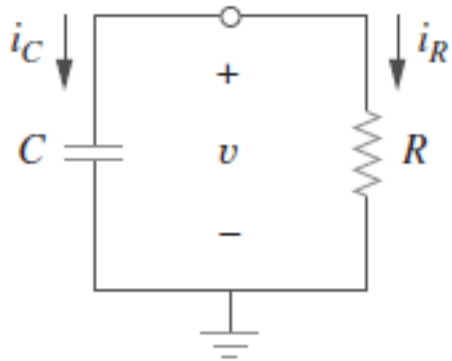
$$v(t) = ke^{st} \quad v(t) : \text{função da tensão em C no tempo,}$$

k e S : parâmetros ajustáveis.



Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor



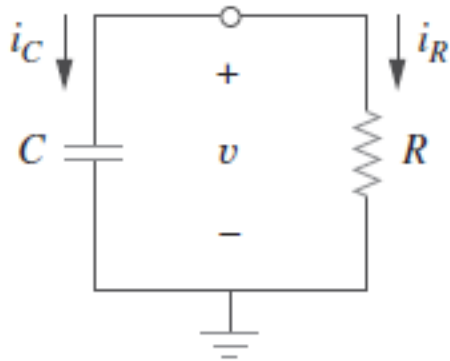
$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$v(t) = k e^{st}$$



Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor



$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$v(t) = ke^{st}$$

$$C \frac{d(ke^{st})}{dt} + \frac{1}{R} (ke^{st}) = 0$$

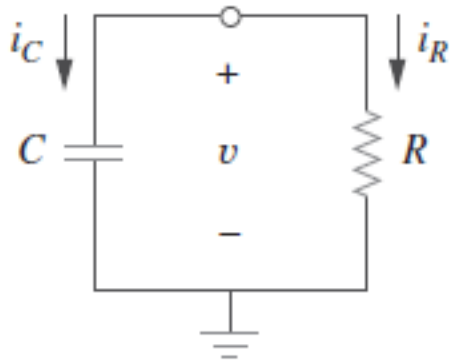
$$Cske^{st} + \frac{1}{R} ke^{st} = 0$$

$$ke^{st} \left(sC + \frac{1}{R} \right) = 0$$



Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor



$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$v(t) = k e^{st}$$

$$C \frac{d(k e^{st})}{dt} + \frac{1}{R} (k e^{st}) = 0$$

$$C s k e^{st} + \frac{1}{R} k e^{st} = 0$$

$$k e^{st} \left(sC + \frac{1}{R} \right) = 0$$

Existem 3 soluções:

$k = 0 \rightarrow$ Carga inicial em C igual a 0

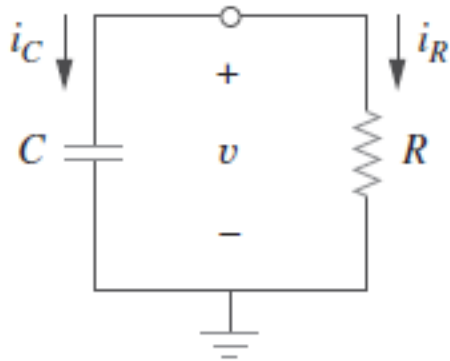
$e^{st} = 0 \rightarrow e^{st} = e^{-\infty} \rightarrow \left. \begin{matrix} s < 0 \\ t = \infty \end{matrix} \right\}$

**Soluções
não
viáveis**



Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor



$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$v(t) = ke^{st}$$

$$C \frac{d(ke^{st})}{dt} + \frac{1}{R} (ke^{st}) = 0$$

$$Cske^{st} + \frac{1}{R} ke^{st} = 0$$

$$ke^{st} \left(sC + \frac{1}{R} \right) = 0$$

Existem 3 soluções:

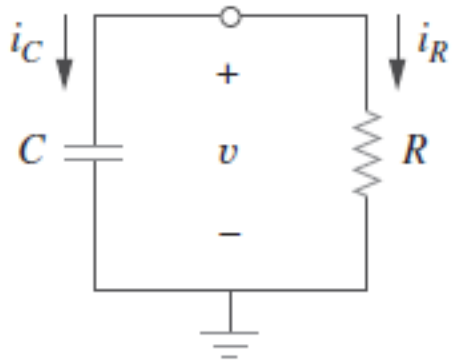
$$sC + \frac{1}{R} = 0$$

Solução viável



Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor

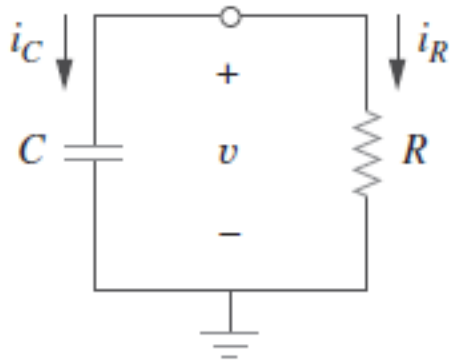


$$ke^{st} \left(sC + \frac{1}{R} \right) = 0$$

$$sC + \frac{1}{R} = 0$$

Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor



$$ke^{st} \left(sC + \frac{1}{R} \right) = 0$$

$$sC + \frac{1}{R} = 0$$

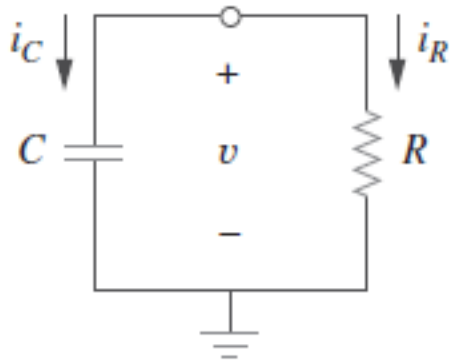
Se cumpre se: $s = -\frac{1}{RC}$

Portanto:

$$v(t) = ke^{st} \quad v(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor



$$ke^{st} \left(sC + \frac{1}{R} \right) = 0$$

$$sC + \frac{1}{R} = 0$$

Se cumpre se: $s = -\frac{1}{RC}$

Portanto:

$$v(t) = ke^{st} \quad v(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Considerando a condição inicial, $t = 0$, quando $V_c = V_0$, então:

$$v(0) = V_0 = ke^{-\frac{0}{RC}} \quad \longrightarrow \quad k = V_0$$

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor

**Resposta natural do circuito RC,
com C inicialmente carregado:**

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Sendo:

V_0 : condição inicial,
quando $V_c = V_0 \neq 0$



Circuito RC

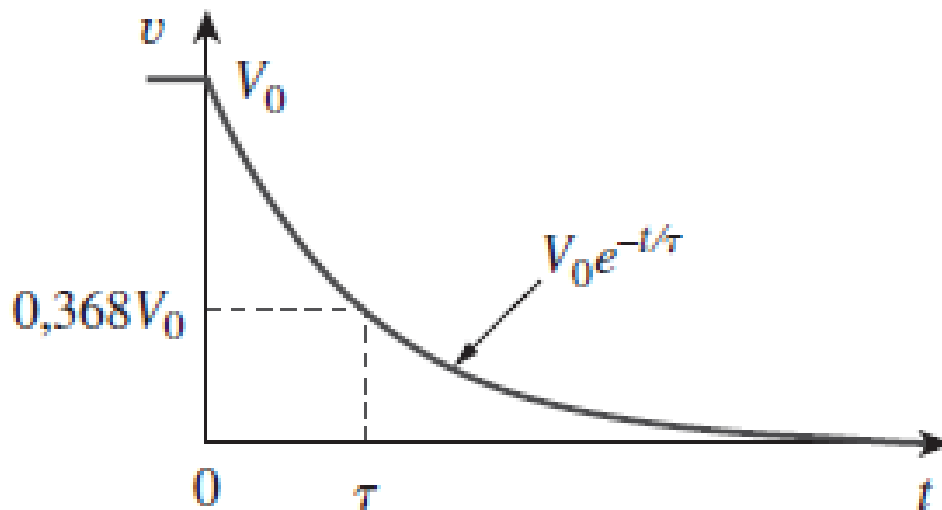
Etapas de carga e descarga do capacitor

**Resposta natural do circuito RC,
com C inicialmente carregado:**

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Sendo:

V_0 : condição inicial,
quando $V_c = V_0 \neq 0$



**Constante de tempo,
em segundos:**

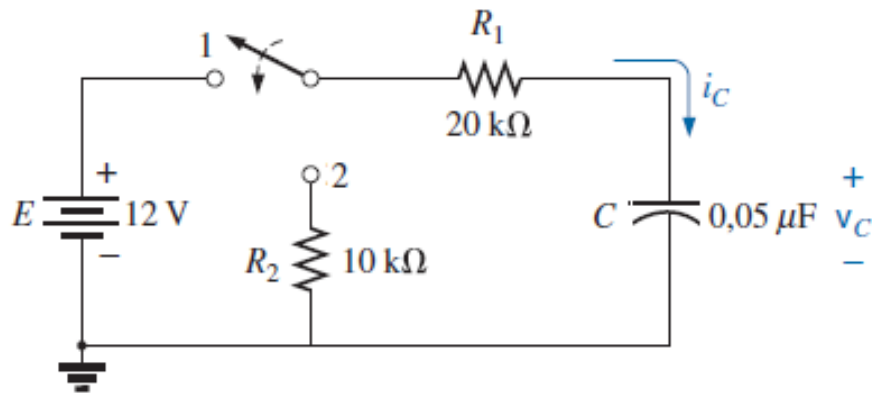
$$\tau = RC$$

Circuito RC

Etapas de carga e descarga do capacitor

Exemplo

Dado o seguinte circuito: b) Calcule v_C se a chave for colocada na posição 2 depois de 10 ms ($\tau=1$ ms quando a chave está na posição 1).



$$\begin{aligned}\tau &= (R_1 + R_2)C \\ &= (20 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega)(0,05 \mu\text{F}) \\ &= 1,5 \text{ ms}\end{aligned}$$

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v(t) = 12 \text{ V } e^{-\frac{t}{1,5 \text{ ms}}}$$



Exercícios

1. Estudar os exemplos e o conteúdo da aula.



Referências

Alexader, C. K., Sadiku, M., N., O. Fundamentos Circuitos Elétricos , 5ta ed. Mc Graw Hill, 2013.

Boylestad, R., L. Introdução à análise de circuitos, 12nd ed. Pearson, 2012.

<https://pt.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-natural-and-forced-response/a/ee-rc-natural-response>

Figura Lembrando :

<https://zenkit.com/en/blog/10-ways-to-remember-what-you-study/>



Universidade de São Paulo (USP), Escola
de Engenharia de Lorena (EEL),
Curso de Engenharia Física



Obrigado

Prof. Dr. Andy Blanco Rodriguez

andy.blanco@usp.br

**Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR), Sala A 53C, Área II da EEL-USP,
Estrada Chiquito de Aquino, N° 1000, Lorena, São Paulo, Brasil.**