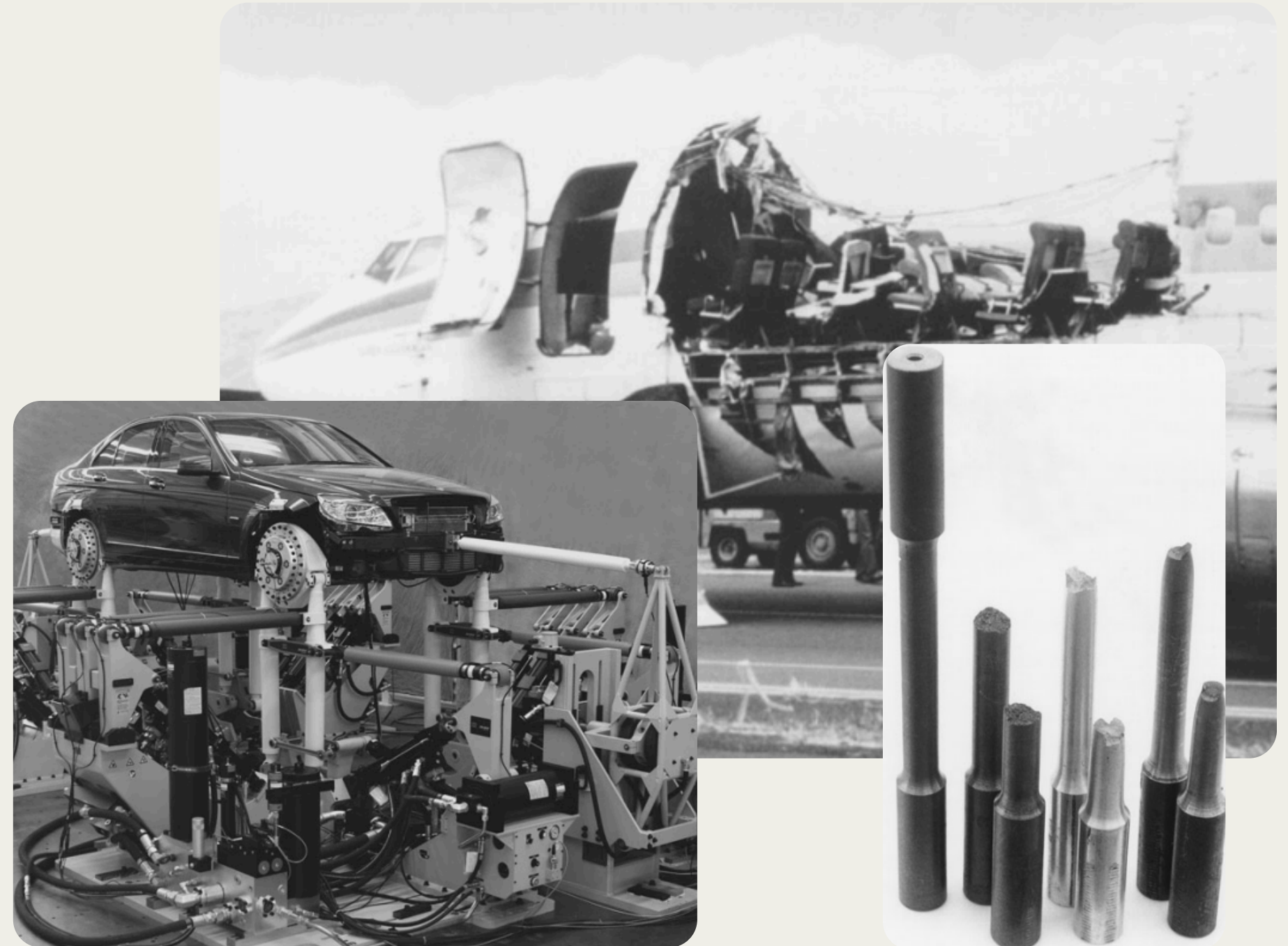
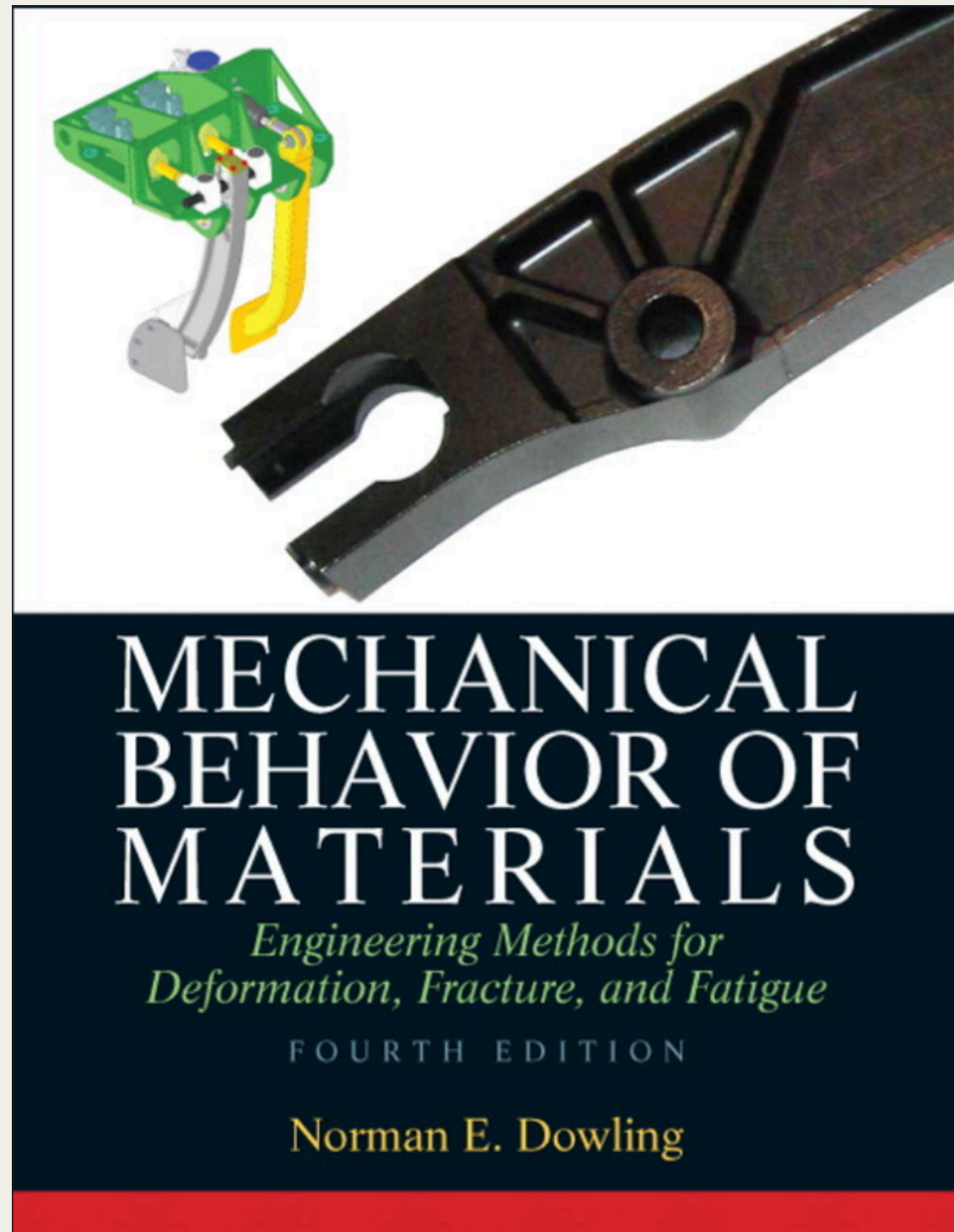


# Comportamento mecânico dos materiais



Dowling, Norman E., 1945-. Mechanical Behavior of Materials : Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue. Englewood Cliffs, N.J. :Prentice Hall, 1993.

# Capítulo 1 - Introdução

---

## 1.1 Introdução

O estudo da deformação e fratura em materiais é chamado de **comportamento mecânico dos materiais**. O conhecimento dessa área fornece a base para evitar esses tipos de falhas em aplicações de engenharia.

A preocupação mais básica em projetos para evitar falhas estruturais é que a tensão em um componente não exceda a resistência do material, sendo a resistência simplesmente a tensão que causa uma falha por deformação ou fratura.

Complexidades adicionais ou causas específicas de falha geralmente exigem análises mais aprofundadas, como as seguintes:

1. Tensões presentes que atuam em mais de uma direção; ou seja, o estado de tensão é biaxial ou triaxial.
2. Componentes reais podem conter defeitos ou trincas pré-existentes que devem ser consideradas.
3. As tensões podem ser aplicadas por longos períodos.
4. As tensões podem ser aplicadas e removidas repetidamente, ou a direção da tensão pode ser revertida repetidamente.

# Capítulo 1 - Introdução

## 1.2 Tipos de falhas de materiais

- A falha que resulta na separação de duas ou mais peças de um componente é denominada **fratura**.
- **Corrosão** é a perda de material devido à ação química.
- **Desgaste** (Wear) é a remoção de superfície devido à abrasão ou aderência entre superfícies sólidas que se tocam.
- Se o desgaste for causado por um fluido (gás ou líquido), ele é chamado de **erosão**, o que é especialmente provável se o fluido contiver partículas duras.

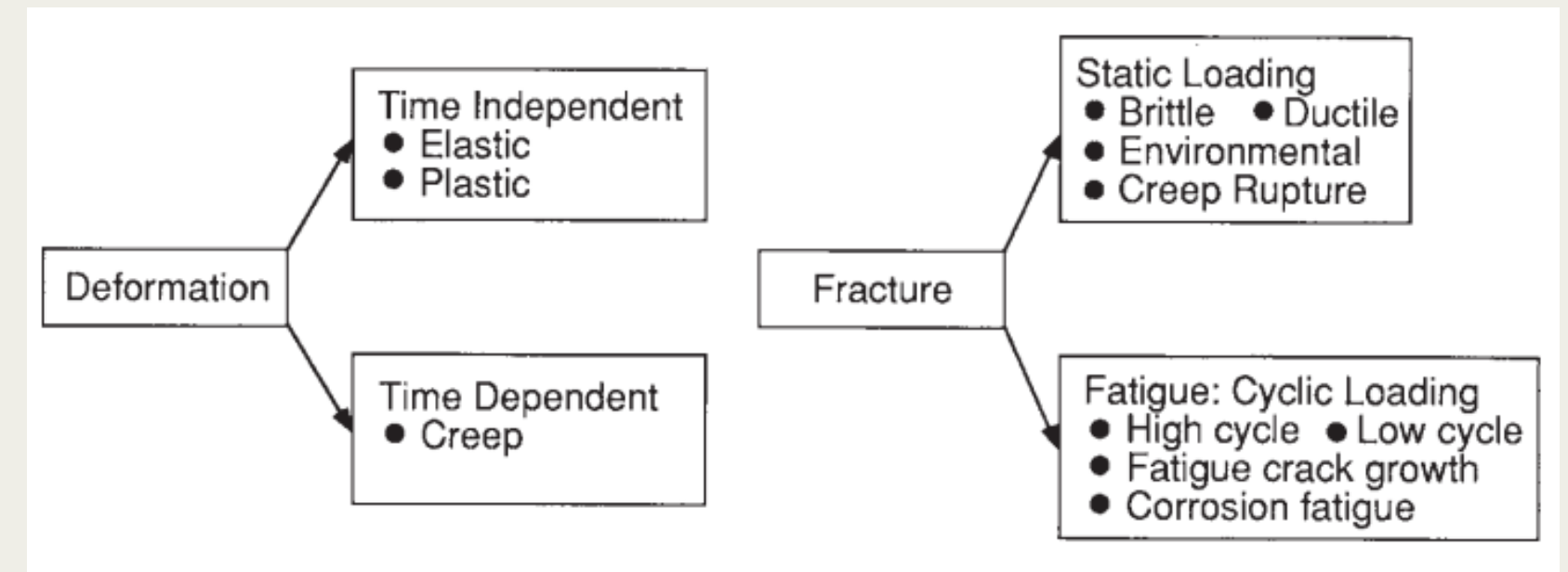


Figura 1.1 Tipos básicos de deformação e fratura.



# Capítulo 1 - Introdução

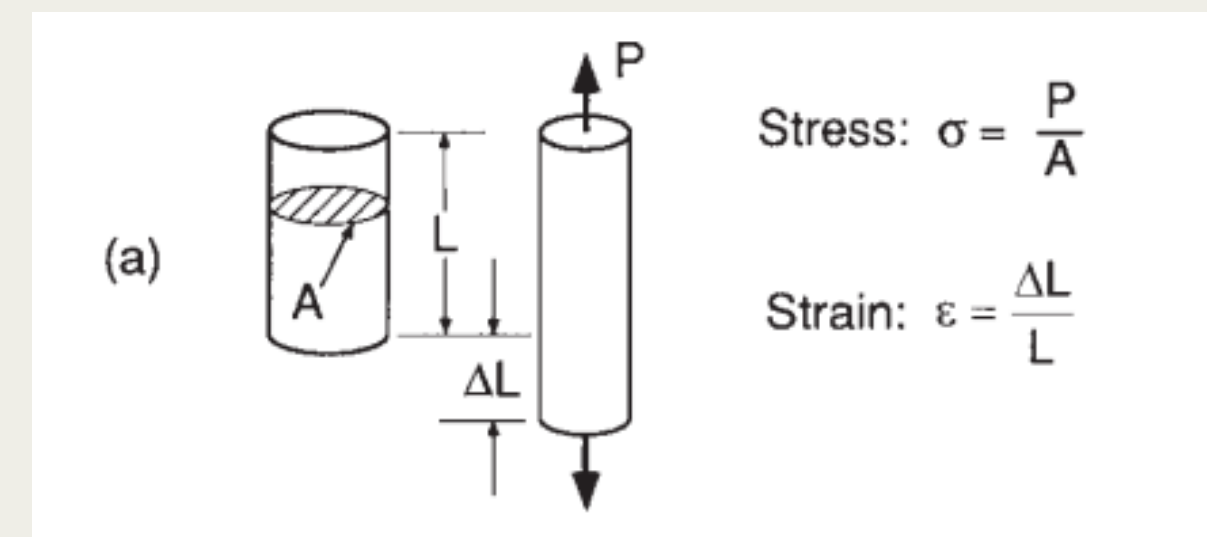
## 1.2.1 Deformação plástica e elástica

A deformação que aparece rapidamente após o carregamento pode ser classificada como deformação elástica ou deformação plástica:

- **Deformação elástica** é recuperada imediatamente após a descarga. Quando esta é a única deformação presente, a tensão e a deformação são geralmente **proporcionais**. Para carga axial, a constante de proporcionalidade é o **módulo de elasticidade (E)**.
- A **deformação plástica** não é recuperada após o descarregamento e, portanto, é **permanente**. Uma vez iniciada a deformação plástica, apenas um pequeno aumento na tensão geralmente causa uma deformação adicional relativamente grande.

Esse processo de deformação adicional relativamente fácil é chamado de **escoamento**, e o valor de tensão em que esse comportamento começa a ser importante para um determinado material é chamado de **limite de escoamento ( $\sigma_0$ )**.

Os materiais capazes de sustentar grandes quantidades de deformação plástica são considerados como **materiais dúcteis**, e aqueles que se fraturam sem muita deformação plástica são **materiais frágeis**.





# Capítulo 1 - Introdução

## 1.2.1 Deformação plástica e elástica

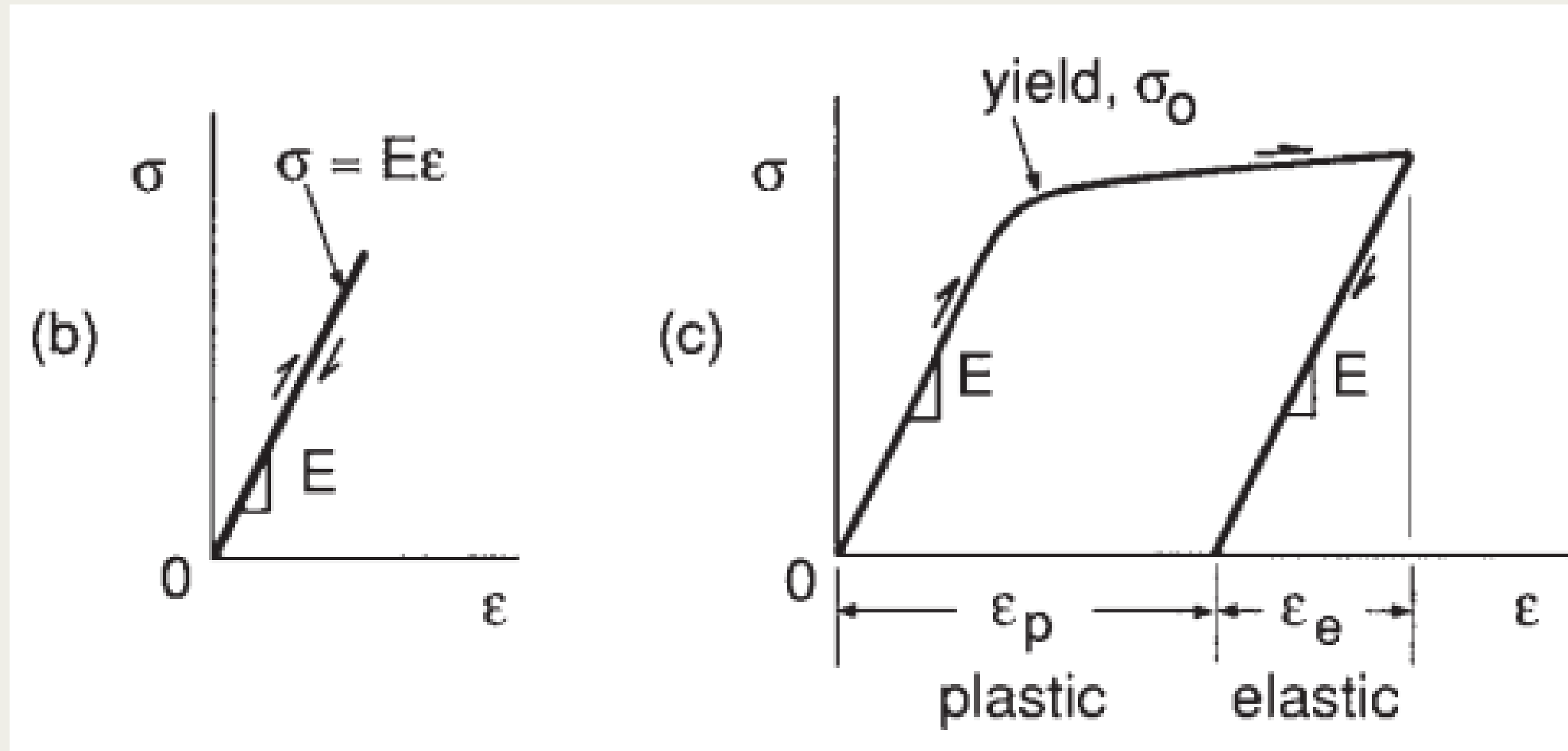


Figura 1.2 Elemento axial (a) sujeito a carga e descarga, mostrando deformação elástica (b) e deformação elástica e plástica (c).

# Capítulo 1 - Introdução

## 1.2.1 Deformação plástica e elástica

Os **ensaios de tração** são frequentemente empregados para avaliar a resistência e a ductilidade dos materiais. Tal teste é realizado esticando-se lentamente uma barra do material sob tração até que ela se rompa (frature).

O **limite de resistência à tração ( $\sigma_u$ )** que é a maior tensão atingida antes da fratura, é obtida juntamente com o **limite de escoamento ( $\sigma_0$ )** e a **deformação na fratura ( $\epsilon_f$ )**.

Esta última é uma medida de ductilidade e geralmente é expressa em porcentagem, sendo então chamada de **alongamento percentual**. Materiais com altos valores de  $\sigma_u$  e  $\epsilon_f$  são considerados tenazes, e materiais tenazes são geralmente desejáveis para uso em projetos.

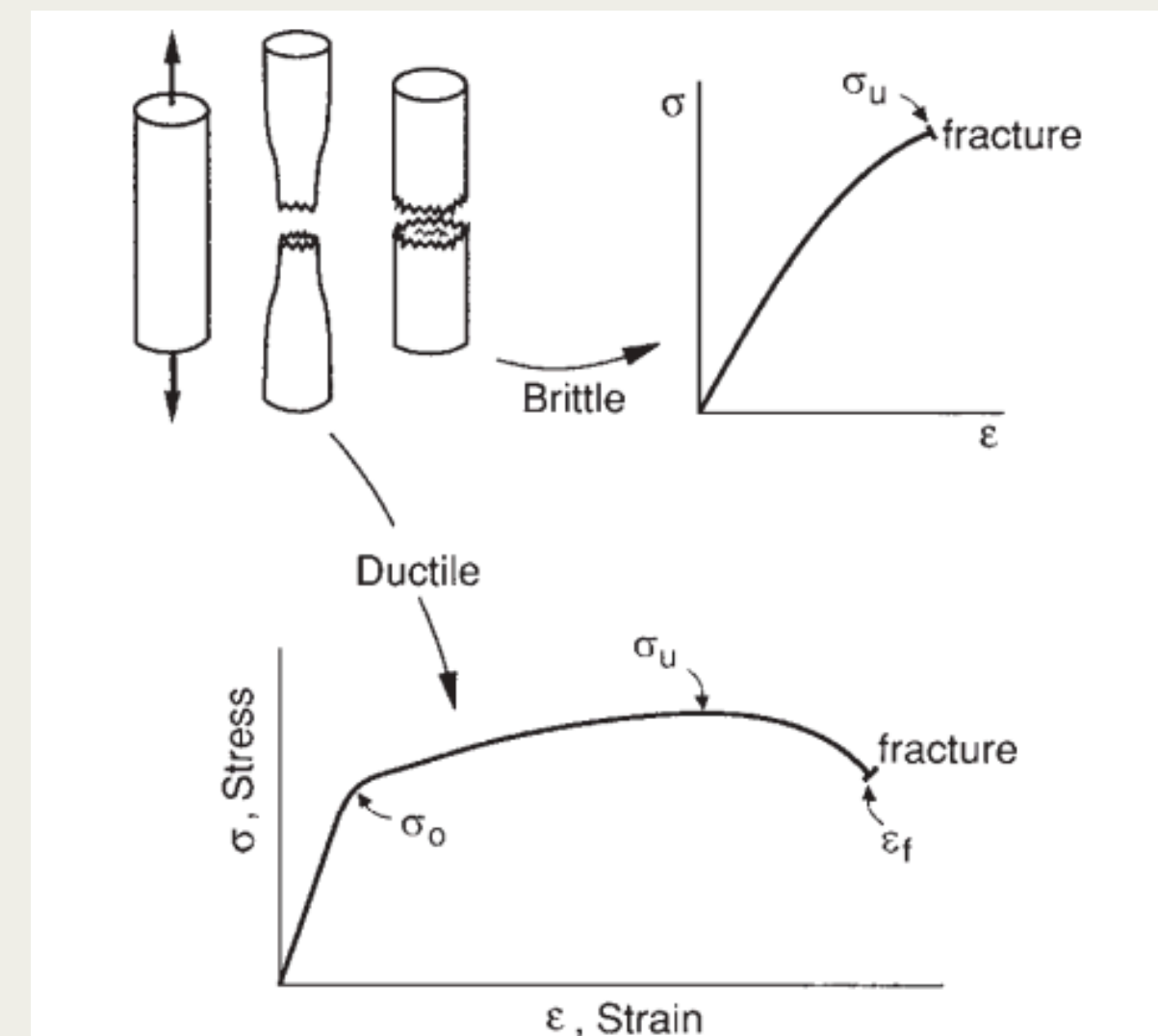


Figura 1.3 Ensaio de tração mostrando comportamento frágil e dúctil. Há pouca deformação plástica para comportamento frágil, mas muita deformação plástica para comportamento dúctil.

# Capítulo 1 - Introdução

---

## 1.2.1 Deformação plástica e elástica

Os **ensaios de tração** são frequentemente empregados para avaliar a resistência e a ductilidade dos materiais. Tal teste é realizado esticando-se lentamente uma barra do material sob tração até que ela se rompa (fratura).

O **limite de resistência à tração ( $\sigma_u$ )** que é a maior tensão atingida antes da fratura, é obtida juntamente com o **limite de escoamento ( $\sigma_o$ )** e a **deformação na fratura ( $\epsilon_f$ )**.

Esta última é uma medida de ductilidade e geralmente é expressa em porcentagem, sendo então chamada de **alongamento percentual**. Materiais com altos valores de  $\sigma_u$  e  $\epsilon_f$  são considerados tenazes, e materiais tenazes são geralmente desejáveis para uso em projetos.

**Flambagem** é a deformação devido à tensão de compressão que causa grandes mudanças no alinhamento de colunas ou placas, talvez a ponto de dobrar ou colapsar. Ou a deformação elástica ou plástica, ou uma combinação de ambas, pode dominar o comportamento.



# Capítulo 1 - Introdução

## 1.2.2 Deformação por fluência

A **fluência** é a deformação que se acumula com o tempo. Dependendo da magnitude da tensão aplicada e da sua duração, a deformação pode tornar-se tão grande que um componente não consegue mais desempenhar a sua função.

Praticamente qualquer material irá se desintegrar ao se aproximar de sua temperatura de fusão.

A fluência é, portanto, frequentemente um problema importante em situações em que se encontram **altas temperaturas**, como em motores de aeronaves com turbinas a gás. A flambagem pode ocorrer de forma dependente do tempo devido à deformação por fluência.

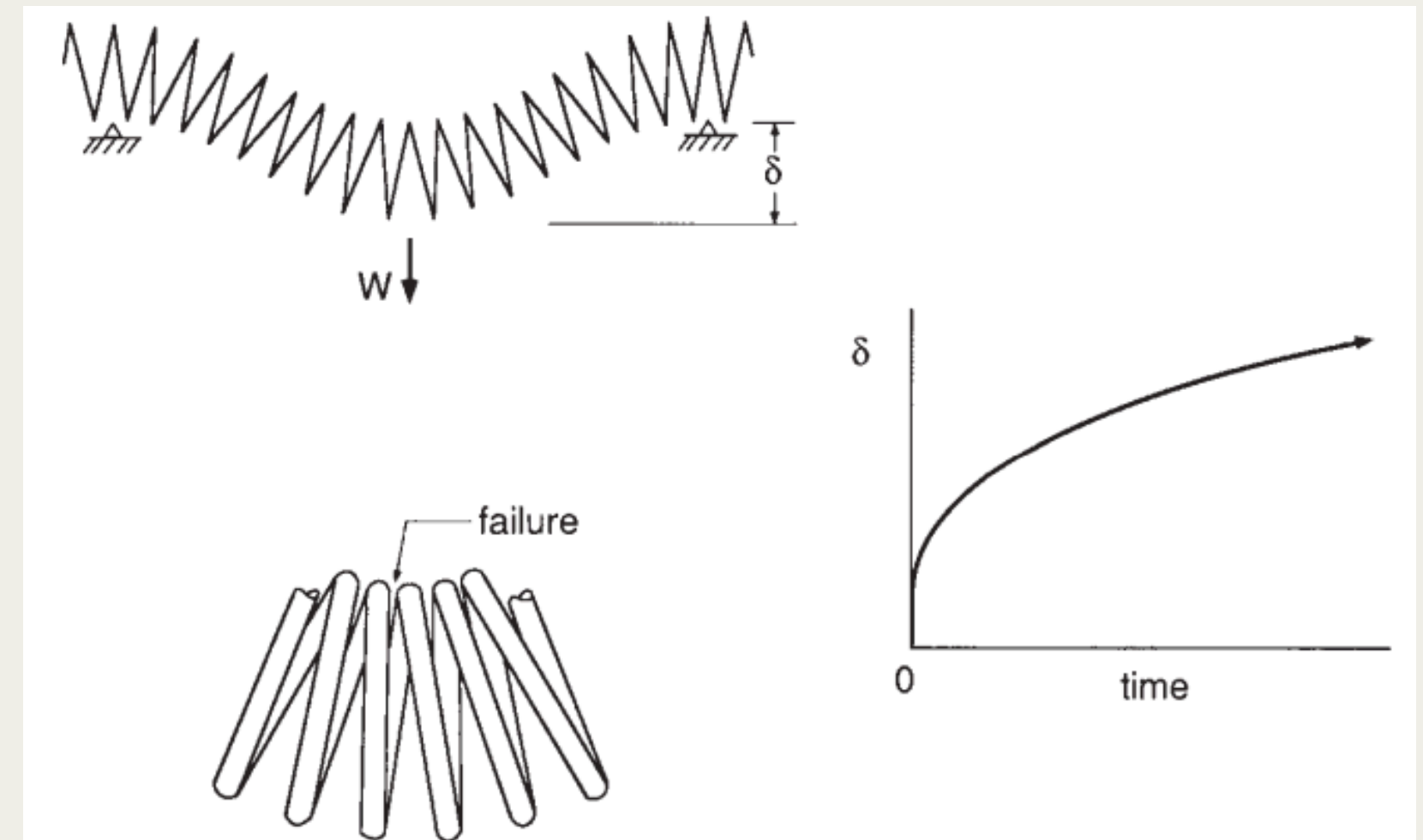


Figura 1.4 O filamento de uma lâmpada de tungstênio cede devido ao seu próprio peso. A deflexão aumenta com o tempo devido à fluência e pode levar ao contato das bobinas adjacentes, o que causa a falha da lâmpada.

# Capítulo 1 - Introdução

---

## 1.2.3 Fratura sob carregamento estático e impacto

Uma fratura rápida pode ocorrer sob carga que não varia com o tempo ou que muda apenas lentamente, chamada de **carga estática**.

Se a carga for aplicada muito rapidamente, chamada carga de **impacto**, é mais provável que ocorra fratura frágil.

Se houver uma trinca ou defeito no material, a fratura frágil pode ocorrer mesmo em aços dúcteis ou ligas de alumínio, ou em outros materiais que normalmente são capazes de se deformar plasticamente em grandes quantidades.

Tais situações são analisadas pela área da **mecânica da fratura**, que é o estudo de trincas em sólidos

A **resistência à fratura frágil** na presença de uma trinca é medida por uma propriedade do material chamada **tenacidade à fratura ( $K_{Ic}$ )**. Materiais com alta resistência, geralmente possuem baixa tenacidade à fratura e vice-versa.

# Capítulo 1 - Introdução

## 1.2.3 Fratura sob carregamento estático e impacto

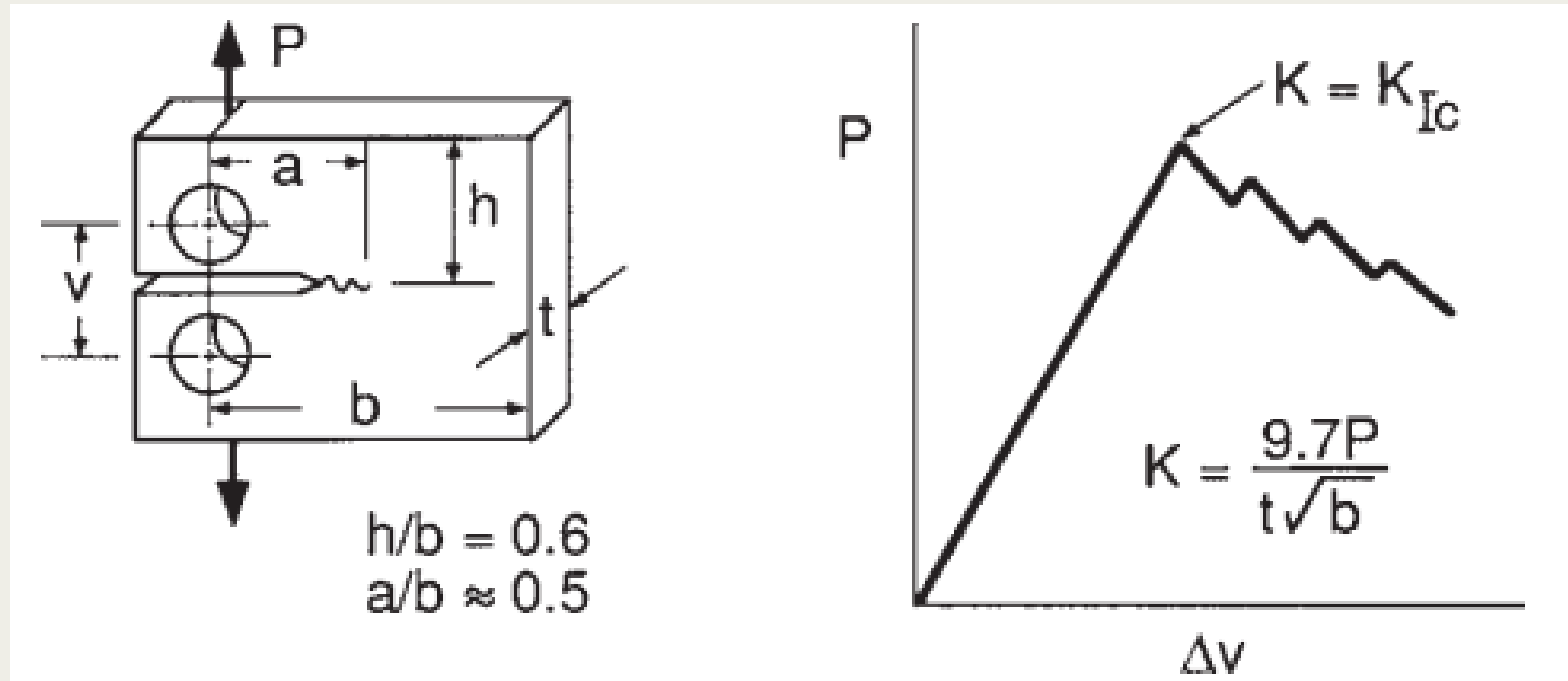


Figura 1.5 Teste de tenacidade à fratura.  $K$  é uma medida de severidade combinando tamanho da fissura, geometria e carga.  $K_{Ic}$  é o valor específico, chamado tenacidade à fratura, onde o material falha.

# Capítulo 1 - Introdução

## 1.2.3 Fratura sob carregamento estático e impacto

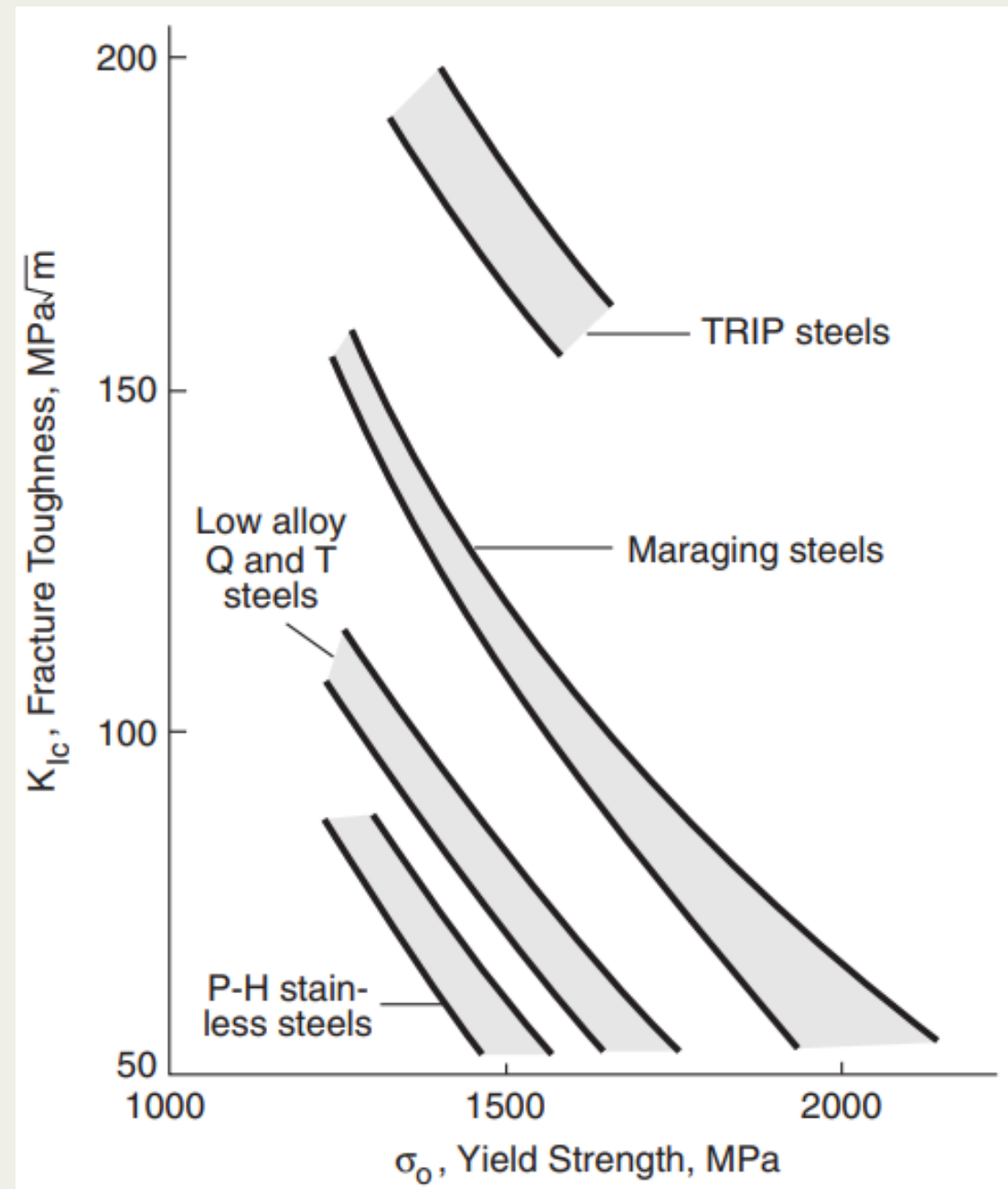


Figura 1.6 Redução da tenacidade à fratura, à medida que o limite de escoamento aumenta devido ao tratamento térmico, para várias classes de aço de alta resistência.

Dowling, Norman E., 1945-. Mechanical Behavior of Materials : Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue. Englewood Cliffs, N.J. :Prentice Hall, 1993.



# Capítulo 1 - Introdução

## 1.2.3 Fratura sob carregamento estático e impacto

A fratura pode ocorrer como resultado de uma combinação de tensão e efeitos químicos, e isso é chamado de **fraturamento ambiental**.

O termo "**trincas por corrosão sob tensão**" também é usado para descrever esse comportamento. Este último termo é especialmente apropriado quando também está envolvida a remoção de material por ação corrosiva, o que não é o caso para todos os tipos de trincas ambientais.

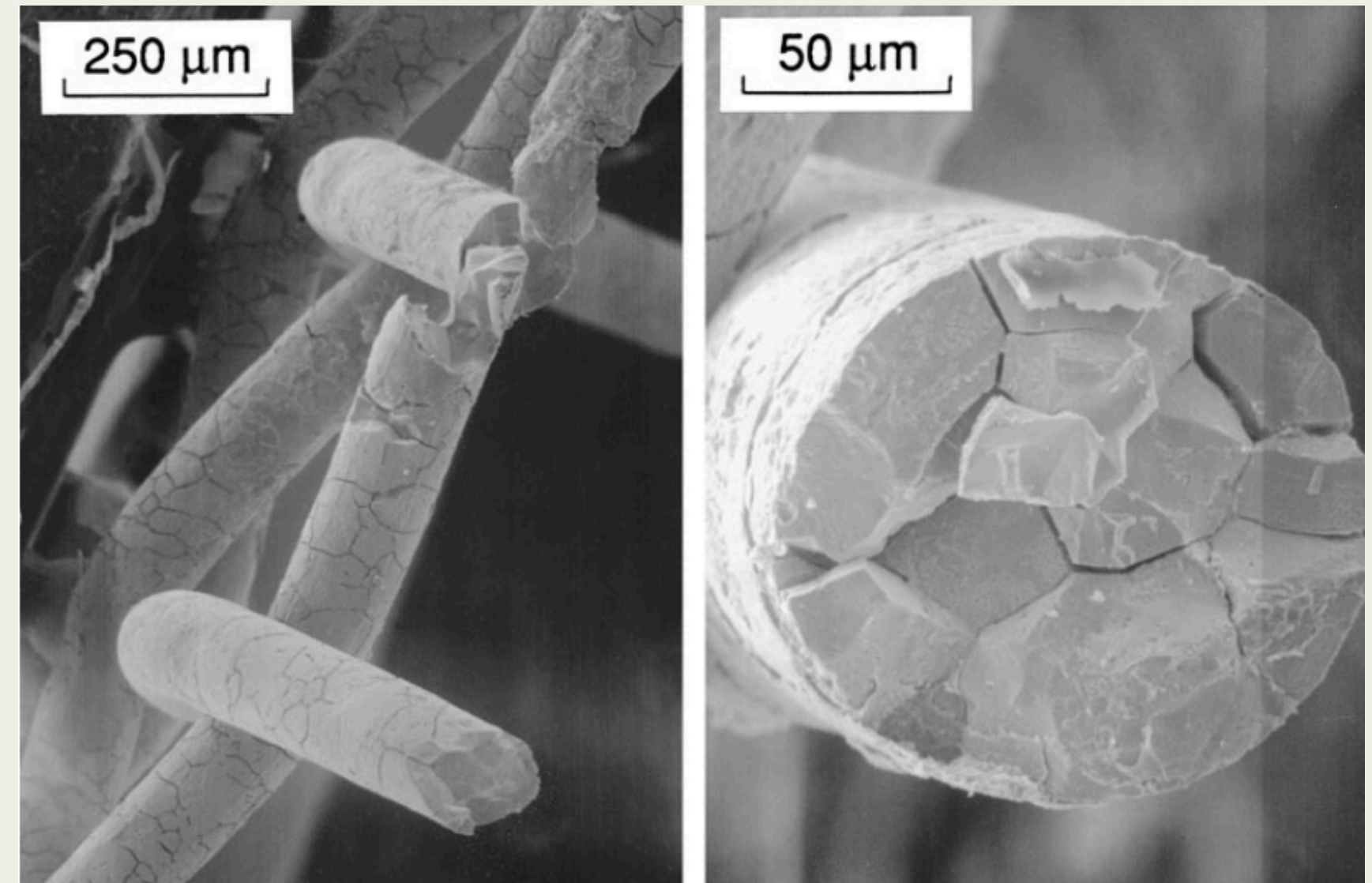


Figura 1.7 Fios de aço inoxidável rompidos devido a ataque ambiental. Estes foram empregados em um filtro exposto a 300°C a um ambiente orgânico complexo que incluía náilon fundido. Ocorreram trincas ao longo dos limites dos grãos cristalinos do material.

Dowling, Norman E., 1945-. **Mechanical Behavior of Materials : Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue**. Englewood Cliffs, N.J. :Prentice Hall, 1993.

# Capítulo 1 - Introdução

## 1.2.4 Fadiga sob carregamento cíclico

Uma causa comum de **fratura é a fadiga**, que é a falha devido a cargas repetidas. Em geral, uma ou mais pequenas trincas surgem no material e crescem até ocorrer a falha completa.

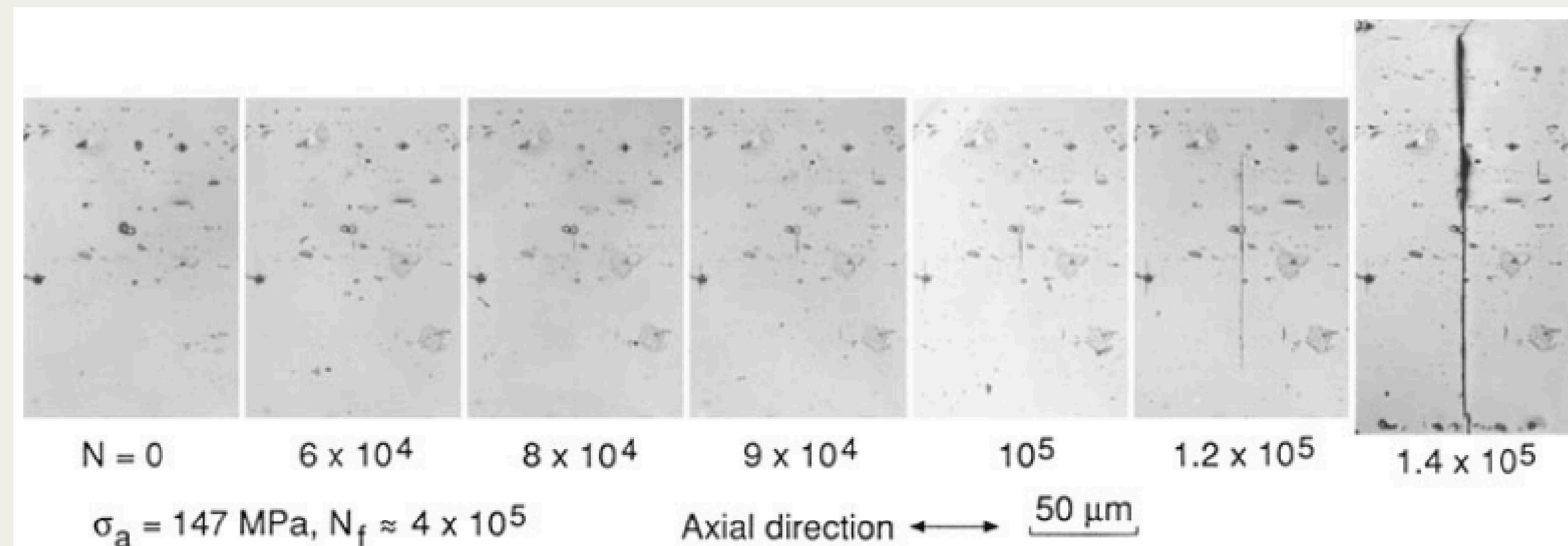


Figura 1.8 Desenvolvimento de uma trinca por fadiga durante a flexão rotativa de uma liga de alumínio endurecida por precipitação. Fotografias com vários números de ciclos são mostradas para um teste que exigiu 400.000 ciclos para falha. A sequência na linha inferior de fotografias mostra mais detalhes da parte central da sequência na linha superior.

# Capítulo 1 - Introdução

## 1.2.4 Fadiga sob carregamento cíclico

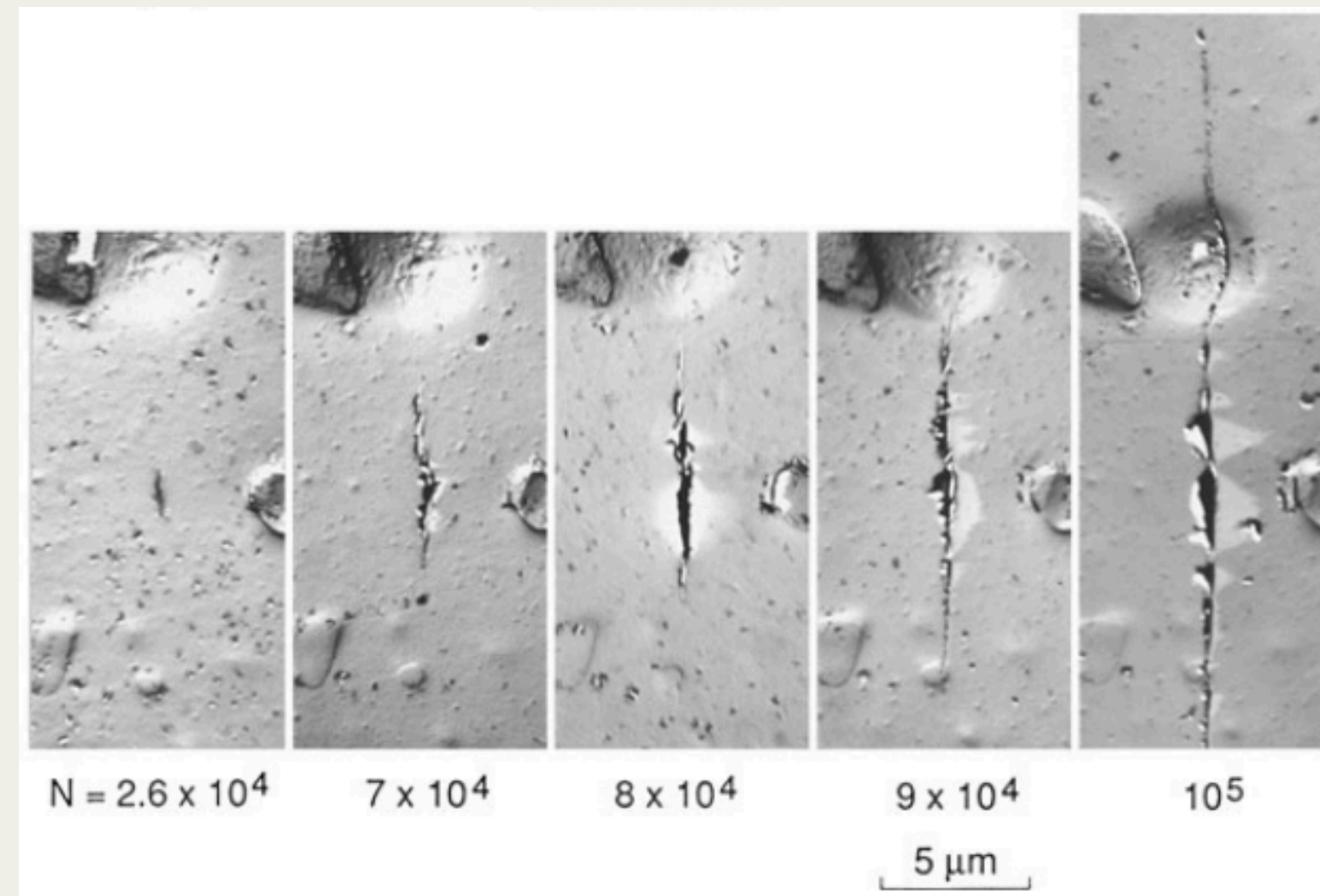


Figura 1.8 Desenvolvimento de uma trinca por fadiga durante a flexão rotativa de uma liga de alumínio endurecida por precipitação. Fotografias com vários números de ciclos são mostradas para um teste que exigiu 400.000 ciclos para falha. A sequência na linha inferior de fotografias mostra mais detalhes da parte central da sequência na linha superior.

# Capítulo 1 - Introdução

## 1.2.4 Fadiga sob carregamento cíclico

Se o número de repetições (ciclos) da carga for grande, digamos, milhões, a situação é chamada de **fadiga de alto ciclo**. Por outro lado, a **fadiga de baixo ciclo** é causada por um número relativamente pequeno de ciclos, digamos, dezenas, centenas ou milhares.

A fadiga de baixo ciclo é geralmente acompanhada por quantidades significativas de deformação plástica, enquanto a fadiga de alto ciclo está associada a deformações relativamente pequenas que são principalmente elásticas.

O aquecimento e resfriamento repetidos podem causar uma tensão cíclica devido à expansão e contração térmica diferenciais, resultando em **fadiga térmica**.

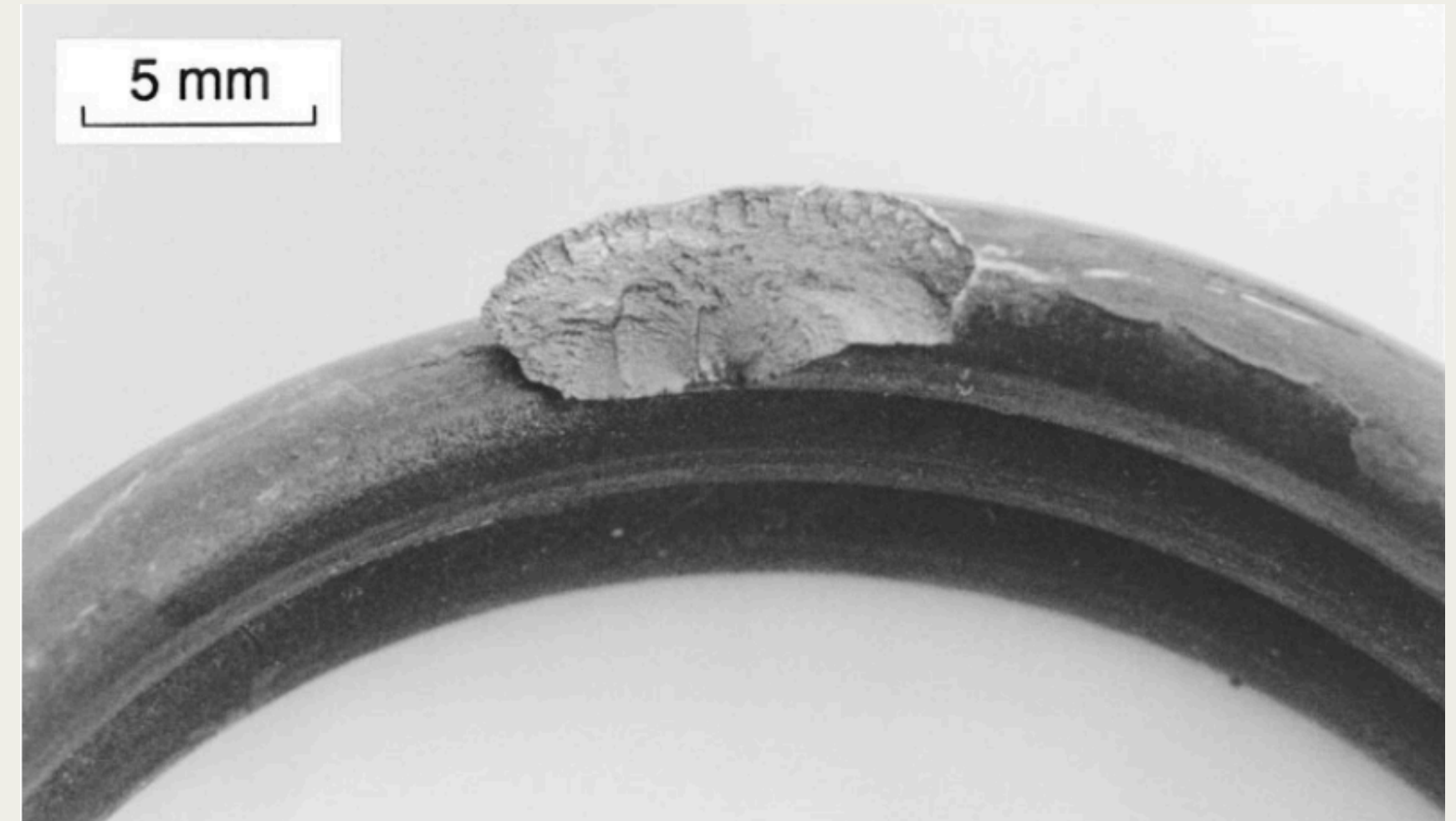


Figura 1.9 Falha por fadiga de uma mola de porta de garagem ocorrida após 15 anos de serviço



# Capítulo 1 - Introdução

## 1.2.5 Efeitos combinados

Dois ou mais dos tipos de falhas podem atuar em conjunto e causar efeitos maiores do que os esperados por sua ação separada; ou seja, há um **efeito sinérgico**.

A fluência e a fadiga podem produzir um grande efeito quando há carga cíclica em alta temperatura.

O desgaste devido a pequenos movimentos entre peças ajustadas pode combinar-se com carregamento cíclico para produzir danos na superfície seguidos por trincas, o que é chamado de **fadiga por atrito**.

Da mesma forma, a fadiga por corrosão é a combinação de carga cíclica e corrosão.



Figura 1.10 Hélice de um helicóptero, mostrando as extremidades internas das pás. O cilindro acima dos rotores normalmente não está presente, mas faz parte da instrumentação usada para monitorar tensões nas pás do rotor para fins experimentais.



# Capítulo 1 - Introdução

---

## 1.3 Projeto e seleção de materiais

**Projetar** é o processo de escolha da forma geométrica, materiais, método de fabricação e outros detalhes necessários para descrever completamente uma máquina, veículo, estrutura ou outro item de engenharia.

É necessário primeiro garantir que o item seja capaz de desempenhar a função pretendida. No entanto, qualquer item de engenharia deve atender a requisitos adicionais:

- o projeto deve ser tal que seja fisicamente **possível** e **econômico** fabricar o item.
- Certos padrões devem ser atendidos quanto à **estética** e à **conveniência** de uso.
- A **poluição** precisa ser minimizada e, espera-se, os materiais e o tipo de construção sejam escolhidos de modo que a eventual reciclagem dos materiais utilizados seja possível.

Por fim, o item deve ser seguro e durável.

A **segurança** é afetada não apenas por características de projeto, como cintos de segurança em automóveis, mas também pela prevenção de falhas estruturais.

**Durabilidade** é a capacidade de um item sobreviver ao uso pretendido por um período de tempo adequadamente longo, de modo que uma boa durabilidade minimiza o **custo de manutenção** e substituição do item.

Além disso, a **durabilidade é importante para a segurança**, pois a baixa durabilidade pode levar a falhas estruturais ou mau funcionamento, o que pode causar um acidente. Além disso, itens mais duráveis exigem substituições menos frequentes, reduzindo assim o impacto ambiental da fabricação de novos itens.

# Capítulo 1 - Introdução

## 1.3.1 Natureza iterativa e gradual do projeto

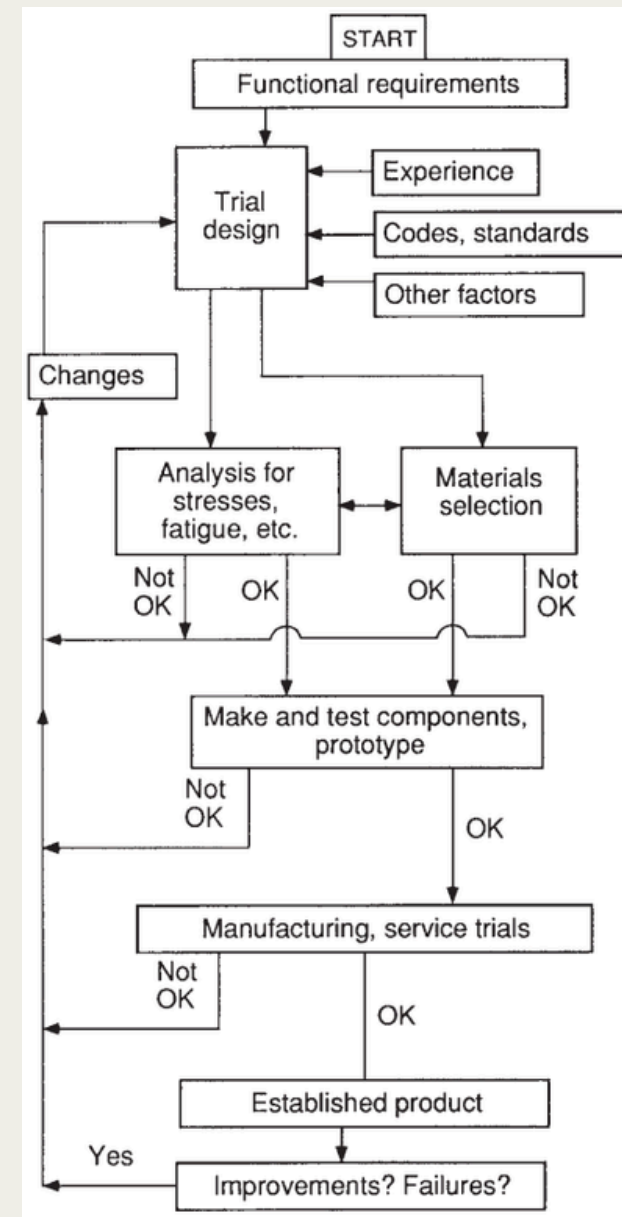


Figura 1.12 Etapas do processo de projeto relacionadas à prevenção de falhas estruturais.

# Capítulo 1 - Introdução

---

## 1.3.2 Fatores de segurança

O fator de segurança em tensão é a razão entre a tensão que causa a falha e a tensão esperada no serviço real do componente. Ou seja;

$$X_1 = \frac{\text{stress causing failure}}{\text{stress in service}}$$

Os fatores de segurança fornecem um grau de garantia de que eventos inesperados em serviço não causam falhas.

Valores para fatores de segurança na faixa de  $X_1 = 1,5$  a  $3,0$  são comuns.

Fatores de segurança em tensão são por vezes complementados ou substituídos por fatores de segurança em vida. Este fator de segurança é a razão entre a vida útil esperada até a falha e a vida útil de serviço desejada. A vida útil é medida por tempo ou por eventos, como o número de voos de uma aeronave:

$$X_2 = \frac{\text{failure life}}{\text{desired service life}}$$

Valores para a vida útil devem ser relativamente grandes, normalmente na faixa de  $X_2 = 5$  a  $20$ .

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

---

## 8.1 Introdução

A presença de uma trinca em um componente pode enfraquecê-lo e fazê-lo quebrar em dois ou mais pedaços. Isso pode ocorrer em tensões abaixo do limite de escoamento do material, onde a falha normalmente não seria esperada.

Quando é difícil evitar trinca, uma metodologia especial chamada **mecânica da fratura** pode ser usada para auxiliar na seleção de materiais e no projeto de componentes para minimizar a possibilidade de falha.

Além das próprias trincas, outros tipos de defeitos que têm a forma de trincas podem facilmente evoluir para trincas, e estes precisam ser tratados como se fossem trincas.

A mecânica da fratura fornece propriedades dos materiais que podem ser relacionadas ao comportamento dos componentes, permitindo análises específicas de resistência e vida útil, conforme limitadas por vários tamanhos e formatos de trincas. Assim, fornece uma base para a escolha de materiais e detalhes de projeto, de modo a minimizar a possibilidade de falhas devido a trincas.



# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.2 Discussões preliminares

### 8.2.1 Trincas como concentradores de tensão

Considere um furo elíptico em uma placa de material. Supõe-se que o furo seja pequeno em comparação com a largura da placa e esteja alinhado com seu eixo principal perpendicular à direção de uma tensão uniforme ( $S$ ) aplicada remotamente. Também chamada de tensão remota.

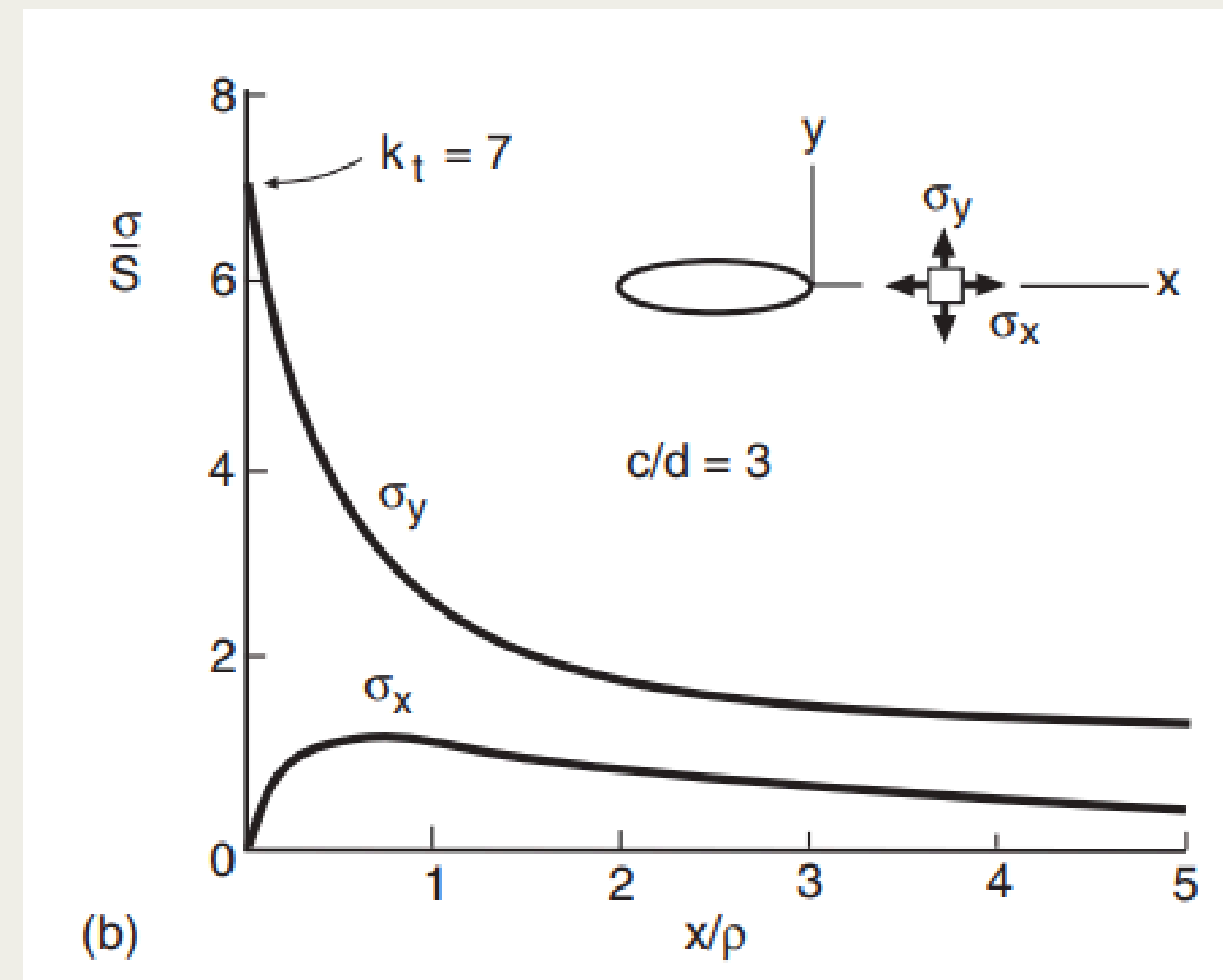
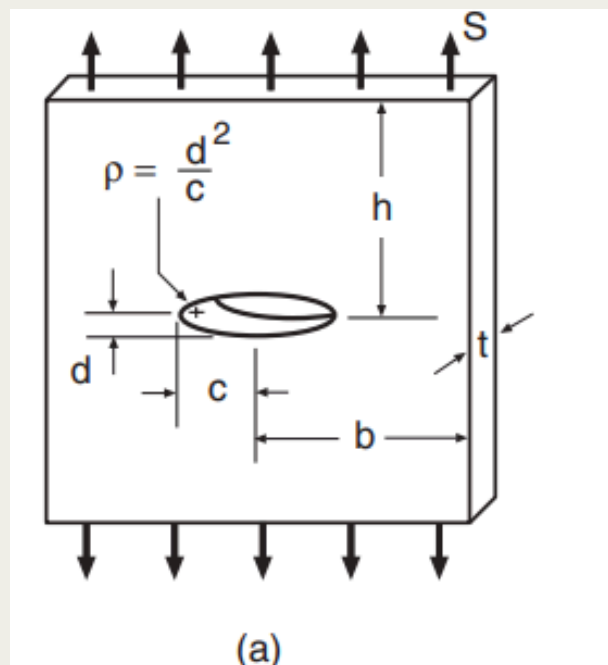


Figura 8.3 Furo elíptico em uma placa larga sob tensão uniforme remota e a distribuição de tensão ao longo do eixo  $x$  próximo ao furo para um caso particular.

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.2.1 Trincas como concentradores de tensão

O campo de tensão uniforme é alterado na vizinhança do furo, como ilustrado para um caso particular.

O efeito mais visível no furo é sua influência na tensão  $\sigma_y$  paralela a  $S$ . Longe do furo, essa tensão é igual a  $S$ .

Se examinado ao longo do eixo  $x$ , o valor de  $\sigma_y$  aumenta acentuadamente perto do orifício e tem um valor máximo na borda do orifício. Este valor máximo depende das proporções da elipse e do raio de sua ponta  $\rho$ :

$$\sigma_y = S \left( 1 + 2 \frac{c}{d} \right) = S \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{c}{\rho}} \right)$$

Um **fator de concentração de tensão ( $k_t$ )** para a elipse pode ser definido como a razão entre a tensão máxima e a tensão remota:

$$k_t = \sigma_y / S.$$

Considere uma elipse estreita onde a meia-altura  $d$  se aproxima de zero, de modo que o raio da ponta  $\rho$  também se aproxima de zero, o que corresponde a uma trinca ideal em forma de fenda. Neste caso,  $\sigma_y$  torna-se infinito, assim como  $k_t$ . Portanto, uma trinca aguda causa uma severa concentração de tensão e é especial no sentido de que a tensão é teoricamente infinita se a trinca for idealmente aguda.

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

---

## 8.2.2 Comportamento das pontas de trincas em materiais reais

É claro que uma tensão infinita não pode existir em um material real. Se a carga aplicada não for muito alta, o material pode acomodar a presença de uma trinca inicialmente acentuada, de tal forma que a tensão teoricamente infinita seja reduzida a um valor finito.

Em materiais dúcteis, como muitos metais, grandes deformações plásticas ocorrem nas proximidades da ponta da trinca. A região dentro da qual o material cede é chamada de **zona plástica**.

Uma intensa deformação na ponta da trinca resulta no arredondamento da ponta afiada para um raio pequeno, mas não nulo. Portanto, a tensão não é mais infinita, e a trinca está aberta perto de sua ponta por uma quantidade finita,  $\delta$ , chamada de **deslocamento de abertura da ponta da trinca (CTOD)**.

Em alguns polímeros, desenvolve-se uma região contendo vazios alongados, com uma estrutura fibrosa unindo as faces da trinca, o que é chamado de zona de fissura. Em materiais frágeis, como a cerâmica, pode desenvolver-se uma região com alta densidade de pequenas trincas na ponta da trinca.

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.2.2 Comportamento das pontas de trincas em materiais reais

Em todos os três casos, a ponta da trinca sofre deformação intensa e desenvolve uma separação finita próxima à sua extremidade. A tensão muito alta que idealmente existiria perto da ponta da trinca é distribuída por uma região maior e é considerada redistribuída. Um valor finito de tensão que pode ser resistido pelo material, portanto existe perto da ponta da trinca, e as tensões um pouco mais distantes são maiores do que seriam para uma trinca ideal.

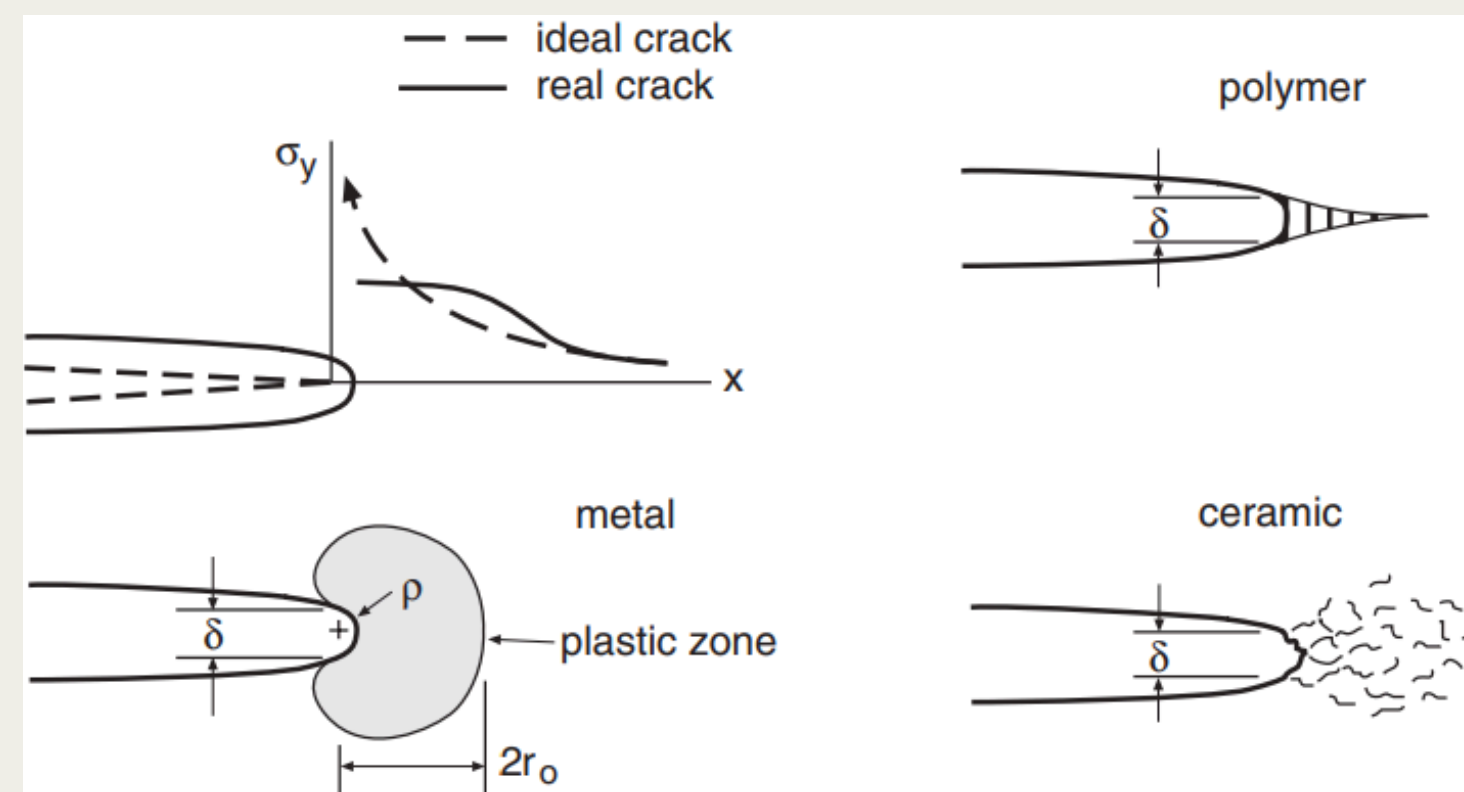


Figura 8.4 Tensões finitas e raios diferentes de zero nas pontas das fissuras em materiais reais. Uma região de intensa deformação se forma devido à plasticidade, fissuração ou microfissura.

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

---

## 8.2.3 Efeitos das trincas na resistência do material

Se a carga aplicada a um elemento que contém uma trinca for muito alta, a trinca pode crescer repentinamente e fazer com que o elemento falhe, fraturando-se de maneira frágil, ou seja, com pouca deformação plástica.

Da teoria da mecânica da fratura, uma grandeza útil chamada **fator de intensidade de tensão (K)** pode ser definida. Especificamente, K é uma medida da severidade de uma situação de trinca, influenciada pelo tamanho da trinca, tensão e geometria. Ao definir K, assume-se que o material se comporta de maneira **linear-elástica**, de acordo com a lei de Hooke, de modo que a abordagem utilizada é chamada de **mecânica da fratura elástico-linear (LEFM)**.

Um dado material pode resistir a uma trinca sem que ocorra fratura frágil, desde que este K esteja abaixo de um **valor crítico (K<sub>c</sub>)**, denominado **tenacidade à fratura**. Os valores de K<sub>c</sub> variam amplamente para diferentes materiais e são afetados pela temperatura e taxa de carregamento, e secundariamente pela espessura do elemento. Elementos mais espessos apresentam valores de K<sub>c</sub> mais baixos até que um valor de pior caso seja atingido, denominado **tenacidade à fratura por deformação plana (K<sub>Ic</sub>)**. Portanto, K<sub>Ic</sub> é uma medida da capacidade de um dado material de resistir à fratura na presença de uma trinca.



# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

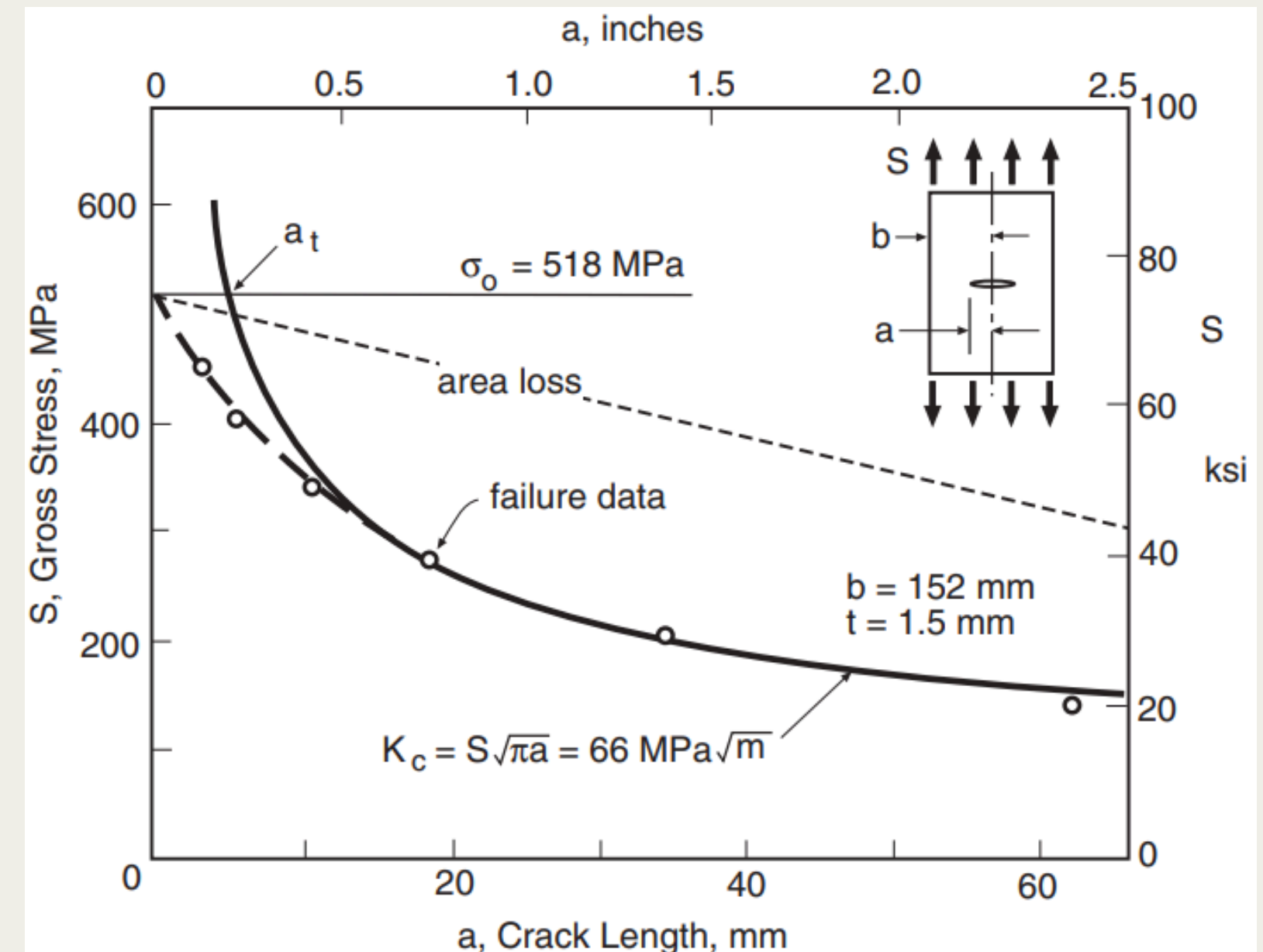
## 8.2.3 Efeitos das trincas na resistência do material

Considere uma trinca no centro de uma placa larga de material tensionado. Neste caso,  $K$  depende da tensão  $S$  aplicada remotamente e do **comprimento da trinca ( $a$ )**, medido a partir da linha central:

$$K = S\sqrt{\pi a} \quad (a \ll b)$$

Para um dado material e espessura com tenacidade à fratura  $K_c$ , o valor crítico da tensão remota necessária para causar a fratura é, portanto,

$$S_c = \frac{K_c}{\sqrt{\pi a}}$$



# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.2.4 Efeitos de trincas para materiais com comportamento frágil e dúctil

Considere o comprimento da trinca onde a tensão de ruptura prevista pelo LEFM é igual à resistência ao escoamento. Substituindo  $S_c = \sigma_o$ , temos

$$a_t = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_c}{\sigma_o} \right)^2$$

De forma aproximada, trincas mais longas que este comprimento de trinca de transição farão com que a resistência seja limitada pela fratura frágil, em vez do escoamento.

Assim, se trincas com comprimento em torno ou **maior que o  $a_t$**  de um dado material forem prováveis de estarem presentes, a mecânica da fratura **deve ser empregada no projeto**.

Por outro lado, para comprimentos de trinca **abaixo de  $a_t$** , espera-se um comportamento dominado pelo escoamento, de modo que haverá pouca ou nenhuma redução de resistência devido à trinca.

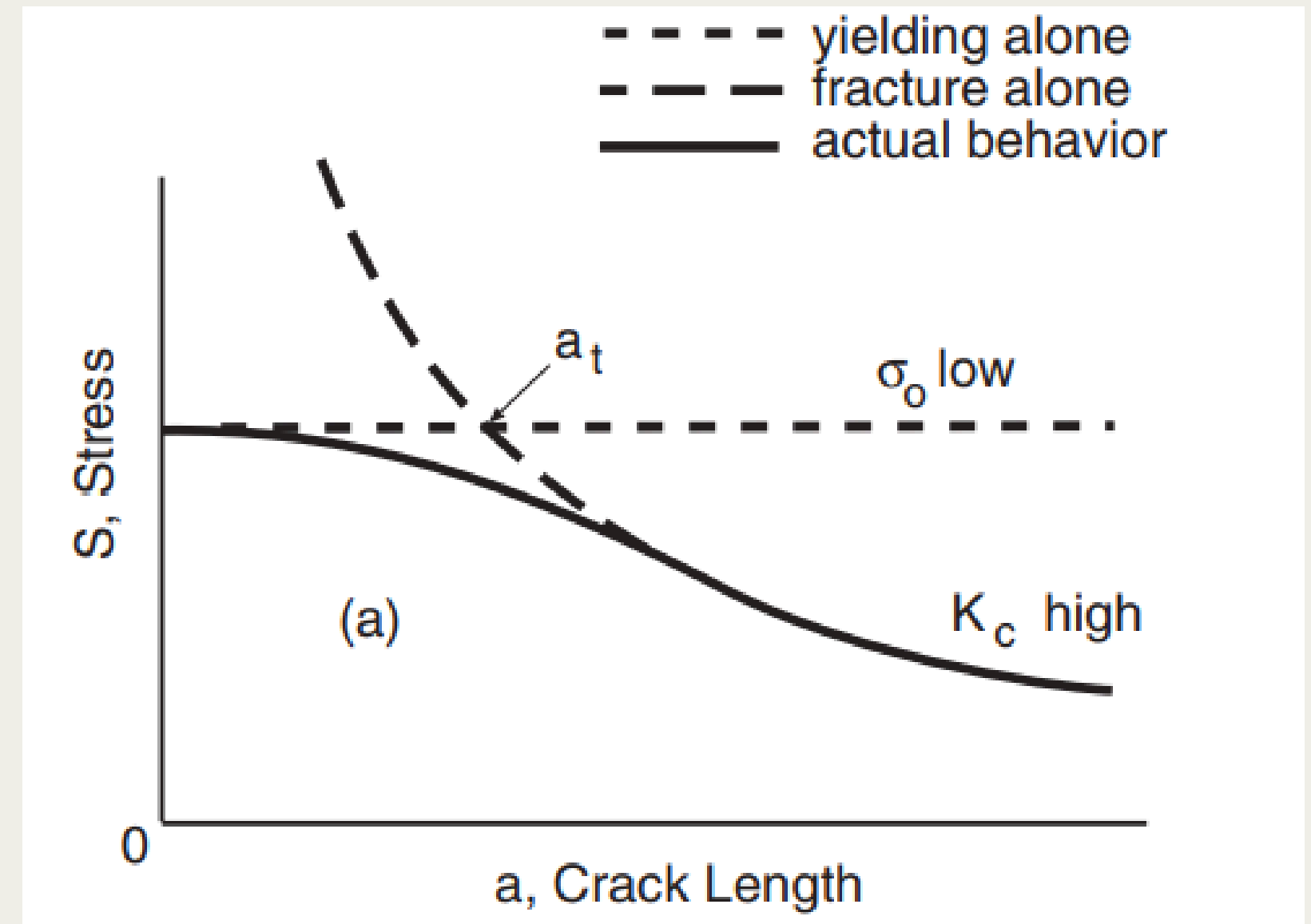
Observe que essa relação se baseia no caso de uma placa larga com uma trinca central, e que os valores serão diferentes para outros casos geométricos.

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.2.4 Efeitos de trincas para materiais com comportamento frágil e dúctil

Considere dois materiais, um com  $\sigma_0$  baixo e  $K_c$  alto, e o outro com uma combinação oposta, ou seja,  $\sigma_0$  alto e  $K_c$  baixo. Essas combinações de propriedades causam um  $a_t$  relativamente grande para o material de baixa resistência, mas um  $a_t$  pequeno para o de alta resistência.

Assim, trincas de tamanho médio podem não afetar o material de baixa resistência, mas podem limitar severamente a utilidade do de alta resistência. Essa tendência inversa entre o limite de escoamento e a tenacidade à fratura é bastante comum em qualquer classe de materiais. Baixa resistência em um ensaio de tração geralmente é acompanhada por alta ductilidade e também por alta tenacidade à fratura. Por outro lado, alta resistência geralmente está associada a baixa ductilidade e baixa tenacidade à fratura.



# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.2.4 Efeitos de trincas para materiais com comportamento frágil e dúctil

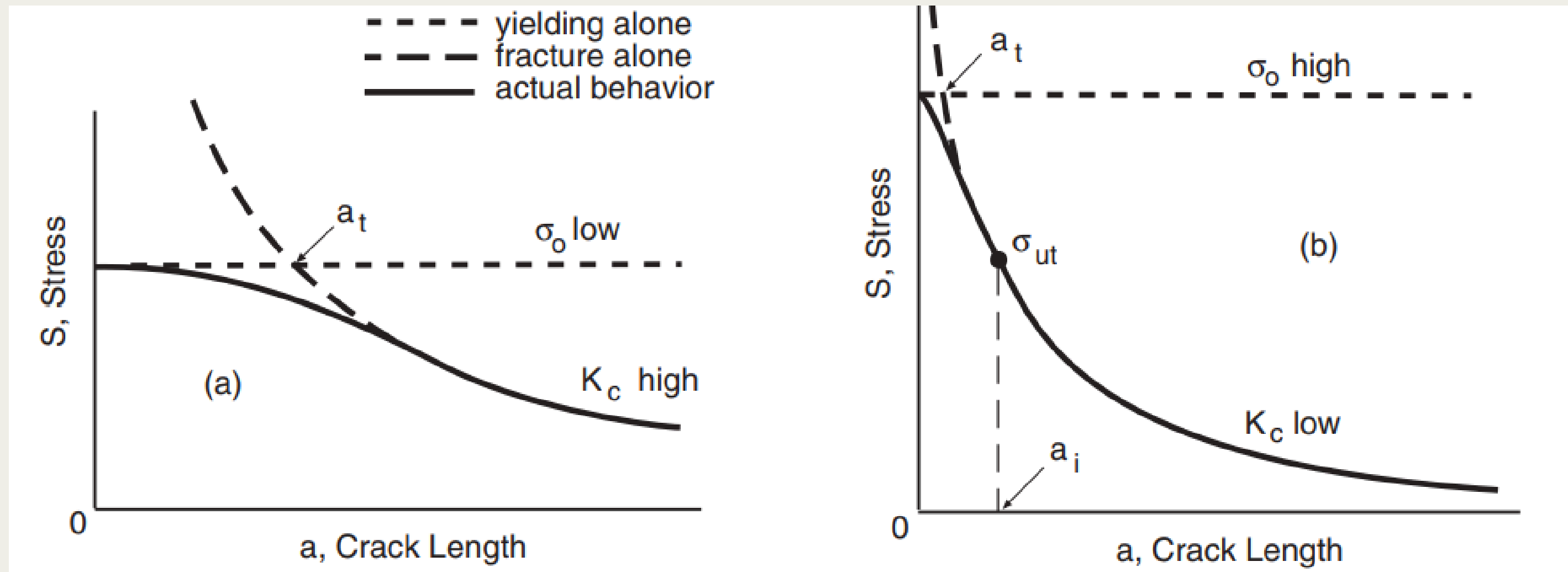


Figura 8.6 Comprimento da trinca de transição  $\alpha$  para um material de baixa resistência e alta tenacidade (a) e para um material de alta resistência e baixa tenacidade (b). Se (b) contém falhas internas  $a_i$ , seu limite de resistência à tração  $\sigma_{ut}$  é controlado pela fratura frágil.

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.2.5 Materiais com defeitos internos

Conforme já discutido em capítulos anteriores, muitos materiais frágeis contêm naturalmente pequenas trincas ou defeitos em forma de trinca. Isso geralmente se aplica a vidro, pedra natural, cerâmica e alguns metais fundidos.. Pode-se interpretar que esses materiais têm um alto limite de escoamento, mas essa resistência nunca pode ser alcançada sob carga de tração devido à falha precoce devido a pequenas falhas e à baixa tenacidade à fratura.

A interpretação pode ser que esses materiais têm uma alta resistência ao escoamento, mas essa resistência nunca pode ser alcançada sob carregamento de tração devido a uma falha precoce causada por pequenos defeitos e uma baixa tenacidade à fratura.

Esse ponto de vista é apoiado pelo fato de que os materiais frágeis têm resistências consideravelmente maiores sob compressão do que sob tração, porque os defeitos simplesmente se fecham sob compressão e, assim, têm um efeito muito reduzido.

Denotando o tamanho do defeito inerente em tal material como  $a_i$ , tem-se a resistência máxima à tração:

$$\sigma_{ut} = \frac{K_c}{\sqrt{\pi a_i}}$$

Novas trincas de tamanho em torno ou abaixo de  $a_i$  têm pouco efeito, pois não são piores do que os defeitos já existentes. O material é, portanto, considerado internamente defeituoso. Além disso, como os defeitos realmente presentes podem variar consideravelmente de amostra para amostra, geralmente há uma grande dispersão estatística em  $\sigma_{ut}$ .



# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.3. Conceitos matemáticos

Um corpo com trinca pode ser carregado em qualquer um ou uma combinação dos três modos de deslocamento:

- O Modo I é chamado de modo de abertura e consiste nas faces da trinca simplesmente se afastando.
- Para o Modo II, o modo de deslizamento, as faces da trinca deslizam uma em relação à outra em uma direção normal à borda principal da trinca.
- O Modo III, o modo de rasgamento, também envolve deslizamento relativo das faces da trinca, mas agora a direção é paralela à borda principal.

Modo I é causado por carregamento de tração, enquanto os outros dois são causados por carregamento de cisalhamento em diferentes direções, onde estão a maioria dos problemas de trincas de interesse na engenharia.

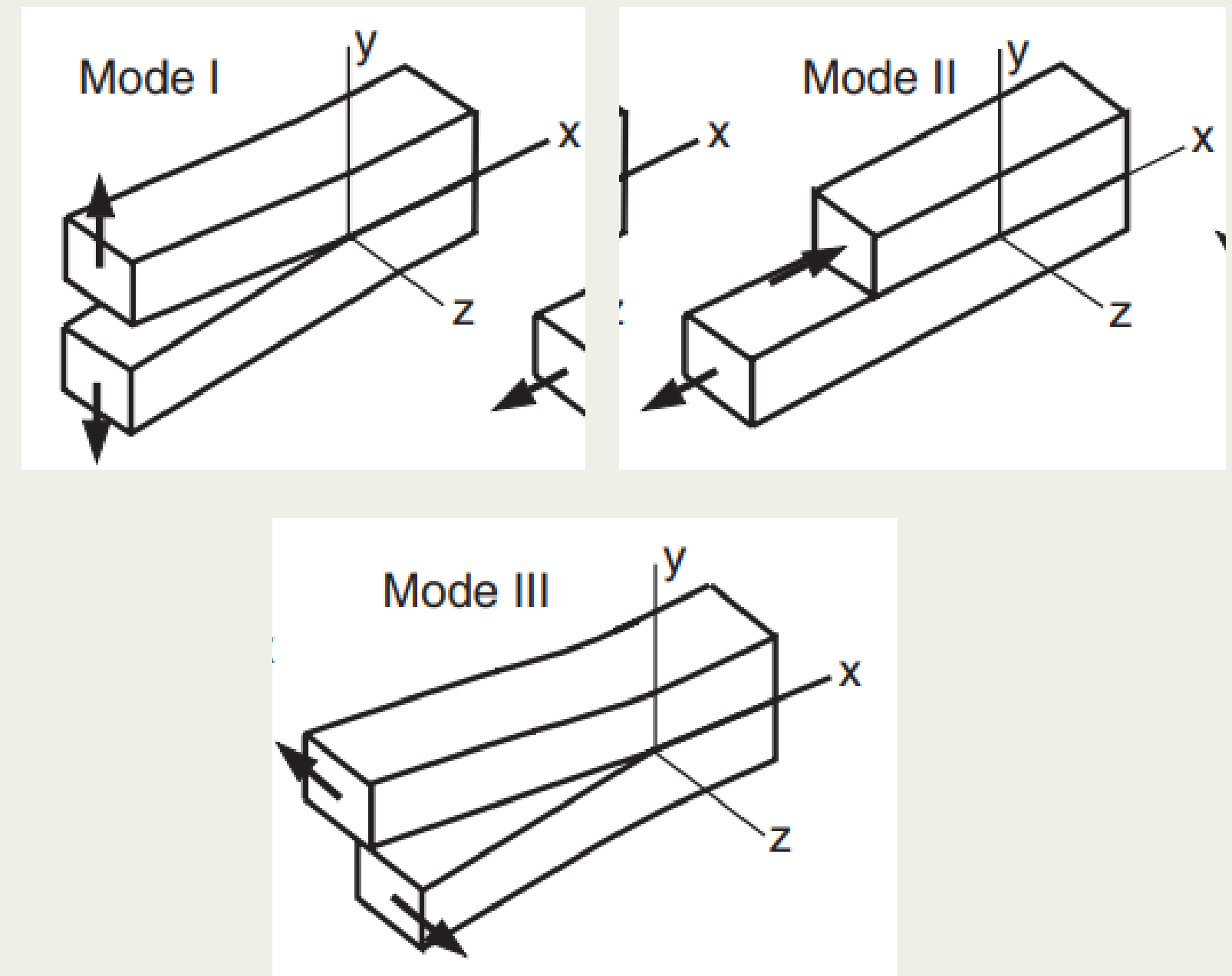


Figura 8.8 Modos básicos de deslocamento da superfície da fissura

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.3.1 Taxa de liberação de energia de deformação (G)

Considere um elemento trincado sob uma força Modo I (P), onde a trinca tem comprimento (a). Suponha que o comportamento do material seja linear-elástico, o que requer que o comportamento de P vs V seja linear.

De forma semelhante a uma mola linear, a energia potencial U é armazenada no elemento, como resultado das deformações elásticas em todo o seu volume.

Observe que v é o deslocamento no ponto de carregamento e  $U = Pv/2$  é a área triangular sob a curva P-v.

Se a trinca avança uma pequena quantidade (da) enquanto o deslocamento é mantido constante, a rigidez do elemento diminui. Isso resulta na diminuição da energia potencial por uma quantidade (dU). A taxa de variação da energia potencial com o aumento da área da trinca é definida como a taxa de liberação de energia de deformação (G).

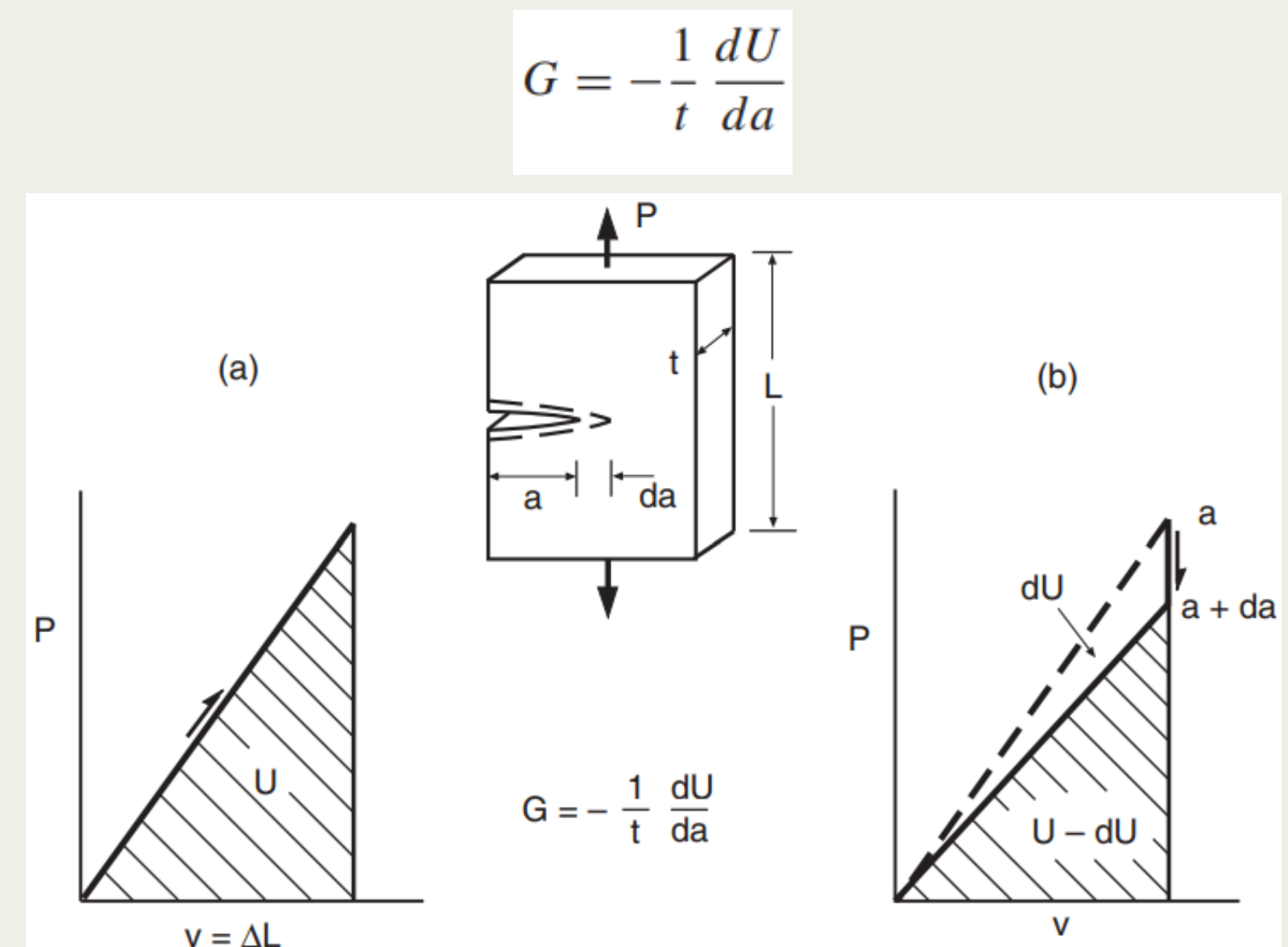


Figura 8.9 Energias potenciais para dois comprimentos de fissuras vizinhas e a mudança de energia  $dU$  usada para definir a taxa de liberação de energia de deformação  $G$ .

# Demonstração da equação de Griffith

---

Imagine uma placa de material com uma pequena trinca, sob uma tensão de tração. A trinca não se propaga instantaneamente porque o material tem uma certa resistência à fratura. A teoria de Griffith, formulada em 1920, propõe que a propagação da trinca é controlada por um balanço de energia.

Em termos simples, uma trinca se propagará apenas se a energia total do sistema diminuir ou permanecer constante. O sistema que estamos analisando é a placa com a trinca sob tensão. A energia total do sistema (ET) é composta por três partes principais:

- Energia Potencial de Deformação ( $U_e$ ): A energia armazenada no material devido à deformação elástica (o material esticando).
- Energia de Superfície ( $U_s$ ): A energia necessária para criar as novas superfícies da trinca.
- Trabalho Externo ( $W$ ): O trabalho realizado pela carga aplicada sobre o material.

$$E_T = U_e + U_s - W$$

**Observação:** O trabalho externo tem sinal negativo porque, à medida que a trinca se propaga, o material se deforma e as cargas externas realizam trabalho sobre ele, aumentando a energia do sistema. Para simplificar, a equação também pode ser escrita como  $\Pi = U_e - W$  onde  $\Pi$  é a energia potencial do sistema, então a condição de Griffith é que  $dA/d\Pi + dA/dU_s \leq 0$ .

# Demonstração da equação de Griffith

---

Vamos analisar o que acontece com a energia quando a trinca aumenta de comprimento.

- Quando uma trinca se propaga, novas superfícies são criadas. A criação dessas superfícies consome energia. Essa é a energia de superfície ( $U_s$ ).
- Ao mesmo tempo, a trinca alivia a tensão na sua vizinhança. Isso faz com que a energia de deformação elástica ( $U_e$ ) do material diminua. O material "relaxa" e libera parte da energia que estava armazenada.

Griffith propôs que a trinca se propagará de forma instável se a energia liberada for suficiente para cobrir a energia consumida. Matematicamente, a condição de equilíbrio é:

Taxa de variação da energia de deformação = Taxa de variação da energia de superfície

$$-\frac{dU_e}{dA} = \frac{dU_s}{dA}$$

Onde  $dA$  é o incremento de área da trinca. O sinal negativo em  $dA/dU_e$  indica que a energia de deformação diminui à medida que a área da trinca aumenta.

# Demonstração da equação de Griffith

---

Energia de Superfície ( $U_s$ ) A energia de superfície é simplesmente a área da nova superfície da trinca multiplicada pela energia de superfície específica do material ( $\gamma_s$ ). Para uma trinca que se propaga em uma placa, criamos duas novas superfícies.

- A área da trinca é  $A=(2a) \times B$ .
- A energia consumida é  $U_s=2 \cdot A \cdot \gamma_s = 2 \cdot (2aB) \cdot \gamma_s$
- A taxa de variação da energia de superfície é:

$$\frac{dU_s}{da} = \frac{d}{da} (4aB\gamma_s) = 4B\gamma_s$$

Considerando a área da trinca ( $A=2aB$ ), a taxa de variação em relação à área é

$$\frac{dU_s}{dA} = \frac{dU_s}{d(2aB)} = 2\gamma_s.$$



# Demonstração da equação de Griffith

---

Para uma placa infinita com uma trinca passante de comprimento (2a) submetida a uma tensão remota ( $\sigma$ ), a energia de deformação liberada por unidade de espessura é:

$$\frac{U_e}{B} = - \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E}$$

A taxa de liberação de energia de deformação por unidade de comprimento da trinca é:

$$\frac{dU_e}{da} = - \frac{d}{da} \left( \frac{\pi \sigma^2 a^2 B}{E} \right) = - \frac{2\pi \sigma^2 a B}{E}$$

A taxa de liberação de energia de deformação por unidade de área de trinca ( $A=2aB$ ) é:

$$G = - \frac{dU_e}{dA} = - \frac{dU_e}{d(2aB)} = - \frac{1}{2B} \frac{dU_e}{da} = \frac{\pi \sigma^2 a}{E}$$

# Demonstração da equação de Griffith

---

Para a condição de equilíbrio, a taxa de energia liberada deve ser igual à taxa de energia consumida. Ou seja,

$$G = \frac{dU_s}{dA} \cdot$$
$$\frac{\pi \sigma^2 a}{E} = 2\gamma_s$$

Resolvendo para a tensão de fratura crítica ( $\sigma_c$ ):

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}$$

A taxa de liberação de energia de deformação, denotada por  $G$ , é o conceito central que se desenvolveu a partir do trabalho de Griffith.  $G$  é a energia disponível para a propagação da trinca por unidade de área de trinca.

$$G = \frac{dE_{\text{liberada}}}{dA} = -\frac{dU_e}{dA}$$

$$G_c = 2\gamma_s$$

$$G \geq G_c$$

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.3.2 Fator de intensidade de tensão, K

Em termos gerais, K caracteriza a magnitude (intensidade) das tensões na vizinhança da ponta de uma trinca idealmente aguda em um material linear-elástico e isotrópico.

Definindo um sistema de coordenadas para descrever as tensões na vizinhança de uma trinca, as coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  estão no plano  $x$ - $y$ , que é normal ao plano da trinca, e a direção  $z$  é paralela à borda principal da trinca. Para qualquer caso de carregamento do Modo I, as tensões próximas à ponta da trinca dependem de  $r$  e  $\theta$  da seguinte forma:

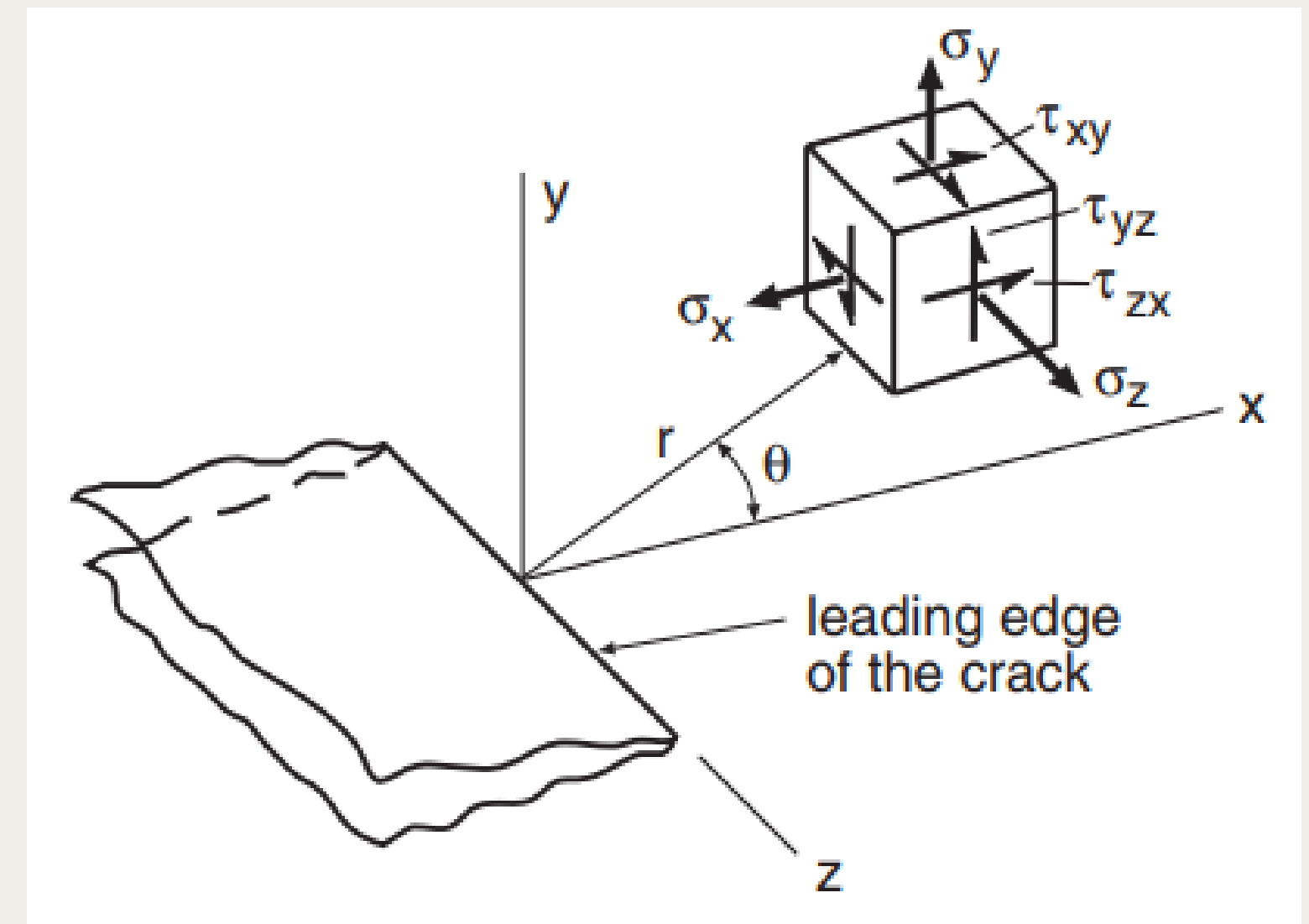
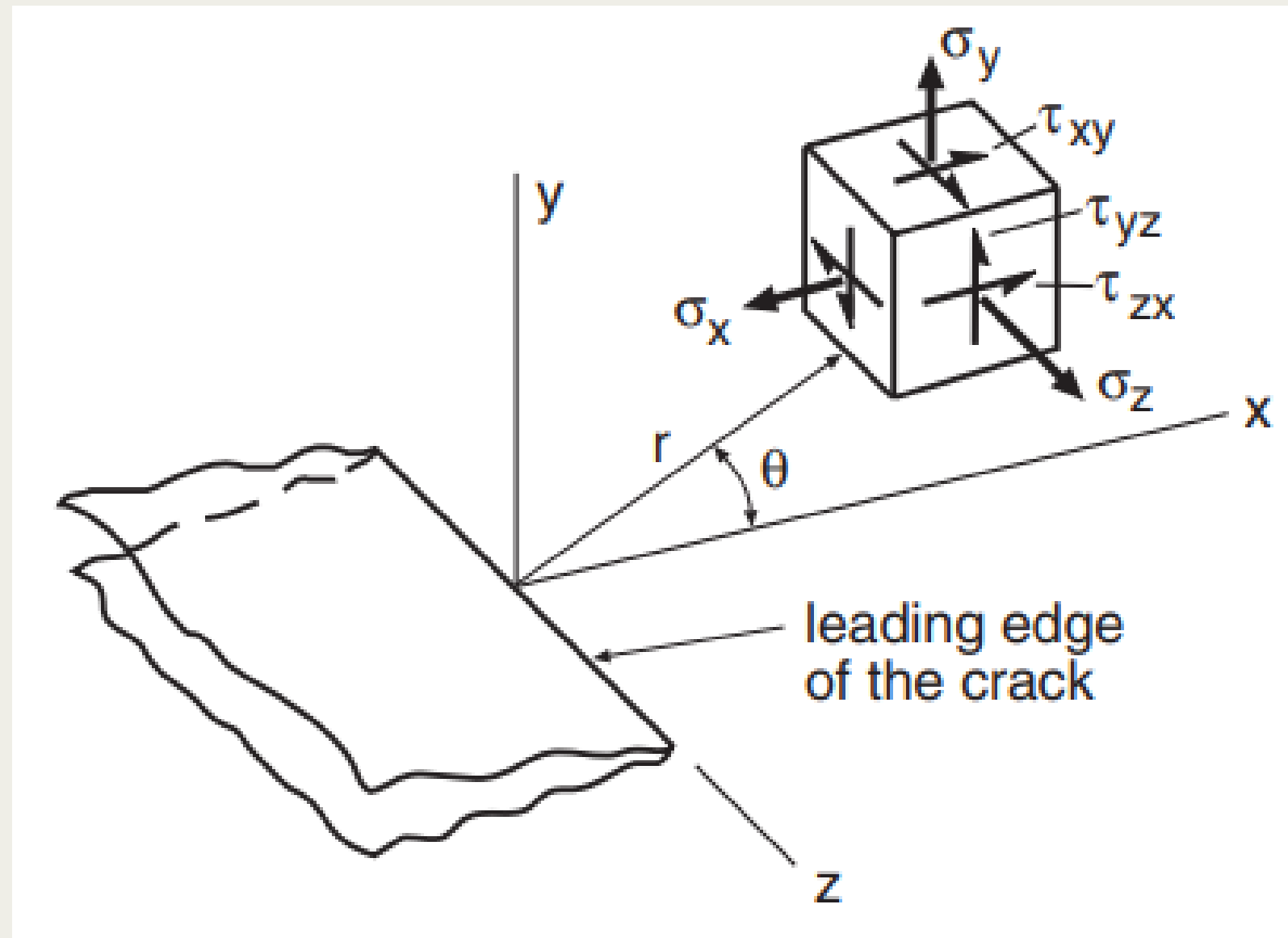


Figura 8.10 Sistema de coordenadas tridimensional para a região da ponta de uma trinca

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.3.2 Fator de intensidade de tensão, K



$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \dots \quad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \dots \quad (b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots \quad (c)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{plane stress}) \quad (d)$$

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{plane strain; } \varepsilon_z = 0) \quad (e)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (f)$$

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

---

## 8.3.2 Fator de intensidade de tensão, K

Essas equações são derivadas com base na teoria da elasticidade linear, conforme descrito em qualquer texto padrão sobre esse assunto, e são ditas para descrever o campo de tensões perto da ponta da trinca. Termos de ordem superior que não têm magnitude significativa perto da ponta da trinca são omitidos. Essas equações preveem que as tensões aumentam rapidamente perto da ponta da trinca.

Se o elemento com a trinca for relativamente fino na direção  $z$ , aplica-se o estado plano de tensão, com  $\sigma_z = 0$ . No entanto, se ele for relativamente espesso, uma suposição mais razoável pode ser o estado plano de deformação,  $\epsilon_z = 0$ , caso em que a lei de Hooke que exige que  $\sigma_z$  dependa das outras tensões e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

Os componentes de tensão não nulos tendem ao infinito à medida que  $r$  se aproxima de zero. Ou seja, ao se aproximar da ponta da trinca. Observe que isso é especificamente causado por essas tensões serem proporcionais ao inverso de  $\sqrt{r}$ .

Assim, diz-se que uma singularidade matemática existe na ponta da trinca, e nenhum valor de tensão na ponta da trinca pode ser dado. Além disso, todas as tensões não nulas são proporcionais à quantidade  $K_I$ , e os fatores restantes apenas dão a variação com  $r$  e  $\theta$ . Consequentemente, a magnitude do campo de tensões perto da ponta da trinca pode ser caracterizada fornecendo-se valor do fator  $K_I$ .



# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.3.2 Fator de intensidade de tensão, K

Com base nisso, KI é uma medida da severidade da trinca. Sua definição em um sentido matemático formal é:

$$K_I = \lim_{r, \theta \rightarrow 0} (\sigma_y \sqrt{2\pi r})$$

Geralmente é conveniente expressar KI como:

$$K_I = FS\sqrt{\pi a}$$

onde o fator F é necessário para considerar diferentes geometrias. Por exemplo, se uma trinca central em uma placa for relativamente longa, A quantidade F é uma função da razão a/b.

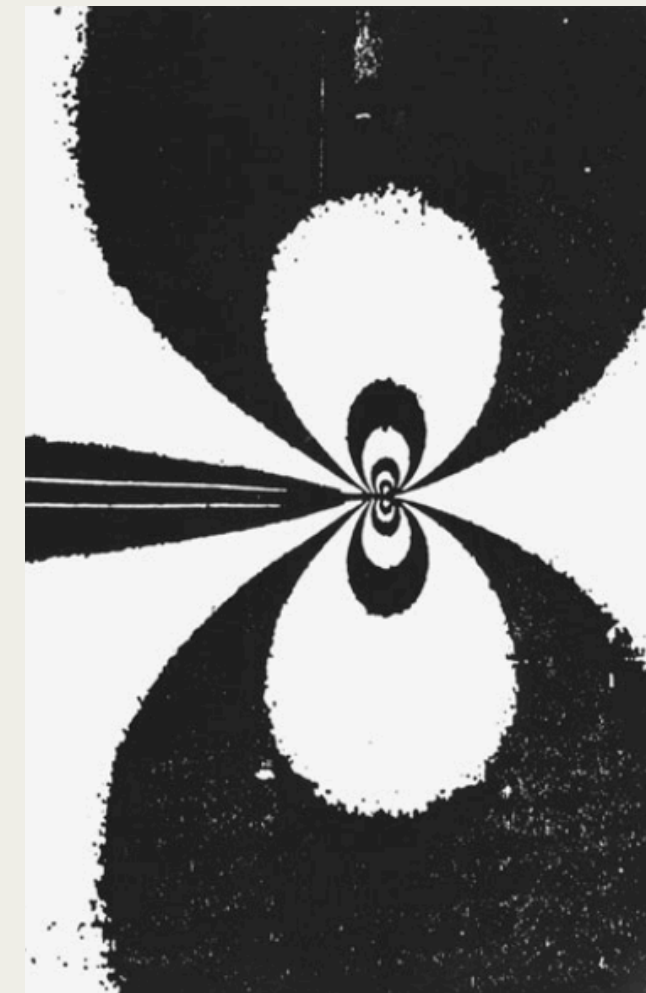


Figura 8.11 Contornos da tensão de cisalhamento máxima no plano ao redor da ponta de uma trinca. Estes foram formados pelo efeito fotoelástico em um material plástico transparente. As duas linhas brancas finas que entram pela esquerda são as bordas da trinca, e sua ponta é o ponto de convergência dos contornos.

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.3.3 Comentários adicionais sobre K e G

Para carregamentos nos Modos II ou III, existem equações de campo de tensão análogas, mas distintas, e as intensidades de tensão KII e KIII podem ser definidas de forma análoga a KI. No entanto, a maioria das aplicações práticas envolve o Modo I. Por conveniência, o subscrito em KI será omitido, e K sem tal subscrito é entendido como denotando KI, ou seja,  $K=K_I$ .

As quantidades G e K podem ser mostradas como relacionadas da seguinte forma:

$$G = \frac{K^2}{E'}$$

onde E' é obtido a partir do módulo de elasticidade E do material e da razão de Poisson  $\nu$ .

$$\begin{aligned} E' &= E && \text{(plane stress; } \sigma_z = 0) \\ E' &= \frac{E}{1 - \nu^2} && \text{(plane strain; } \varepsilon_z = 0) \end{aligned}$$

Uma vez que G e K estão diretamente relacionado, geralmente apenas um desses conceitos é necessário. Usaremos principalmente K, o que é consistente com a maioria das publicações orientadas para a engenharia sobre mecânica da fratura.

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.4 Aplicações de K para projetos e análises

Para que a mecânica da fratura seja utilizada na prática, os valores da intensidade de tensão K devem ser determinados para geometrias de trincas que podem existir em componentes estruturais. Um extenso trabalho de análise foi publicado e também compilado em manuais, fornecendo equações ou curvas plotadas que permitem que os valores de K sejam calculados para uma ampla variedade de casos.

Values for small  $a/b$  and limits for 10% accuracy:

|                            |                                 |                                 |
|----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| (a) $K = S_g \sqrt{\pi a}$ | (b) $K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a}$ | (c) $K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a}$ |
| $(a/b \leq 0.4)$           | $(a/b \leq 0.6)$                | $(a/b \leq 0.13)$               |

Expressions for any  $\alpha = a/b$ :

|                                                                                                                 |                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| (a) $F = \frac{1 - 0.5\alpha + 0.326\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha}}$                                               | $(h/b \geq 1.5)$ |
| (b) $F = \left(1 + 0.122 \cos^4 \frac{\pi\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2}}$ | $(h/b \geq 2)$   |
| (c) $F = 0.265 (1 - \alpha)^4 + \frac{0.857 + 0.265\alpha}{(1 - \alpha)^{3/2}}$                                 | $(h/b \geq 1)$   |

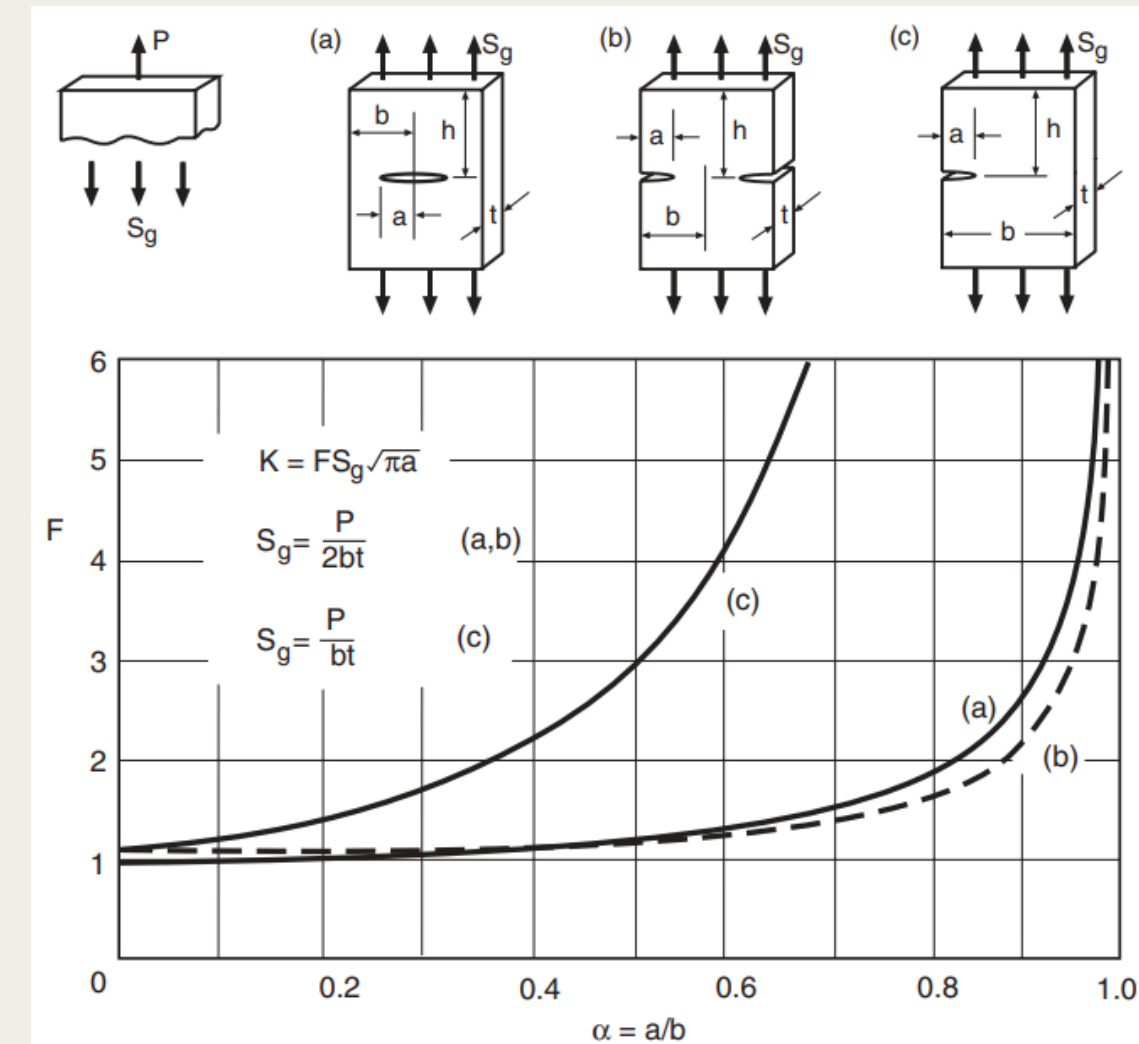


Figura 8.12 Fatores de intensidade de tensão para três casos de placas fissuradas sob tração. As geometrias, curvas e equações identificadas como (a) correspondem todas ao mesmo caso, e o mesmo ocorre para (b) e (c).

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.4 .1 Formas matemáticas usadas para expressar K

Já foi observado que K pode ser relacionado à tensão aplicada e ao comprimento da fissura por uma equação da forma:

$$K = FS_g\sqrt{\pi a}, \quad F = F(\text{geometry}, a/b)$$

A quantidade F é uma função adimensional que depende da geometria e da configuração de carregamento, e geralmente também da razão entre o comprimento da trinca e outra dimensão geométrica, como a largura do elemento ou a meia-largura, b.

Às vezes, é conveniente trabalhar diretamente com as cargas aplicadas (forças), sendo a seguinte equação útil para geometrias planares:

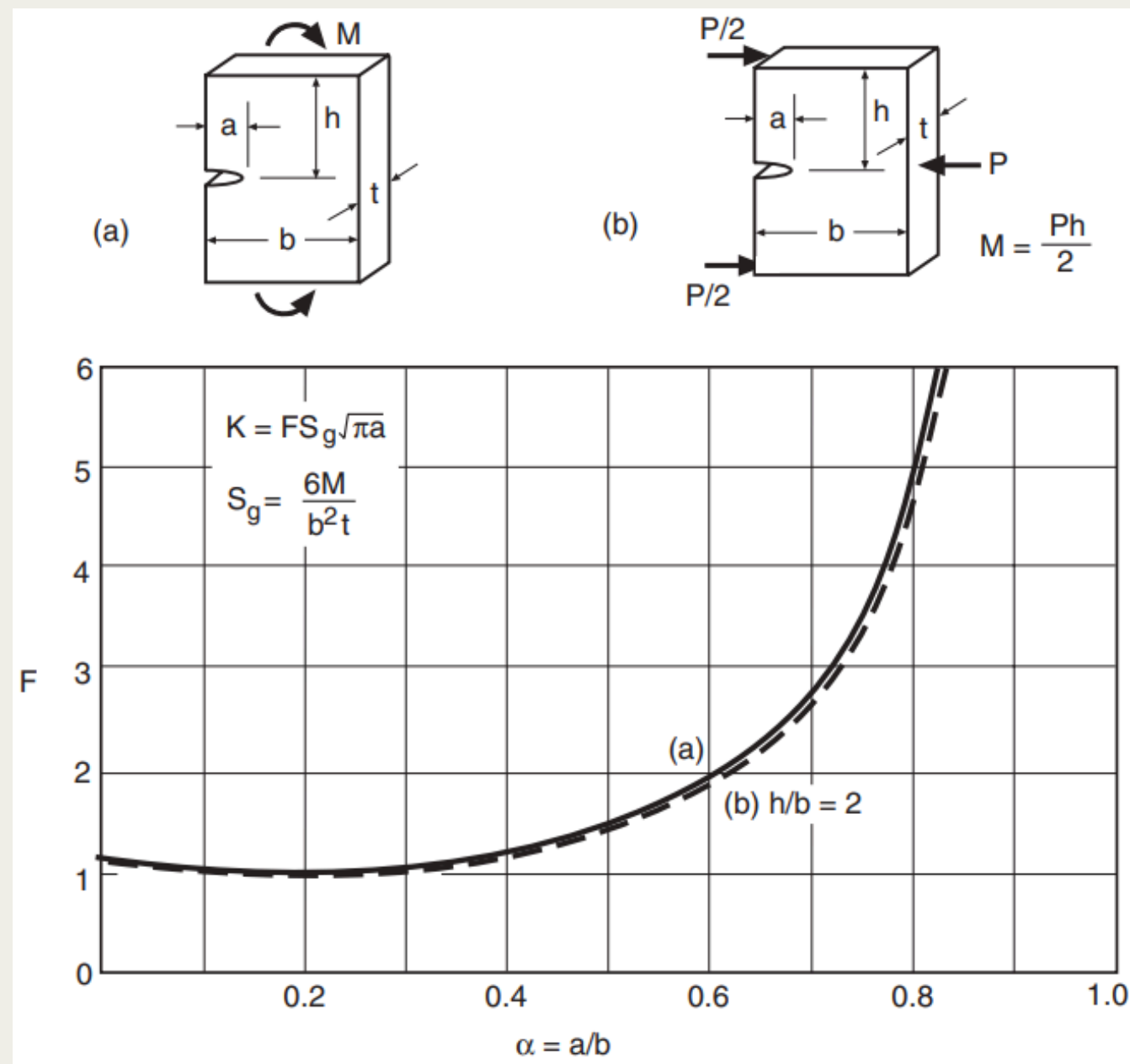
$$K = F_P \frac{P}{t\sqrt{b}}, \quad F_P = F_P(\text{geometry}, a/b)$$

Aqui, P é a força, t é a espessura, e b é o mesmo de antes. A função  $F_P$  é um novo fator de geometria adimensional. Assim,  $F_P$  pode ser relacionado ao F:

$$F_P = F \frac{S_g t \sqrt{\pi ab}}{P}$$

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.4 .1 Formas matemáticas usadas para expressar K



Values for small  $a/b$  and limits for 10% accuracy:

$$(a, b) \quad K = 1.12S_g\sqrt{\pi a} \quad (a/b \leq 0.4)$$

Expressions for any  $\alpha = a/b$ :

$$(a) \quad F = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2}} \left[ \frac{0.923 + 0.199 \left(1 - \sin \frac{\pi\alpha}{2}\right)^4}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \right] \quad (\text{large } h/b)$$

(b)  $F$  is within 3% of (a) for  $h/b = 4$ , and within 6% for  $h/b = 2$ , at any  $a/b$ :

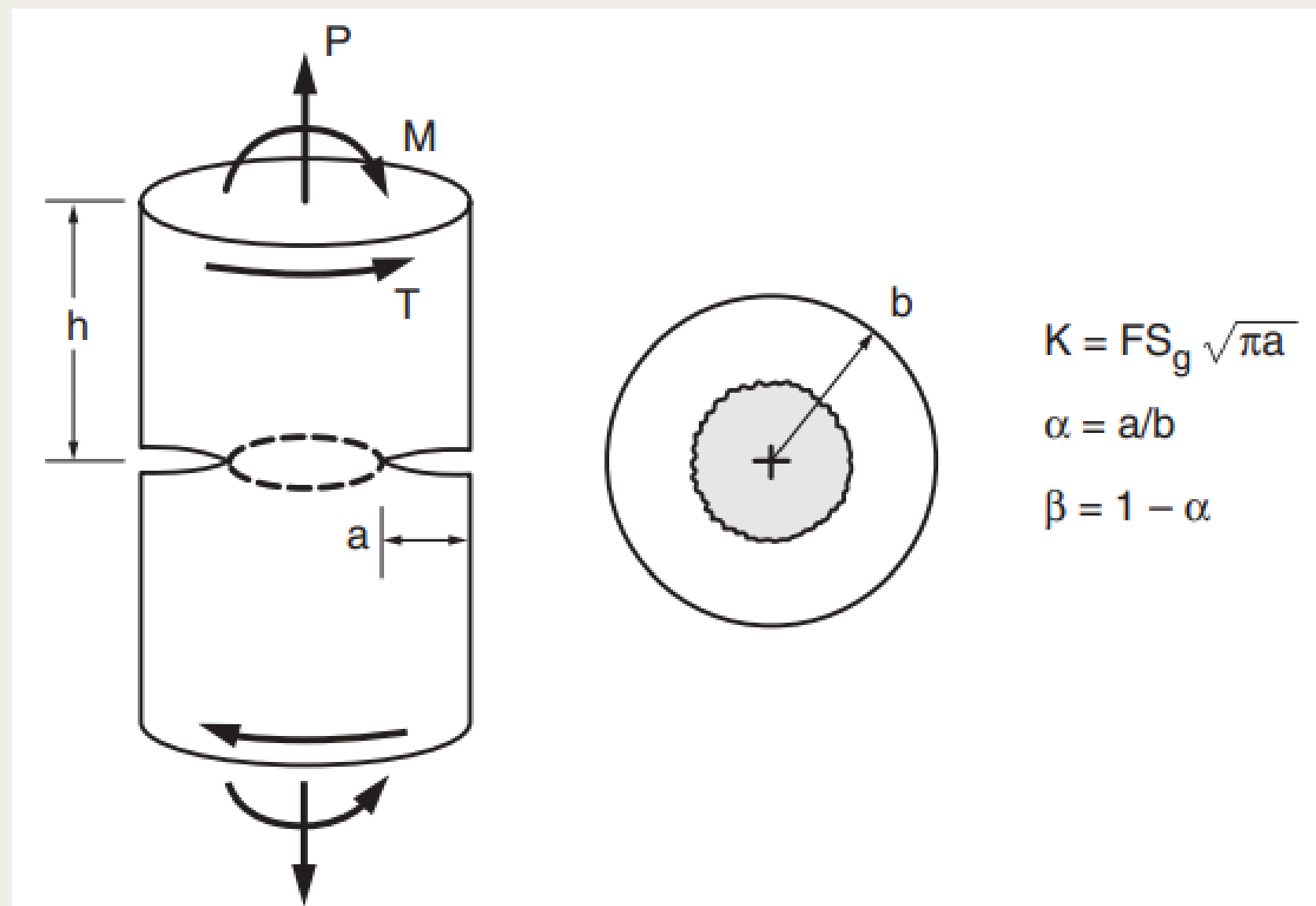
$$F = \frac{1.99 - \alpha(1 - \alpha)(2.15 - 3.93\alpha + 2.7\alpha^2)}{\sqrt{\pi}(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{3/2}} \quad (h/b = 2)$$

Figura 8.13 Fatores de intensidade de tensão para dois casos de flexão. As geometrias, curvas e equações identificadas como (a) correspondem todas ao mesmo caso, e o mesmo ocorre para (b). O caso (b) com  $h/b = 2$  é o corpo de prova de flexão padrão.



# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.4 .1 Formas matemáticas usadas para expressar K



(a) Axial load  $P$ :  $S_g = \frac{P}{\pi b^2}$ ,  $F = 1.12$  (10%,  $a/b \leq 0.21$ )

$$F = \frac{1}{2\beta^{1.5}} \left[ 1 + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8}\beta^2 - 0.363\beta^3 + 0.731\beta^4 \right]$$

(b) Bending moment  $M$ :  $S_g = \frac{4M}{\pi b^3}$ ,  $F = 1.12$  (10%,  $a/b \leq 0.12$ )

$$F = \frac{3}{8\beta^{2.5}} \left[ 1 + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8}\beta^2 + \frac{5}{16}\beta^3 + \frac{35}{128}\beta^4 + 0.537\beta^5 \right]$$

(c) Torsion  $T$ ,  $K = K_{III}$ :  $S_g = \frac{2T}{\pi b^3}$ ,  $F = 1.00$  (10%,  $a/b \leq 0.09$ )

$$F = \frac{3}{8\beta^{2.5}} \left[ 1 + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8}\beta^2 + \frac{5}{16}\beta^3 + \frac{35}{128}\beta^4 + 0.208\beta^5 \right]$$

Figura 8.14 Intensidades de tensão para um eixo redondo com uma fissura circunferencial, incluindo limites para a constante  $F$  para precisão de 10% e expressões para qualquer  $\alpha = a/b$ . Para a torção (c), a intensidade de tensão é para o Modo de cisalhamento III.

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.4 .2 Discussões

Soluções de forma fechada matematicamente para K existem principalmente para  $a/b=0$ , ou seja, para elementos que são grandes (idealmente infinitos) em comparação com a trinca. No entanto, essas soluções são frequentemente razoavelmente precisas para valores surpreendentemente grandes de  $a/b$ .

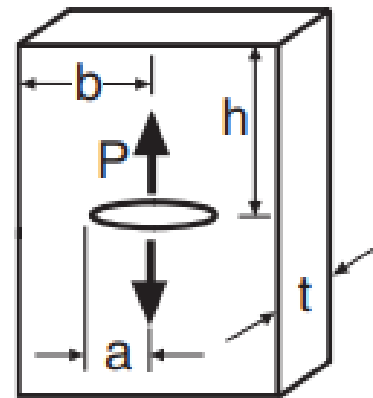

$$K = F_P \frac{P}{t\sqrt{b}}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad F_P = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \quad (10\%, \frac{a}{b} \leq 0.3)$$
$$F_P = \frac{1.297 - 0.297 \cos \frac{\pi\alpha}{2}}{\sqrt{\sin \pi\alpha}} \quad (0 \leq \frac{a}{b} \leq 1)$$

Figura 8.15 Fator de intensidade de tensão para forças aplicadas às faces de uma fissura central em uma placa com  $h/b \geq 2$ . Uma expressão simples é dada para  $F_P$  que está dentro de 10% para um intervalo limitado de  $\alpha = a/b$ , assim como uma expressão válida para qualquer  $\alpha$ .

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.4 .2 Discussões

Soluções de forma fechada matematicamente para K existem principalmente para  $a/b=0$ , ou seja, para elementos que são grandes (idealmente infinitos) em comparação com a trinca. No entanto, essas soluções são frequentemente razoavelmente precisas para valores surpreendentemente grandes de  $a/b$ .

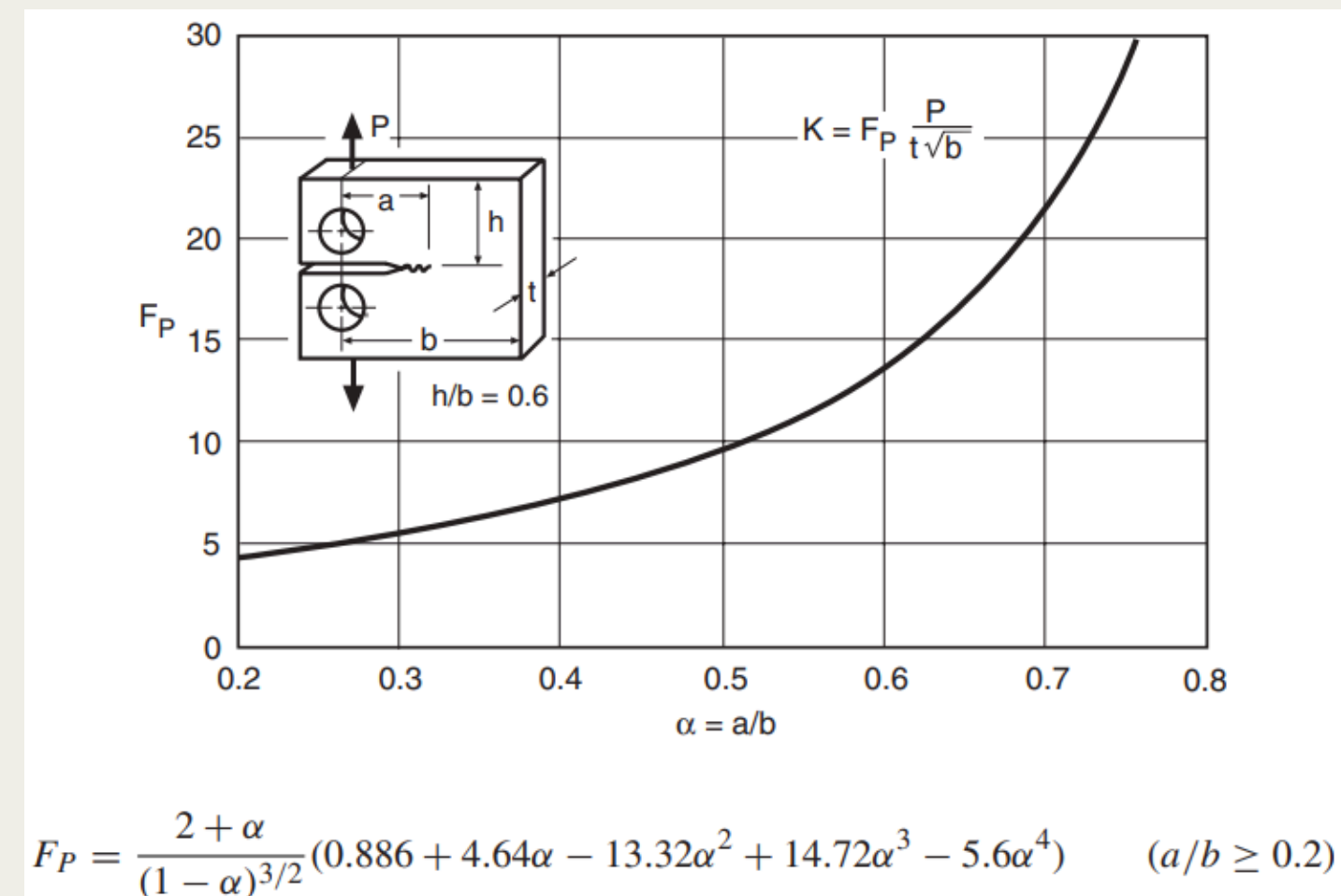


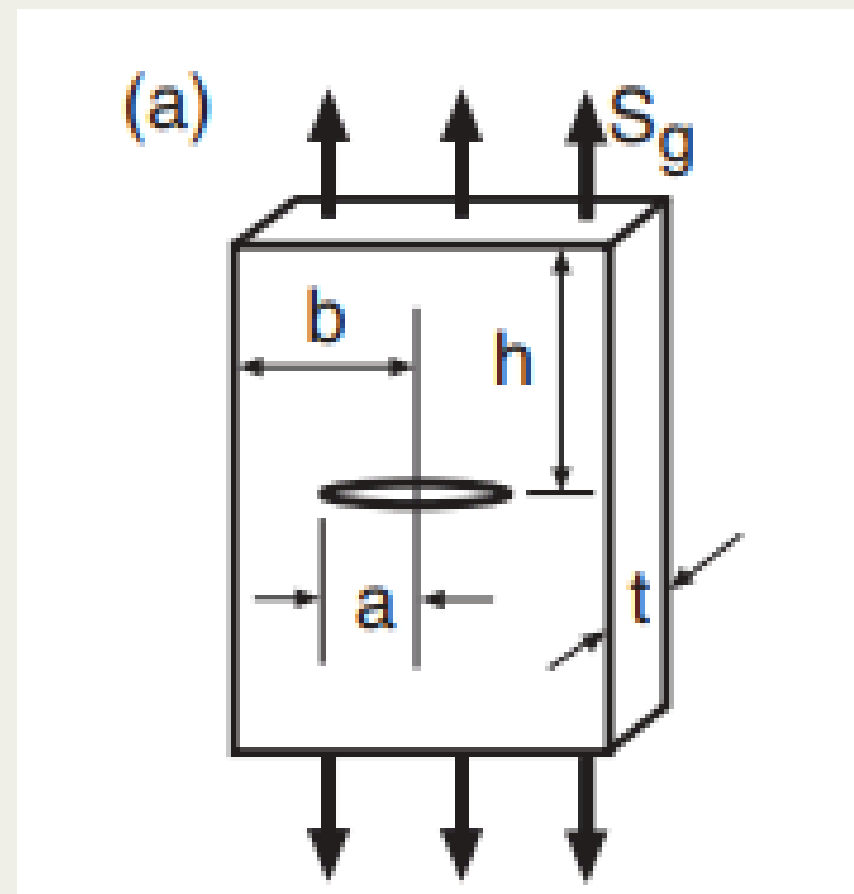
Figura 8.16 Fator de intensidade de tensão para o espécime compacto padrão ASTM, conforme determinado por  $F_P = F_P(\alpha)$ , onde  $\alpha = a/b$ .

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## Exemplo 8.1

Uma placa com trinca central, em dimensões  $b = 50 \text{ mm}$ ,  $t = 5 \text{ mm}$  e  $h$  grande. Uma força de  $P = 50 \text{ kN}$  é aplicada.

- a) Qual é o fator de intensidade de tensão  $K$  para um comprimento de trinca de  $a = 10 \text{ mm}$ ?
- b) E para  $a = 30 \text{ mm}$ ?
- c) Qual é o comprimento crítico de trinca  $a_c$  para fratura se o material for alumínio 2014-T651 ( $K_{Ic} = 24 \text{ MPa(m)}^{1/2}$ )?



Values for small  $a/b$  and limits for 10% accuracy:

$$(a) \quad K = S_g \sqrt{\pi a} \\ (a/b \leq 0.4)$$

$$(b) \quad K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a} \\ (a/b \leq 0.6)$$

$$(c) \quad K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a} \\ (a/b \leq 0.13)$$

$$K = F S_g \sqrt{\pi a}$$

$$S_g = \frac{P}{2bt} \quad (a, b)$$

$$S_g = \frac{P}{bt} \quad (c)$$

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## Exemplo 8.1

a) Para calcular K para  $a = 10 \text{ mm}$ , precisamos calcular primeiro a tensão remota aplica ( $S_g$ )

$$S_g = \frac{P}{2bt} = \frac{50,000 \text{ N}}{2(50 \text{ mm})(5 \text{ mm})} = 100 \text{ MPa,}$$

Em seguida, vamos calcular a razão entre os semi-eixos da trinca:

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{10 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 0.200$$

Como a razão é  $\leq 0,04$ , podemos considerar o fato de correção geométrica (F) unitário:  $F = 1$ . Assim, podemos finalmente calcular o fator de intensidade de tensão (k):

$$K = S_g \sqrt{\pi a} = (100 \text{ MPa}) \sqrt{\pi (0.010 \text{ m})} = 17.7 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$



# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## Exemplo 8.1

b) Para calcular K para  $a = 30$  mm, precisamos calcular primeiro a tensão remota aplica ( $S_g$ )

$$S_g = \frac{P}{2bt} = \frac{50,000 \text{ N}}{2(50 \text{ mm})(5 \text{ mm})} = 100 \text{ MPa},$$

Em seguida, vamos calcular a razão entre os semi-eixos da trinca:

$$\alpha = a/b = (30 \text{ mm})/(50 \text{ mm}) = 0.600.$$

Como a razão é  $> 0,04$ , temos que calcular o fator de correção geométrica (F) por sua expressão geral, supondo  $h/b \geq 1,5$  e em seguida, atribui esse valor F no cálculo de K:

$$F = \frac{1 - 0.5\alpha + 0.326\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha}} = 1.292$$

$$K = F S_g \sqrt{\pi a} = 1.292 (100 \text{ MPa}) \sqrt{\pi (0.030 \text{ m})} = 39.7 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## Exemplo 8.1

c) Agora para o comprimento da trinca crítica ( $a_c$ ), podemos supor a razão dos semi-eixos como  $\leq 0,04$  e, consequentemente,  $F = 1$ . Assim calcular o comprimento crítico da trinca:

$$K_{Ic} \approx S_g \sqrt{\pi a_c}$$

$$a_c \approx \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{S_g} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{24 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}}{100 \text{ MPa}} \right)^2 = 0.0183 \text{ m} = 18.3 \text{ mm}$$

Como agora temos o comprimento da trinca crítica, se resolvermos a razão  $a_c/b$ , teremos um valor inferior a  $\leq 0,04$ , satisfazendo o resultado esperado. Todavia, se queremos uma solução mais geral, devemos partir para um solução iterativa. Sabendo que:

$$F = \frac{1 - 0.5\alpha + 0.326\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha}}$$

$$\alpha = \frac{a}{b}$$

Podemos escrever a equação para  $K$ ,

$$K = F S_g \sqrt{\pi a}$$

$$K = \frac{1 - 0.5(a/b) + 0.326(a/b)^2}{\sqrt{1 - (a/b)}} S_g \sqrt{\pi a}$$

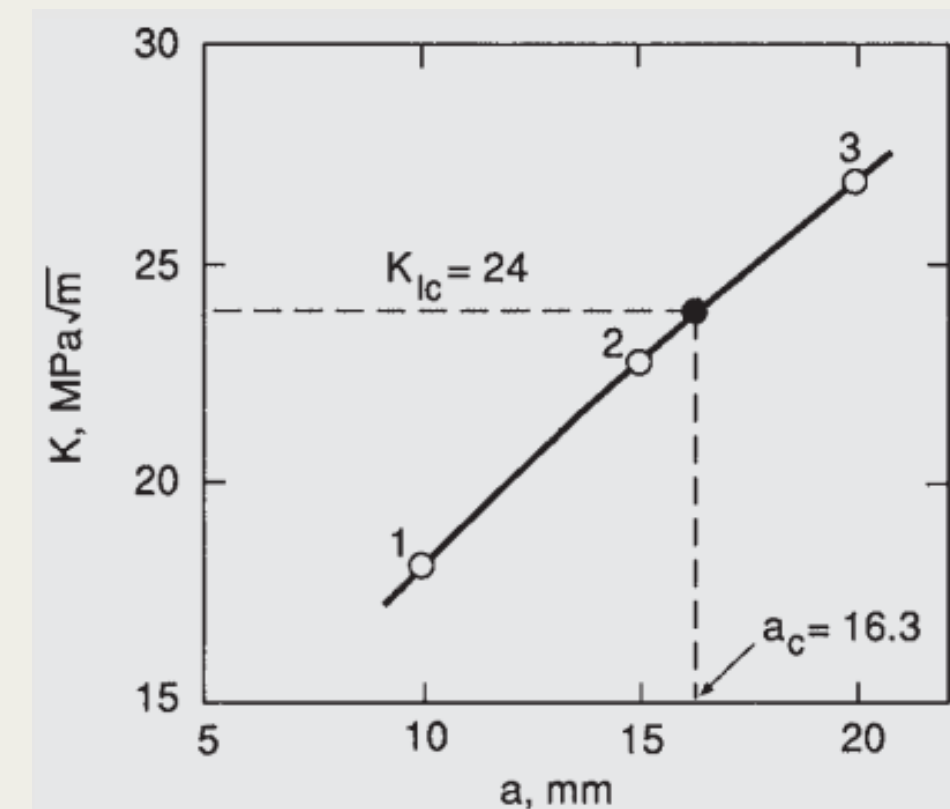
# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## Exemplo 8.1

Assim, podemos resolver a equação por tentativa e erro, ou através de algum método numérico como o método de newton. Seja como for, encontra-se o seguinte valor para ( $a_c$ ):

$$a_c = 0.01627 \text{ m} = 16.3 \text{ mm}$$

| Calc. No. | $a$<br>mm | $\alpha = a/b$ | $F$   | $K = F S_g \sqrt{\pi a}$<br>MPa $\sqrt{\text{m}}$ |
|-----------|-----------|----------------|-------|---------------------------------------------------|
| 1         | 10        | 0.20           | 1.021 | 18.1                                              |
| 2         | 15        | 0.30           | 1.051 | 22.8                                              |
| 3         | 20        | 0.40           | 1.100 | 27.6                                              |



# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.4.3 Fatores de segurança

Uma vez que a tensão  $S_g$  e  $K$  são proporcionais, um fator de segurança  $X$  contra a fratura para a tensão pode ser alcançado aplicando o mesmo fator a  $K$ . Portanto, se  $(S_g)$  e  $(a)$  são a tensão e o comprimento da trinca que se espera ocorrer no serviço real, o fator de segurança em  $K$ , e assim em  $S_g$ , é:

$$X_K = \frac{K_{Ic}}{K} = \frac{K_{Ic}}{F S_g \sqrt{\pi a}}$$

Também pode ser útil comparar o comprimento da trinca de serviço  $(a)$ , com o comprimento da trinca  $(a_c)$  que se espera causar a falha na tensão de serviço  $S_g$ . O valor de  $a_c$  está disponível a partir de:

$$K_{Ic} = F_c S_g \sqrt{\pi a_c}$$

onde  $(F_c)$  é avaliado em  $(a_c)$ . Combinando as duas equações anteriores, chega-se ao seguinte fator de segurança no comprimento da trinca:

$$X_a = \frac{a_c}{a} = \left( \frac{F}{F_c} X_K \right)^2$$

Como  $(X_K)$  é elevado ao quadrado, os fatores de segurança no comprimento da trinca devem ser bastante grandes para alcançar fatores de segurança razoáveis em  $K$  e na tensão.

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## 8.4.3 Fatores de segurança

Se o comprimento da trinca esperado no serviço real for relativamente pequeno, os fatores de segurança contra o escoamento podem ser calculados simplesmente comparando a tensão de serviço ( $S_g$ ) com a resistência ao escoamento do material, ( $\sigma_0$ ):

$$X_o = \sigma_o / S_g$$

Como  $S_g$  é a tensão na área bruta, o cálculo anterior fornece o fator de segurança contra o escoamento como se nenhuma trinca estivesse presente. Um método mais avançado para calcular o fator de segurança contra o escoamento é comparar a carga aplicada com a carga limite totalmente plástica.

Esta última é uma estimativa da carga necessária para causar o escoamento em toda a seção transversal que resta após subtrair a área da trinca, de modo que o efeito da trinca na redução da área da seção transversal é incluído.

Portanto, este tipo de fator de segurança contra o escoamento é dado conforme aplicável para um determinado caso, onde  $P$  e  $M$  são os valores de força e momento para o serviço real.:

$$X'_o = P_o / P, \quad X'_o = M_o / M$$

Os valores escolhidos para os fatores de segurança devem refletir as consequências da falha e se os valores das variáveis que afetam o cálculo são bem conhecidos ou não, além de um sólido julgamento de engenharia.

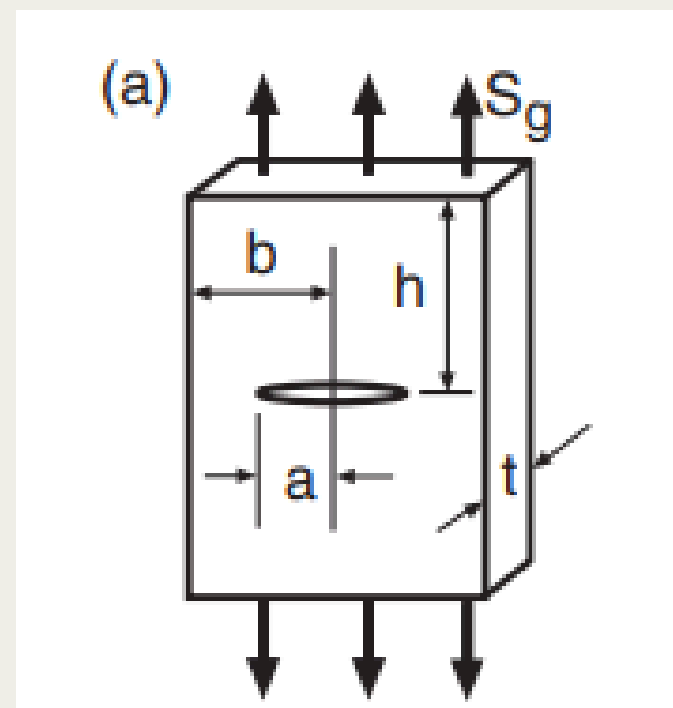


# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## Exemplo 8.2

Considere a situação do Exemplo 8.1, onde uma placa com trinca central de alumínio 2014-T651, com dimensões  $b=50$  e  $t=5$  mm, é submetida em serviço a uma força de  $P=50$  kN.

- a) Qual é o maior comprimento de trinca  $a$  que pode ser permitido para um fator de segurança contra a fratura de 3.0 em tensão?
- b) Qual é o fator de segurança no comprimento da trinca resultante do fator de segurança em tensão de (a)?
- c) Qual é o fator de segurança contra o escoamento?



Values for small  $a/b$  and limits for 10% accuracy:

$$(a) \quad K = S_g \sqrt{\pi a} \\ (a/b \leq 0.4)$$

$$(b) \quad K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a} \\ (a/b \leq 0.6)$$

$$(c) \quad K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a} \\ (a/b \leq 0.13)$$

$$K = F S_g \sqrt{\pi a} \quad \text{---}$$
$$S_g = \frac{P}{2bt} \quad (a, b)$$
$$S_g = \frac{P}{bt} \quad (c)$$

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## Exemplo 8.2

a) Dado um fator de segurança  $X_k = 3$ , temos que calcular o novo fator de intensidade  $K$ , respeitando o fator de segurança:

$$K = \frac{K_{Ic}}{X_K} = \frac{24 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}}{3.0} = 8.0 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

Portanto, este  $K$  é empregado para obter o maior comprimento de trinca que pode ser permitido:

$$K = F S_g \sqrt{\pi a}, \quad 8.0 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} = F (100 \text{ MPa}) \sqrt{\pi a}$$

Assumindo que  $F=1$ , a resolução para  $a$  resulta em:

$$a = 2.04 \text{ mm}$$

Uma vez que  $\alpha = a/b = (2.04 \text{ mm})/(50 \text{ mm}) = 0.0408$ , estamos bem dentro do limite de 10% de precisão para  $K$ , e este resultado é razoavelmente preciso.

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## Exemplo 8.2

b) Como o valor estimado para a trinca crítica é de  $a_c = 16,3$  mm, comparamos esse valor com o valor de (a) para calcular o fator de segurança no comprimento da trinca:

$$X_a = a_c/a = (16.3 \text{ mm})/(2.03 \text{ mm}) = 8.03$$

c) Sabendo que o limite de escoamento da liga é de 415 MPa, o fator de segurança contra o escoamento, calculado como se não houvesse trinca, é dado por:

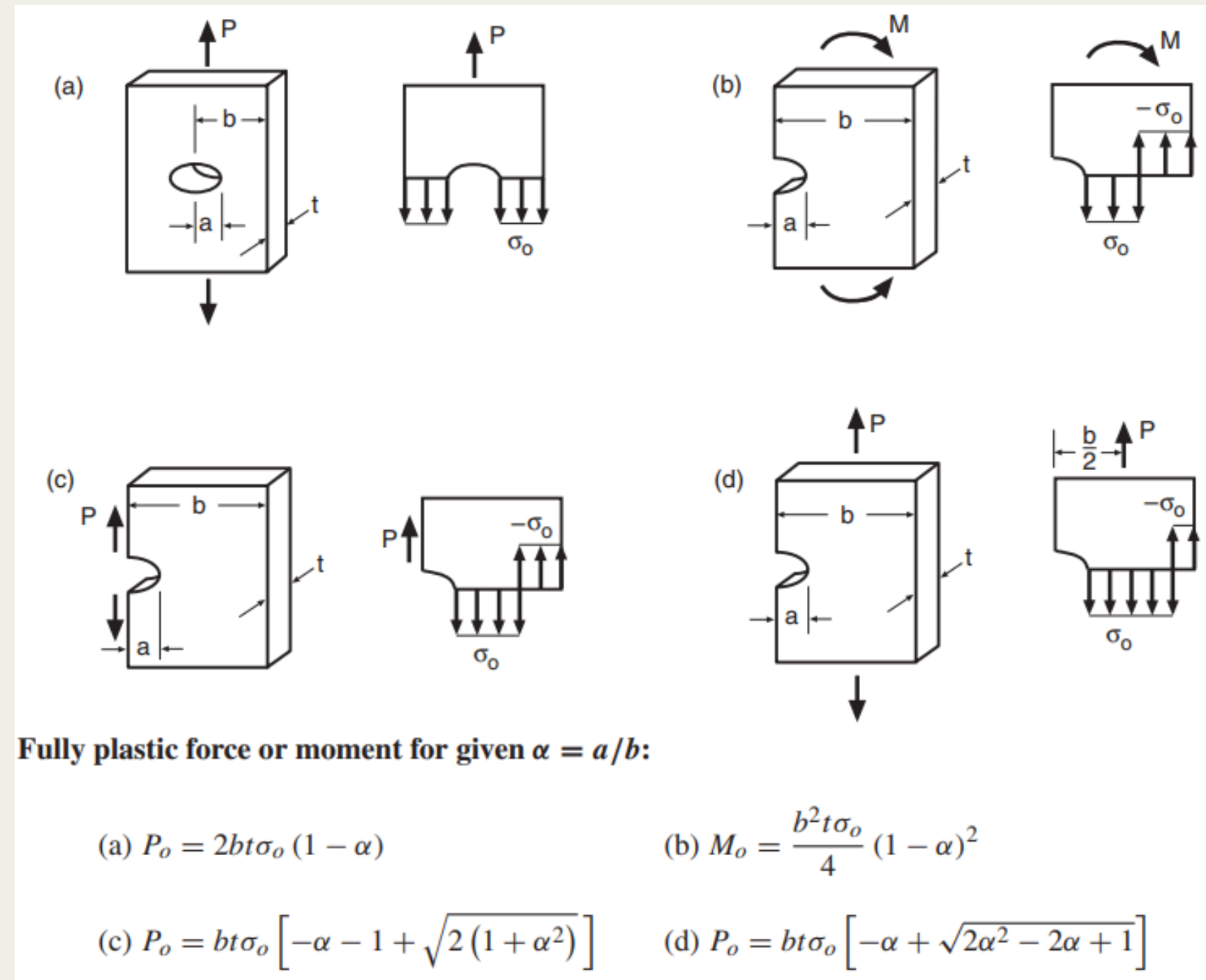
$$X_o = \sigma_o/S_g = (415 \text{ MPa})/(100 \text{ MPa}) = 4.15$$

Um cálculo mais detalhado que usa a força limite totalmente plástica seria:

$$X'_o = \frac{P_o}{P} = \frac{2bt\sigma_o(1 - a/b)}{P} = \frac{2(50 \text{ mm})(5 \text{ mm})(415 \text{ MPa})}{50,000 \text{ N}} \left(1 - \frac{2.03 \text{ mm}}{50 \text{ mm}}\right) = 3.98$$

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

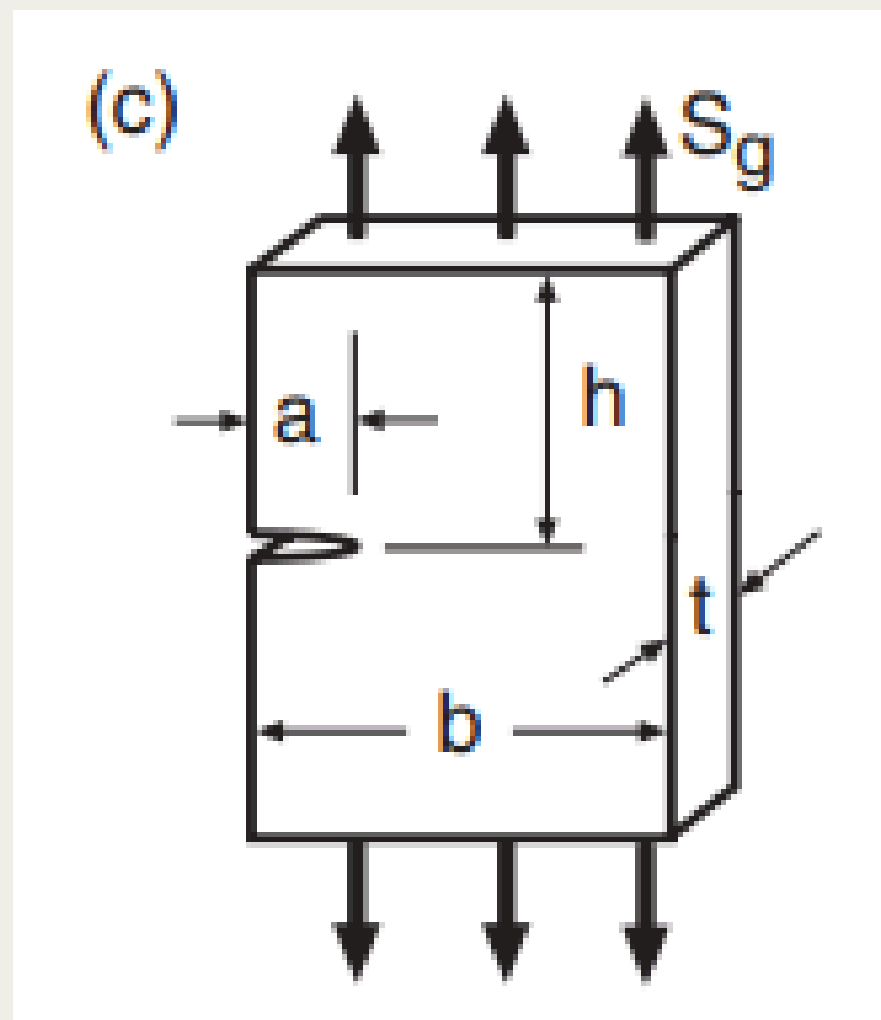
## Exemplo 8.2



# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## Exemplo 8.3

Um elemento de engenharia feito de titânio 6Al-4V (recozido) é uma placa carregada em tração que pode ter uma trinca em uma das bordas. A força aplicada é  $P=55$  kN, a largura é  $b=40$  mm, e a trinca pode ter até  $a=6$  mm de comprimento. Se for exigido um fator de segurança de 3.0 em tensão, qual espessura mínima da placa  $t$  é necessária?



$$S_g = \frac{P}{bt} \quad (c)$$

**Values for small  $a/b$  and limits for 10% accuracy:**

$$(a) \quad K = S_g \sqrt{\pi a}$$

$$(a/b \leq 0.4)$$

$$(b) \quad K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a}$$

$$(a/b \leq 0.6)$$

$$(c) \quad K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a}$$

$$(a/b \leq 0.13)$$



# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## Exemplo 8.3

Calculando a razão entre os semi-eixos, temos:

$$a/b = (6 \text{ mm}) / (40 \text{ mm}) = 0.15$$

Como a razão é maior que 0,13, devemos partir para o calculo geral do fator geométrico para  $h/b \geq 1,5$ :

$$F = 0.265(1 - \alpha)^4 + \frac{0.857 + 0.265\alpha}{(1 - \alpha)^{3/2}} = 1.283$$

Assim, considerando a tensão remota e o fator de segurança  $X_k$  como:

$$S_g = \frac{P}{bt} \quad (c)$$

$$K = \frac{K_{Ic}}{X_K}$$

Podemos substituir na fórmula do fato de intensidade de tensão (k):

$$K = F S_g \sqrt{\pi a},$$

$$K = \frac{K_{Ic}}{X_K} = F \frac{P}{bt} \sqrt{\pi a}, \quad \frac{66 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}}{3.0} = F \frac{55,000 \text{ N}}{(40 \text{ mm})(t, \text{ mm})} \sqrt{\pi (0.006 \text{ m})}$$

# Capítulo 8 - Fratura em elementos trincados

## Exemplo 8.3

Substituindo o valor de F e resolvendo a equação, temos:

$$t = 11.01 \text{ mm}$$

No entanto, precisamos verificar se o fator de segurança também é atendido para o escoamento. A força limite totalmente plástica é

$$P_o = bt\sigma_o \left[ -\alpha + \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 1} \right]$$

$$P_o = (40 \text{ mm})(11.01 \text{ mm})(925 \text{ MPa}) \left[ -0.15 + \sqrt{2(0.15)^2 - 2(0.15) + 1} \right] = 290,400 \text{ N}$$

Portanto, o fator de segurança contra o escoamento é:

$$X'_o = \frac{P_o}{P} = \frac{290.4 \text{ kN}}{55 \text{ kN}} = 5.28$$

Como esse valor excede o valor exigido,  $t=11.01 \text{ mm}$  é a resposta final.

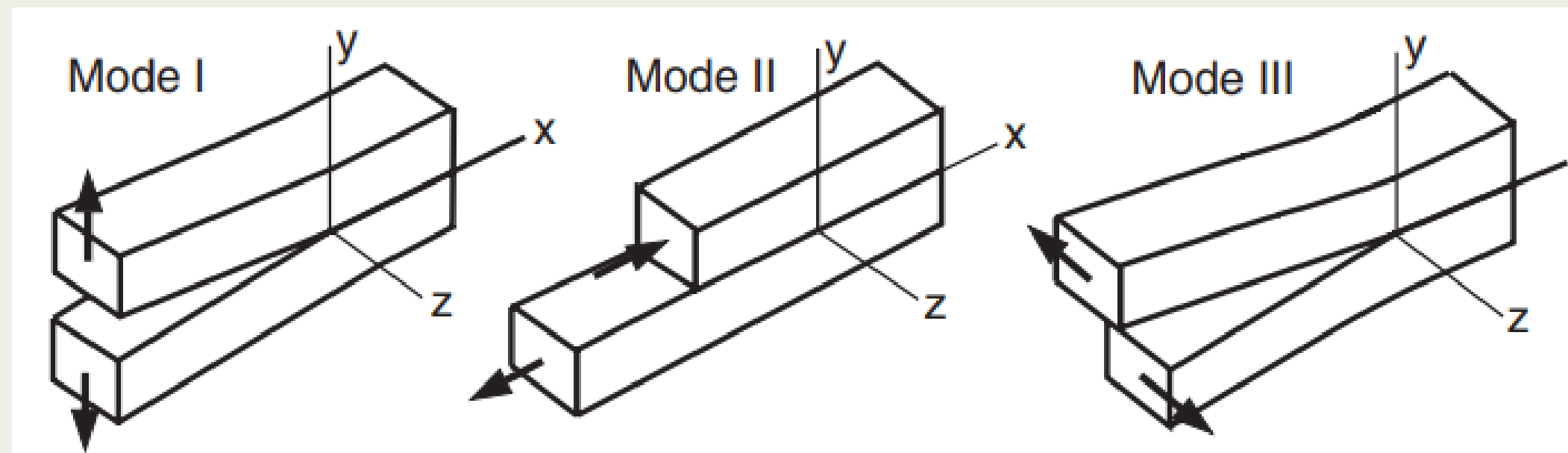
# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

**8.5** Defina os seguintes conceitos com suas palavras:

- a) Modos I, II e III de carregamento em trincas.
- b) Singularidade no ponto da trinca.
- c) Fator de intensidade de tensão (K)
- d) Taxa de liberação de energia de deformação

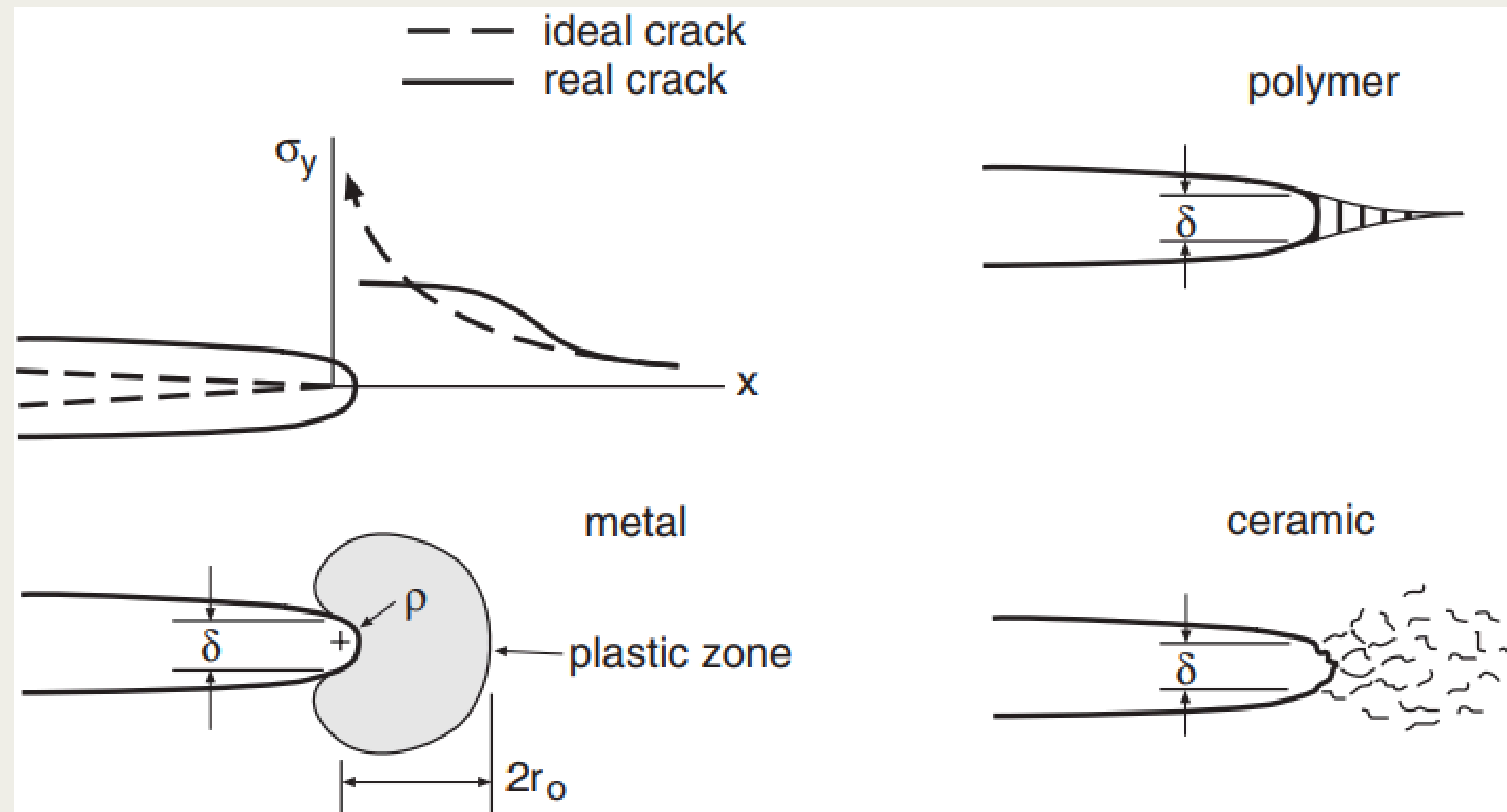
## Solução

a) O Modo I é chamado de modo de abertura e consiste nas faces da trinca simplesmente se afastando, ou seja, se separam perpendicularmente ao plano da trinca. O Modo II é chamado de deslizamento, as faces da trinca deslizam uma em relação à outra em uma direção normal à borda principal da trinca. O Modo III é chamado de rasgamento, também envolve deslizamento relativo das faces da trinca, mas agora a direção é paralela à borda principal.



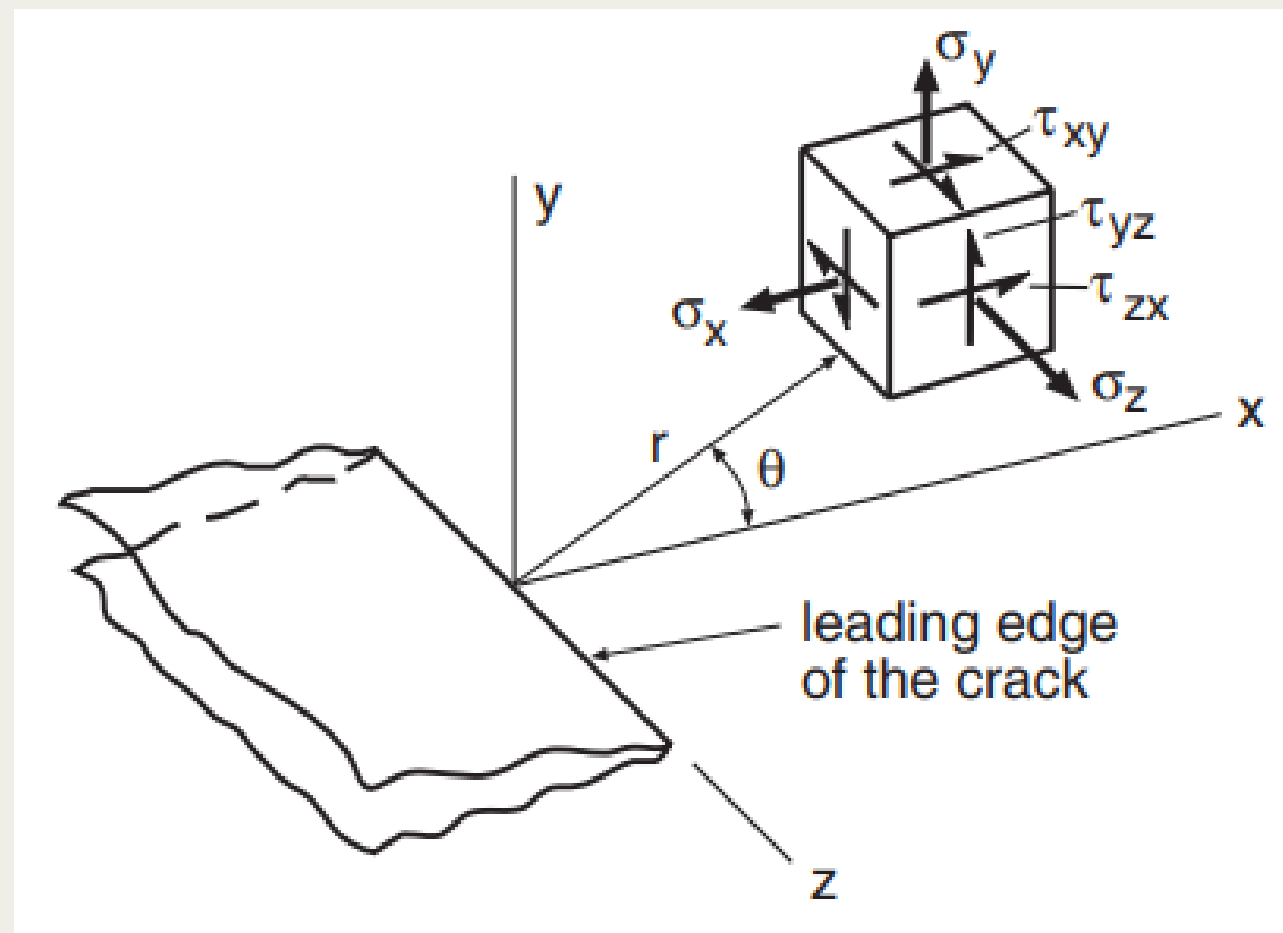
# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

b) A singularidade da ponta da trinca é uma previsão matemática de que a tensão na ponta de uma trinca idealmente afiada se torna infinita. Na realidade, essa singularidade não ocorre porque a ponta da trinca se deforma plasticamente e se arredonda, limitando a tensão a um valor finito.



# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

c) O fator de intensidade de tensão (K) é uma medida que quantifica a intensidade das tensões na vizinhança da ponta de uma trinca. Ele depende do tamanho da trinca, da tensão aplicada e da geometria do corpo, servindo para caracterizar a severidade da trinca.



$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \dots \quad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \dots \quad (b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots \quad (c)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{plane stress}) \quad (d)$$

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{plane strain; } \varepsilon_z = 0) \quad (e)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (f)$$

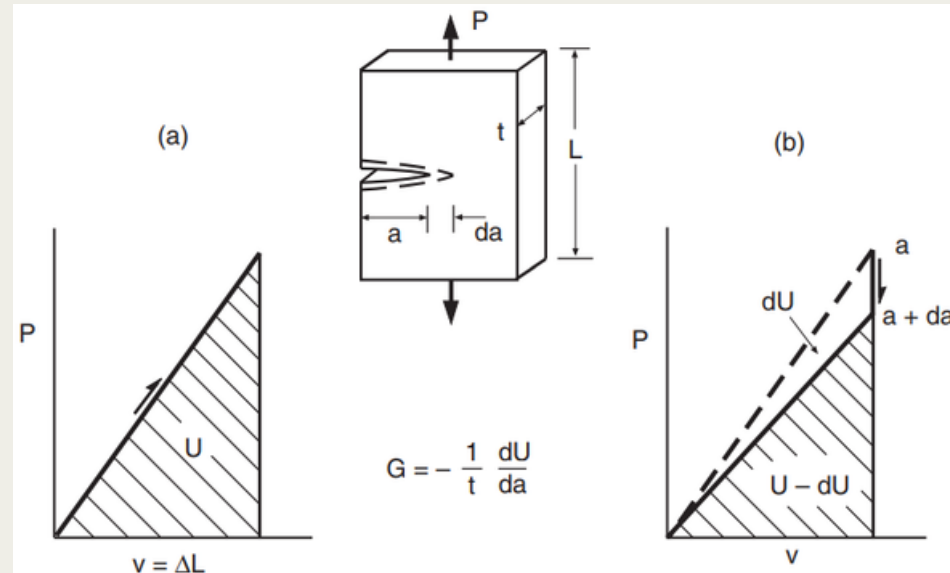
$$K_I = \lim_{r, \theta \rightarrow 0} (\sigma_y \sqrt{2\pi r})$$

$$K_I = F S \sqrt{\pi a}$$



# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

d) A taxa de liberação de energia de deformação (G) é a taxa na qual a energia potencial elástica de um corpo diminui à medida que uma trinca cresce. Essa energia liberada é o que impulsiona o crescimento da trinca.



$$E_T = U_e + U_s - W$$

$$-\frac{dU_e}{dA} = \frac{dU_s}{dA}$$

$$\frac{dU_s}{dA} = \frac{dU_s}{d(2aB)} = 2\gamma_s$$

$$\frac{U_e}{B} = -\frac{\pi\sigma^2 a^2}{E}$$

$$\frac{dU_e}{da} = -\frac{d}{da} \left( \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \right) = -\frac{2\pi\sigma^2 a B}{E}$$

$$G = \frac{dE_{liberada}}{dA} = -\frac{dU_e}{dA}$$

$$G = -\frac{dU_e}{dA} = -\frac{dU_e}{d(2aB)} = -\frac{1}{2B} \frac{dU_e}{da} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}$$

$$G = \frac{dU_s}{dA}$$

$$\frac{\pi\sigma^2 a}{E} = 2\gamma_s$$

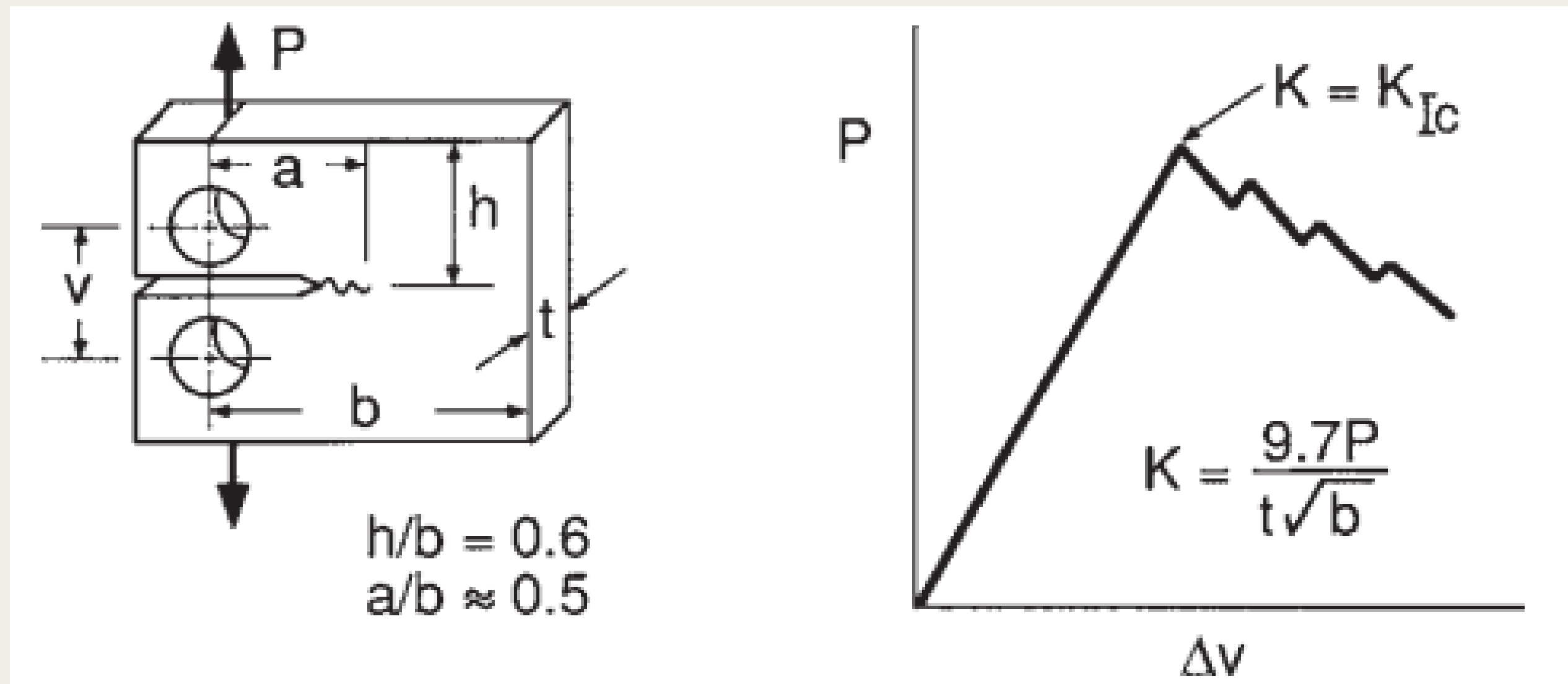
$$G_c = 2\gamma_s$$

$$G \geq G_c$$



# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

e) A tenacidade à fratura ( $K_{Ic}$ ) é uma propriedade do material que representa sua resistência à fratura na presença de uma trinca. É o valor crítico do fator de intensidade de tensão ( $K$ ) no qual uma trinca em um material frágil sob carregamento do Modo I começará a se propagar rapidamente, levando à falha. O subscrito "c" indica que é um valor crítico.



# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

**8.6** Para placas com trinca central sob tração valores precisos de F a partir de resultados numéricos são dados no manual de Tada (2000), listados na Tabela P8.6.

- a) Compare esses valores com a expressão para F que é recomendada para qualquer  $\alpha$ . Qual é a sua precisão para  $\alpha \leq 0.8$ ?
- b, c) Duas aproximações para F que às vezes são empregadas para placas com trinca central são:

$$F = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}, F = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \text{ (b, c)}$$

onde os argumentos das funções trigonométricas estão em radianos. Compare cada uma delas com os valores numéricos e caracterize a precisão de cada uma para  $\alpha \leq 0.8$ .

**Table P8.6**

| $\alpha = a/b$  | 0     | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $F = F(\alpha)$ | 1.000 | 1.006 | 1.025 | 1.058 | 1.109 | 1.187 | 1.303 | 1.488 | 1.816 | 2.578 |

Values for small  $a/b$  and limits for 10% accuracy:

(a)  $K = S_g \sqrt{\pi a}$   
( $a/b \leq 0.4$ )

(b)  $K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a}$   
( $a/b \leq 0.6$ )

(c)  $K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a}$   
( $a/b \leq 0.13$ )

Expressions for any  $\alpha = a/b$ :

(a)  $F = \frac{1 - 0.5\alpha + 0.326\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha}}$  ( $h/b \geq 1.5$ )

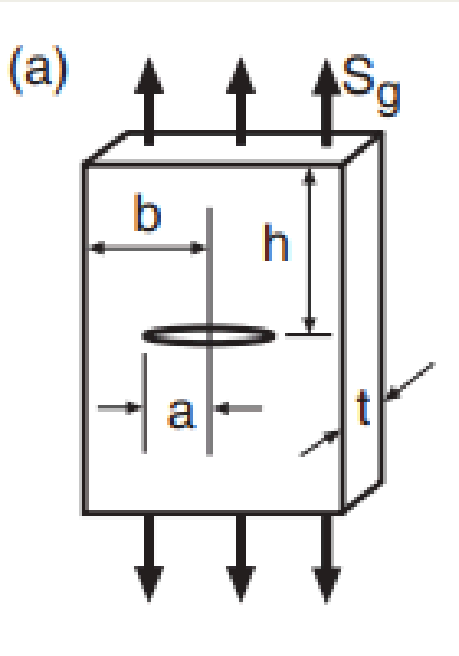
(b)  $F = \left(1 + 0.122 \cos^4 \frac{\pi\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2}}$  ( $h/b \geq 2$ )

(c)  $F = 0.265 (1 - \alpha)^4 + \frac{0.857 + 0.265\alpha}{(1 - \alpha)^{3/2}}$  ( $h/b \geq 1$ )

$K = F S_g \sqrt{\pi a}$

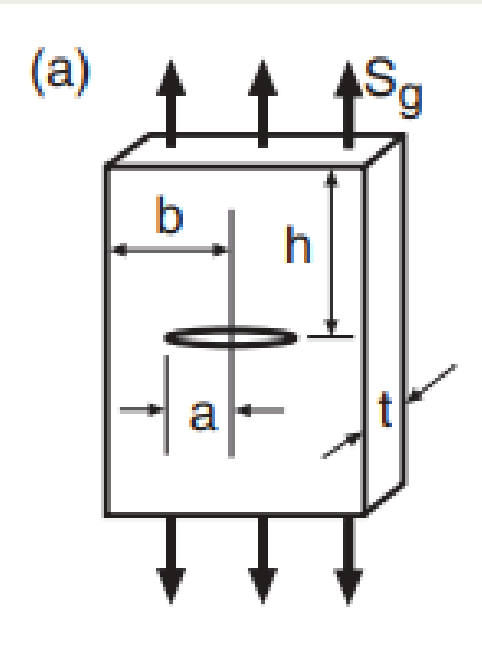
$S_g = \frac{P}{2bt}$  (a,b)

$S_g = \frac{P}{bt}$  (c)



# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

## Solução



(a)  $K = S_g \sqrt{\pi a}$   
( $a/b \leq 0.4$ )

(a)  $F = \frac{1 - 0.5\alpha + 0.326\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha}}$

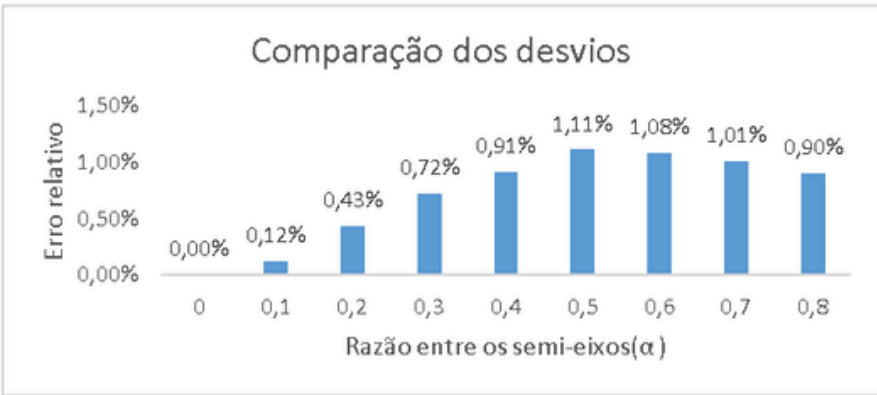
Table P8.6

| $\alpha = a/b$  | 0     | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $F = F(\alpha)$ | 1.000 | 1.006 | 1.025 | 1.058 | 1.109 | 1.187 | 1.303 | 1.488 | 1.816 | 2.578 |

a)

| $\alpha = a/b$ | F calculado | F tada | E relativo |
|----------------|-------------|--------|------------|
| 0              | 1,000       | 1,000  | 0,00%      |
| 0,1            | 1,005       | 1,006  | 0,12%      |
| 0,2            | 1,021       | 1,025  | 0,43%      |
| 0,3            | 1,050       | 1,058  | 0,72%      |
| 0,4            | 1,099       | 1,109  | 0,91%      |
| 0,5            | 1,174       | 1,187  | 1,11%      |
| 0,6            | 1,289       | 1,303  | 1,08%      |
| 0,7            | 1,473       | 1,488  | 1,01%      |
| 0,8            | 1,800       | 1,816  | 0,90%      |

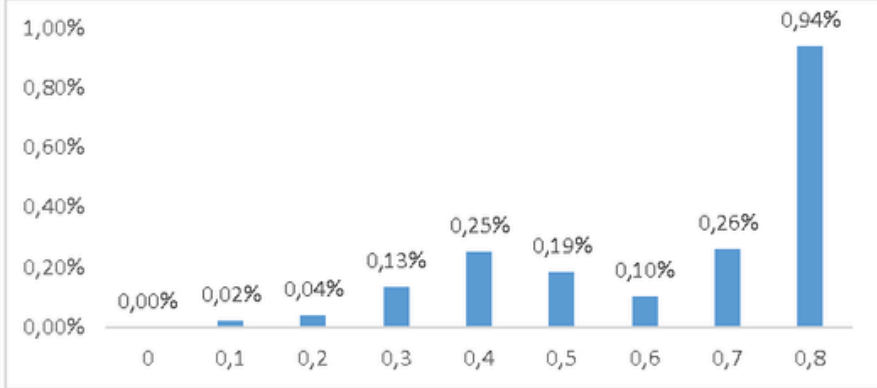
Resultado **Aceitável** para  $\alpha \leq 0,8$



b)

| $\alpha = a/b$ | F calculado | F tada | E relativo |
|----------------|-------------|--------|------------|
| 0              | 1,000       | 1,000  | 0,00%      |
| 0,1            | 1,006       | 1,006  | 0,02%      |
| 0,2            | 1,025       | 1,025  | 0,04%      |
| 0,3            | 1,059       | 1,058  | 0,13%      |
| 0,4            | 1,112       | 1,109  | 0,25%      |
| 0,5            | 1,189       | 1,187  | 0,19%      |
| 0,6            | 1,304       | 1,303  | 0,10%      |
| 0,7            | 1,484       | 1,488  | 0,26%      |
| 0,8            | 1,799       | 1,816  | 0,94%      |

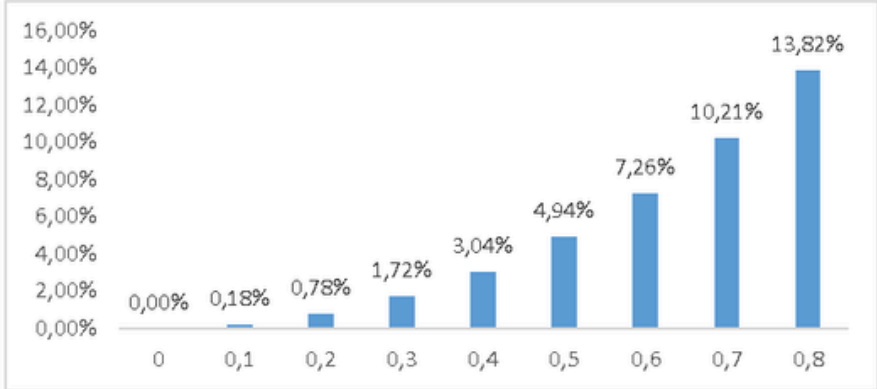
Resultado **Aceitável** para  $\alpha \leq 0,8$



c)

| $\alpha = a/b$ | F calculado | F tada | E relativo |
|----------------|-------------|--------|------------|
| 0              | #DIV/0!     | 1,000  | #DIV/0!    |
| 0,1            | 1,004       | 1,006  | 0,18%      |
| 0,2            | 1,017       | 1,025  | 0,78%      |
| 0,3            | 1,040       | 1,058  | 1,72%      |
| 0,4            | 1,075       | 1,109  | 3,04%      |
| 0,5            | 1,128       | 1,187  | 4,94%      |
| 0,6            | 1,208       | 1,303  | 7,26%      |
| 0,7            | 1,336       | 1,488  | 10,21%     |
| 0,8            | 1,565       | 1,816  | 13,82%     |

Resultado **Inaceitável** para  $\alpha \leq 0,6$  porém, **Aceitável** para  $\alpha \leq 0,8$



# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

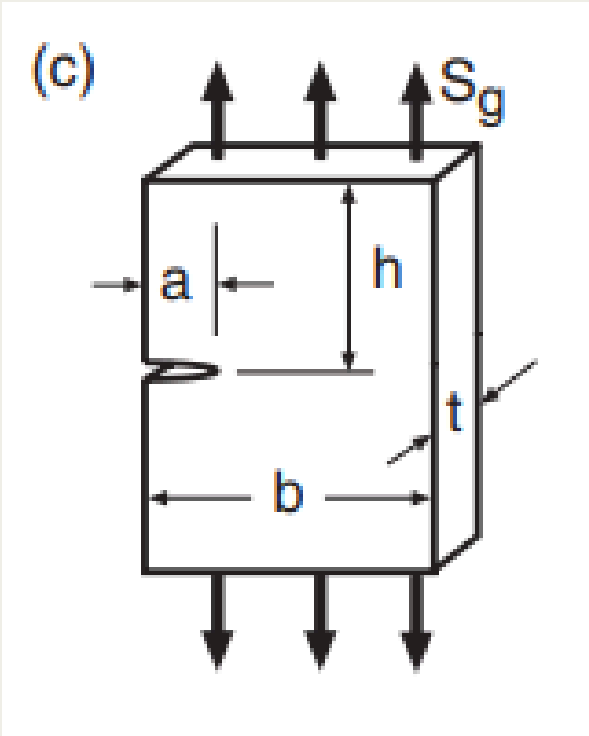
**8.7** Um elemento de engenharia será feito de aço maraging 18-Ni (fundido a vácuo). O elemento é uma placa carregada em tração, e pode ter uma trinca em uma das bordas. As dimensões são largura  $b=35$  e  $t=5$  mm, e a trinca pode ter até  $a=10$  mm de comprimento. O elemento deve resistir a uma força de tração de  $P=50$  kN.

Determine:

- a) o fator de segurança contra a fratura frágil
- b) o fator de segurança contra o escoamento totalmente plástico
- c) o fator de segurança geral (controlador).

**Table 8.1** Fracture Toughness and Corresponding Tensile Properties for Representative Metals at Room Temperature

| Material                        | Toughness<br>$K_{Ic}$                | Yield<br>$\sigma_o$ | Ultimate<br>$\sigma_u$ | Elong.<br>$100\epsilon_f$ | Red. Area<br>$\%RA$ |
|---------------------------------|--------------------------------------|---------------------|------------------------|---------------------------|---------------------|
|                                 | MPa $\sqrt{m}$<br>(ksi $\sqrt{in}$ ) | MPa<br>(ksi)        | MPa<br>(ksi)           | %                         | %                   |
| 18-Ni maraging<br>vacuum melted | 176<br>(160)                         | 1290<br>(187)       | 1345<br>(195)          | 15                        | 66                  |



(c)  $K = 1.12S_g\sqrt{\pi a}$   
 $(a/b \leq 0.13)$

$$X_K = \frac{K_{Ic}}{K} = \frac{K_{Ic}}{FS_g\sqrt{\pi a}}$$

(c)  $F = 0.265 (1 - \alpha)^4 + \frac{0.857 + 0.265\alpha}{(1 - \alpha)^{3/2}}$

(d)  $P_o = bt\sigma_o \left[ -\alpha + \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 1} \right]$   $X'_o = P_o/P$

# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

## a) o fator de segurança contra a fratura frágil

Primeiro, calculamos o razão dos semieixos ( $\alpha$ ) para determinar o parâmetro (F):

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{10 \text{ mm}}{35 \text{ mm}} = 0,285$$

Assim, como a razão é maior que 0.13, temos que utilizar a expressão geral para o cálculo de (F):

$$(c) \quad K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a} \\ (a/b \leq 0.13)$$

$$(c) \quad F = 0.265 (1 - \alpha)^4 + \frac{0.857 + 0.265\alpha}{(1 - \alpha)^{3/2}}$$

$$F = 0,265 * (1 - 0,285)^4 + \left( \frac{0,857 + 0,265 * 0,285}{(1 - 0,285)^{3/2}} \right)$$

$$F = 1,611$$

Em seguida, calculamos a tensão remota ( $S_g$ ):

$$S_g = \frac{P}{bt} = \frac{50.000 \text{ N}}{35 * 5 \text{ mm}^2} = 285,7 \text{ MPa}$$

Assim, podemos calcular o fato de intensidade de tensão (K) aplicada no elemento:

$$K = F S_g \sqrt{\pi a} = 1,611 * 285,7 \text{ MPa} * \sqrt{\pi * (0,01) \text{ m}}$$

$$K = 81,6 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

Logo, podemos identificar o fator de segurança ( $X_k$ ) utilizado:

$$X_k = \frac{K_{IC}}{K} = \frac{176 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}}{81,6 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}} = 2,157$$



# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

b) o fator de segurança contra o escoamento totalmente plástico

Precisamos calcular a tensão ( $P_0$ ) que leva ao escoamento do material:

$$(d) P_0 = bt\sigma_o \left[ -\alpha + \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 1} \right]$$

$$P_0 = 35 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} \cdot 1290 \text{ MPa} \left[ -0,286 + \sqrt{2 \cdot (0,286)^2 - (2 \cdot 0,286) + 1} \right]$$
$$P_0 = 109,1 \text{ kN}$$

Por fim, calculamos o fator de segurança para o escoamento:

$$X_o = \frac{P_0}{P} = \frac{109,1 \text{ kN}}{50 \text{ kN}} = 2,182$$

c) o fator de segurança geral (controlador)

Dados o fator de segurança em relação a fratura frágil:

$$X_k = \frac{K_{IC}}{K} = \frac{176 \text{ MPa} \sqrt{m}}{81,6 \text{ MPa} \sqrt{m}} = 2,157$$

E o fator de segurança em relação ao escoamento,

$$X_o = \frac{P_0}{P} = \frac{109,1 \text{ kN}}{50 \text{ kN}} = 2,182$$

Adota-se o **menor** como controlador e fator de segurança geral:

$$X_k = \frac{K_{IC}}{K} = \frac{176 \text{ MPa} \sqrt{m}}{81,6 \text{ MPa} \sqrt{m}} = 2,157$$



# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

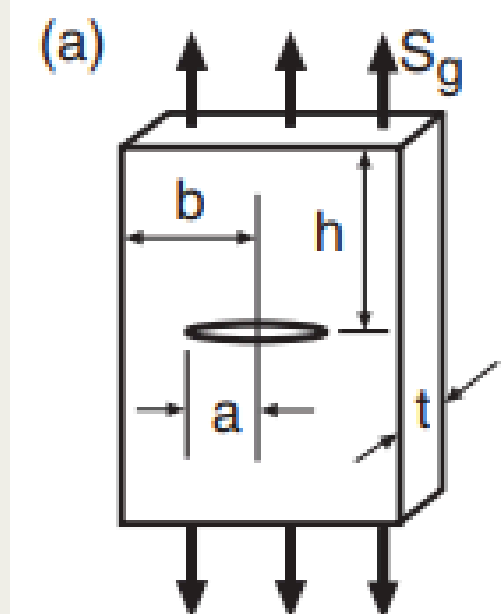
**8.8** Uma placa com trinca central de aço AISI 1144 tem dimensões, de  $b=50$  e  $t=5$  mm, e está sujeita a uma força de tração de  $P=100$  kN.

Determine:

- Quais são os fatores de segurança contra a fratura frágil e contra o escoamento totalmente plástico se o comprimento da trinca for  $a=10$  mm?
- Prossiga como em (a), mas use  $a=30$  mm.
- Suponha que esta placa seja um componente de engenharia e comente sobre sua segurança para os dois diferentes comprimentos de trinca.

**Table 8.1** Fracture Toughness and Corresponding Tensile Properties for Representative Metals at Room Temperature

| Material          | Toughness<br>$K_{Ic}$                | Yield<br>$\sigma_o$ | Ultimate<br>$\sigma_u$ | Elong.<br>$100\epsilon_f$ | Red. Area<br>$\%RA$ |
|-------------------|--------------------------------------|---------------------|------------------------|---------------------------|---------------------|
|                   | MPa $\sqrt{m}$<br>(ksi $\sqrt{in}$ ) | MPa<br>(ksi)        | MPa<br>(ksi)           | %                         | %                   |
| <i>(a) Steels</i> |                                      |                     |                        |                           |                     |
| AISI 1144         | 66<br>(60)                           | 540<br>(78)         | 840<br>(122)           | 5                         | 7                   |



$$X_K = \frac{K_{Ic}}{K} = \frac{K_{Ic}}{F S_g \sqrt{\pi a}}$$

$$(a) \quad K = S_g \sqrt{\pi a}$$

$$(a/b \leq 0.4)$$

$$(a) \quad F = \frac{1 - 0.5\alpha + 0.326\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha}}$$

$$X'_o = P_o / P$$

$$(a) \quad P_o = 2bt\sigma_o (1 - \alpha)$$

$$S_g = \frac{P}{2bt}$$

# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

a) Quais são os fatores de segurança contra a fratura frágil e contra o escoamento totalmente plástico se o comprimento da trinca for  $a=10\text{ mm}$ ?

Primeiro, calculamos o razão dos semieixos ( $\alpha$ ) para determinar o parâmetro (F):

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{10\text{ mm}}{50\text{ mm}} = 0,2$$

Assim, como a razão é menor que 0.4, temos o fator de correção geométrica (F) = 1.

$$(a) \quad K = S_g \sqrt{\pi a} \\ (a/b \leq 0.4)$$

Portanto, calculamos a tensão remota ( $S_g$ ):

$$S_g = \frac{P}{2bt} = \frac{100.000\text{ N}}{2 * 50 * 5\text{ mm}^2} = 200\text{ MPa}$$

Assim, podemos calcular o fato de intensidade de tensão (K) aplicada no elemento:

$$K = S_g \sqrt{\pi a} = 200\text{ MPa} * \sqrt{\pi * (0,01)\text{ m}}$$

$$K = 35,45\text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

Logo, podemos identificar o fator de segurança ( $X_k$ ) utilizado:

$$X_k = \frac{K_{IC}}{K} = \frac{66\text{ MPa} \sqrt{\text{m}}}{35,45\text{ MPa} \sqrt{\text{m}}} = 1,862$$

# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

a) Quais são os fatores de segurança contra a fratura frágil e contra o escoamento totalmente plástico se o comprimento da trinca for  $a=10$  mm?

Precisamos calcular a tensão ( $P_0$ ) que leva ao escoamento do material:

$$(a) P_0 = 2bt\sigma_o (1 - \alpha)$$

$$P_0 = 2 * 50 \text{ mm} * 5 \text{ mm} * 540 \text{ MPa} * (1 - 0,2)$$

$$P_0 = 216 \text{ kN}$$

E o fator de segurança em relação ao escoamento,

$$X_o = \frac{P_0}{P} = \frac{216 \text{ kN}}{100 \text{ kN}} = 2,16$$

b) Prossiga como em a), mas use  $a=30$  mm.

Primeiro, calculamos o razão dos semieixos ( $\alpha$ ) para determinar o parâmetro (F):

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{30 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 0,6$$

Assim, como a razão é maior que 0.4, temos que utilizar a expressão geral para o fator de correção geométrico:

$$(a) F = \frac{1 - 0.5\alpha + 0.326\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha}}$$

$$F = \frac{1 - (0,5 * \alpha) + 0,326 * \alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha}}$$

$$F = 1,292$$

# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

b) Prossiga como em a), mas use  $a=30$  mm.

Assim, podemos calcular o fato de intensidade de tensão (K) aplicada no elemento:

$$K = 1,292 * 200 \text{ MPa} * \sqrt{\pi (0,03)} = 79,4 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

Logo, podemos identificar o fator de segurança ( $X_k$ ) utilizado:

$$X_k = \frac{K_{IC}}{K} = \frac{66 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}}{79,4 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}} = 0,831$$

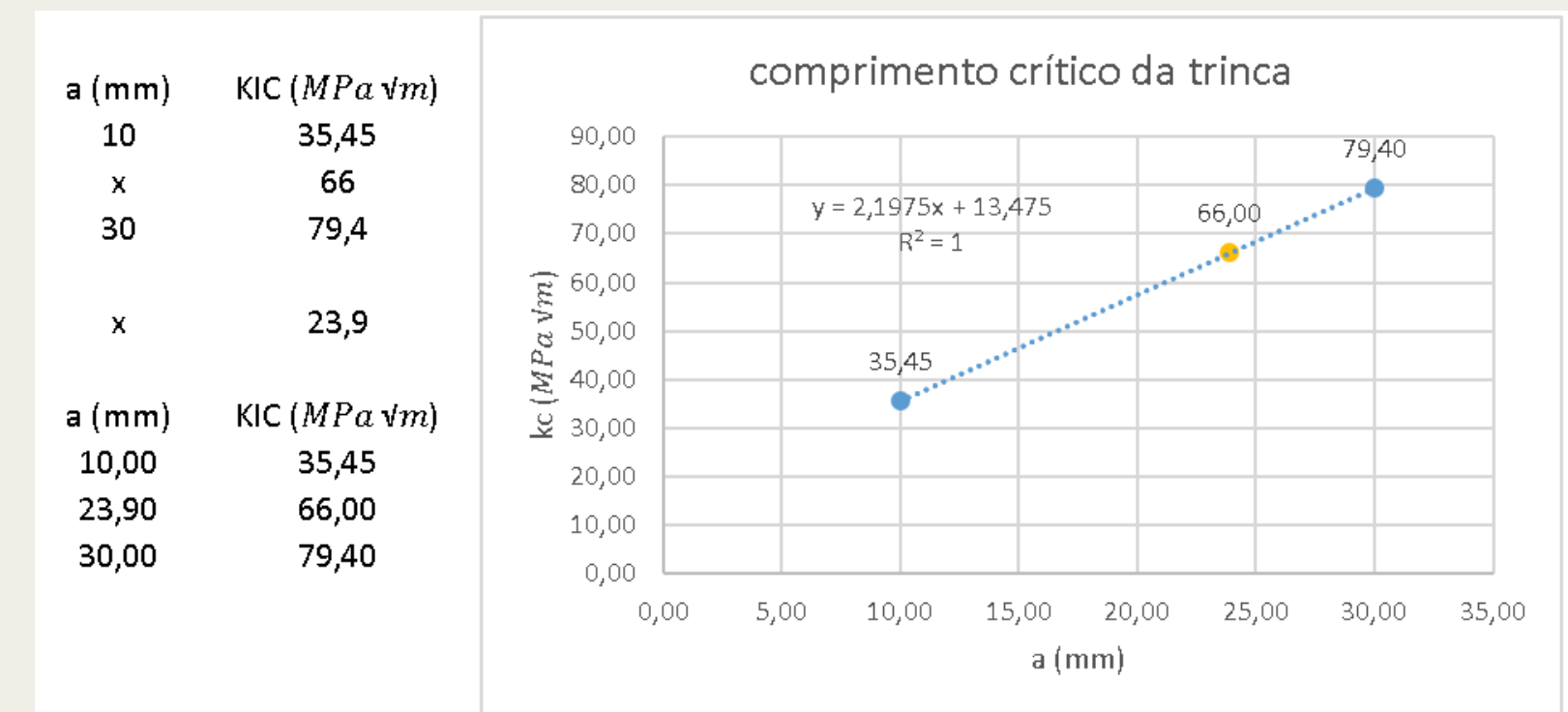
E o fator de segurança em relação ao escoamento,

$$P_0 = 2 * 50 \text{ mm} * 5 \text{ mm} * 540 \text{ MPa} * (1 - 0,6)$$

$$P_0 = 108 \text{ kN}$$

$$X_o = \frac{P_0}{P} = \frac{108 \text{ kN}}{100 \text{ kN}} = 1,08$$

c) Suponha que esta placa seja um componente de engenharia e comente sobre sua segurança para os dois diferentes comprimentos de trinca.



# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

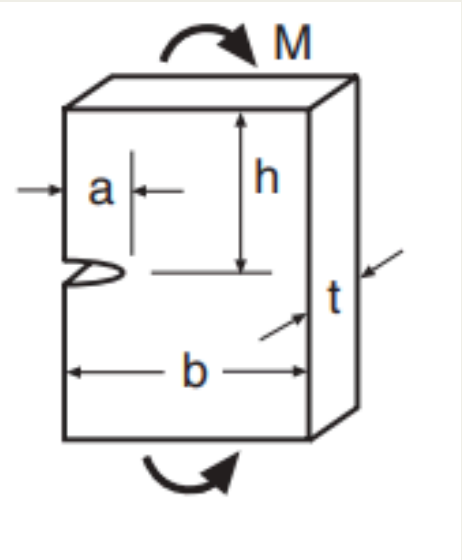
**8.9** Uma viga com seção transversal retangular tem dimensões, de  $b=40$  e  $t=10$  mm. A viga é feita de alumínio 7475-T7351 e é submetida a um momento fletor de  $M=900$  N·m.

Determine:

- a) Se uma trinca de borda de espessura total de comprimento  $a=5$  mm estiver presente, qual é o fator de segurança contra a fratura frágil?
- b) Repita (a) para um comprimento de trinca de 10 mm.
- c) Qual é o comprimento de trinca crítico para a fratura?
- d) Qual comprimento de trinca pode ser permitido se for exigido um fator de segurança de 3.0 contra a fratura frágil?

**Table 8.1** Fracture Toughness and Corresponding Tensile Properties for Representative Metals at Room Temperature

| Material   | Toughness<br>$K_{Ic}$ | Yield<br>$\sigma_o$ | Ultimate<br>$\sigma_u$ | Elong.<br>$100\epsilon_f$ | Red. Area<br>$\%RA$ |
|------------|-----------------------|---------------------|------------------------|---------------------------|---------------------|
|            | MPa√m<br>(ksi√in)     | MPa<br>(ksi)        | MPa<br>(ksi)           | %                         | %                   |
| 7475-T7351 | 52<br>(47)            | 435<br>(63)         | 505<br>(73)            | 14                        | —                   |



Values for small  $a/b$  and limits for 10% accuracy:  
 $(a, b) \quad K = 1.12S_g\sqrt{\pi a} \quad (a/b \leq 0.4)$

Expressions for any  $\alpha = a/b$ :  
 $(a) \quad F = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2}} \left[ \frac{0.923 + 0.199 \left(1 - \sin \frac{\pi\alpha}{2}\right)^4}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \right] \quad (\text{large } h/b)$

$$S_g = \frac{6M}{b^2t}$$

$$X_K = \frac{K_{Ic}}{K} = \frac{K_{Ic}}{F S_g \sqrt{\pi a}}$$



# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

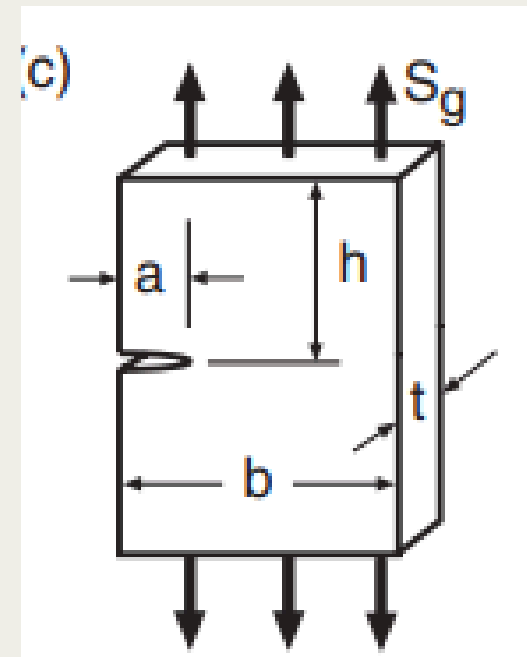
**8.10** Um elemento de tração feito de alumínio 2014-T651 tem dimensões, de  $b=50$  e  $t=5$  mm. É exigido um fator de segurança de 3.0 contra a falha por fratura frágil ou escoamento totalmente plástico.

a) Se houver uma trinca de espessura total em uma das bordas, de comprimento  $a=10$  mm, qual é a maior força de tração  $P$  que pode ser permitida em serviço?

b) Se a força em serviço for  $P=5.0$  kN, qual é o maior comprimento de trinca que pode existir com segurança no elemento?

**Table 8.1** Fracture Toughness and Corresponding Tensile Properties for Representative Metals at Room Temperature

| Material  | Toughness<br>$K_{Ic}$                | Yield<br>$\sigma_o$ | Ultimate<br>$\sigma_u$ | Elong.<br>$100\epsilon_f$ | Red. Area<br>$\%RA$ |
|-----------|--------------------------------------|---------------------|------------------------|---------------------------|---------------------|
|           | MPa $\sqrt{m}$<br>(ksi $\sqrt{in}$ ) | MPa<br>(ksi)        | MPa<br>(ksi)           | %                         | %                   |
| 2014-T651 | 24<br>(22)                           | 415<br>(60)         | 485<br>(70)            | 13                        | —                   |



$$S_g = \frac{P}{bt}$$

$$X_K = \frac{K_{Ic}}{K} = \frac{K_{Ic}}{F S_g \sqrt{\pi a}}$$

$$P_o = bt\sigma_o \left[ -\alpha + \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 1} \right]$$

$$F = 0.265 (1 - \alpha)^4 + \frac{0.857 + 0.265\alpha}{(1 - \alpha)^{3/2}}$$

$$(c) \quad K = 1.12 S_g \sqrt{\pi a}$$

$$(a/b \leq 0.13)$$



# Exercícios propostos referente a seção 8.3 e 8.4

**8.11** Uma viga retangular feita de plástico ABS tem  $b=20$  mm de profundidade e  $t=10$  mm de espessura. Um momento fletor  $M$  é aplicado, e uma trinca de borda de espessura total pode estar presente. Para um fator de segurança contra fratura frágil de 2.5 em tensão, qual é o maior comprimento de trinca  $a$  que pode ser permitido se:

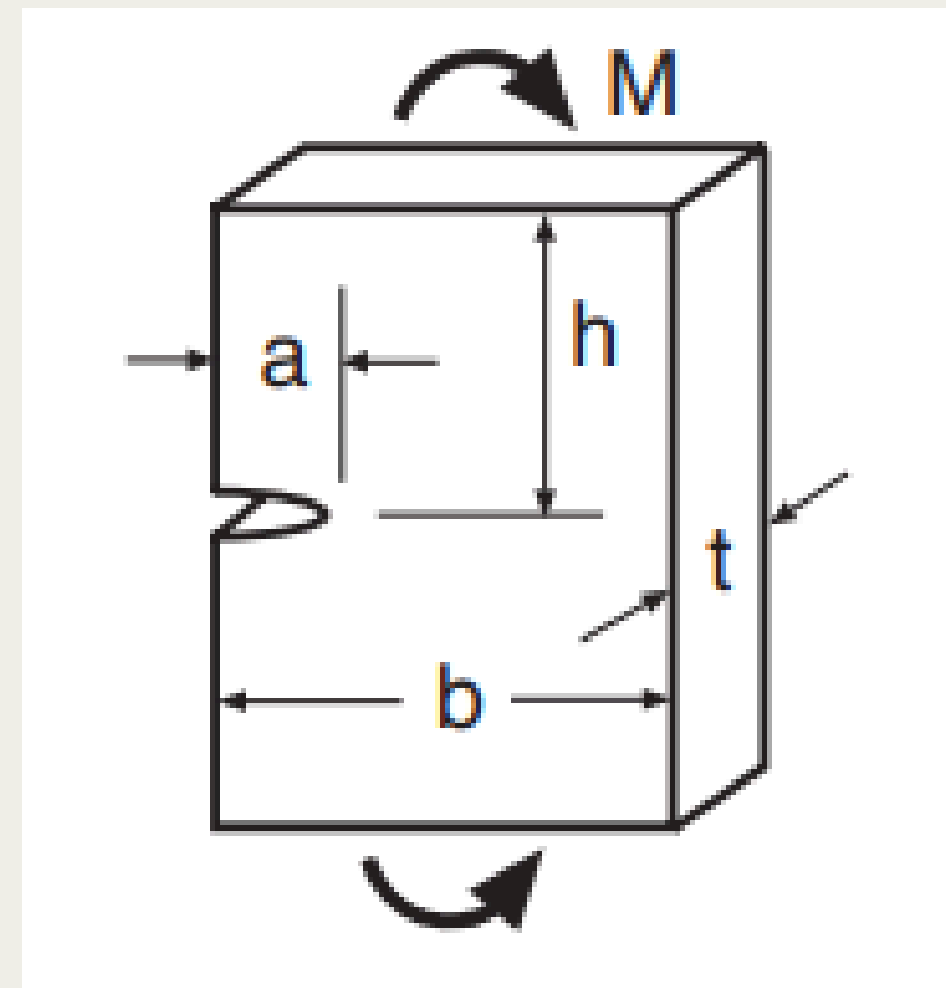
- a)  $M=20$  N·m
- b)  $M=5.0$  N·m

| Material              | $K_{Ic}$       |                    |
|-----------------------|----------------|--------------------|
| Polymers <sup>1</sup> | MPa $\sqrt{m}$ | (ksi $\sqrt{in}$ ) |
| ABS                   | 3.0            | (2.7)              |

$$(a, b) \quad K = 1.12S_g\sqrt{\pi a} \quad (a/b \leq 0.4)$$

s for any  $\alpha = a/b$ :

$$F = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2}} \left[ \frac{0.923 + 0.199 \left(1 - \sin \frac{\pi\alpha}{2}\right)^4}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \right]$$



$$S_g = \frac{6M}{b^2 t}$$

$$(b) \quad M_o = \frac{b^2 t \sigma_o}{4} (1 - \alpha)^2$$