A Física do Spin - 4300227

$3^{\underline{a}}$ lista

1) Considere os operadores de Spin 1, representados pelas seguintes matrizes:

$$S_+ = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; S_- = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Esses operadores são hermitianos?

2) Calcule os comutadores:

$$[S_y, S_z],\; [S_z, S_x],\; [S_+, S_-],\; [S_x, S_\pm],\; [S_y, S_\pm],\; [S_z, S_\pm].$$

onde

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quais desses operadores são compatíveis?

3) Mostre que os autovalores de S_y, no caso de spin 1, também são $m_s\hbar$, com $m_s = -1, 0, 1$. Determine seus autovetores, $|\chi_y,\ m_s\rangle$, onde $|\chi_y,\ m_s\rangle$ representa o autovetor com auto-valor $m_s\hbar$.

$$\text{Resp.: } |\chi_y, 1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \; |\chi_y, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\chi_y, -1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

4) Mostre que os autovetores de S_y são ortogonais.

5) Mostre que os autovetores de S_z e S_y são tambem autovetores de S^2:

$$S^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine os autovalores.

6) Um fóton se encontra num estado de spin dado por:

$$|\chi\rangle = A \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

a) Determine a constante de normalização A. (Resp.: A=1/2)
b) Ache os valores esperados de S_x, S_y e S_z. (Resp.: $\langle S_x\rangle = \hbar/(2\sqrt{2})$, $\langle S_y\rangle = -\hbar/\sqrt{2}$, $\langle S_z\rangle = \hbar/4$)

c) Numa medida de S_y que valores podem ser encontrados e quais as probabilidades? Verifique que a soma dessas probabilidades é 1. (Resp.: $P_1 = (7-4\sqrt{2})/16$, $P_0 = 1/8$ e $P_{-1} = (7+4\sqrt{2})/16$)
d) Numa medida de S_z que valores podem ser encontrados e quais as probabilidades? Verifique que a soma dessas probabilidades é 1.
e) Mostre que em termos dos autovetores de S_z, $|1\ 1\rangle$, $|1\ 0\rangle$ e $|1\ -1\rangle$, $|\chi\rangle$ pode ser escrito como:

$$|\chi\rangle = \frac{1+i}{2}|1\ 1\rangle + \frac{1}{2}|1\ 0\rangle - \frac{i}{2}|1\ -1\rangle.$$

Veja que dessa relação fica evidente que as respostas do ítem anterior são: $P_1 = 1/2$, $P_0 = 1/4$ e $P_{-1} = 1/4$.
f) Numa medida de S^2 que valores podem ser encontrados e quais as probabilidades? (Resp.: Sómente $2\hbar^2$ com prob. 1)
g) Se numa medida de S_z se obtem $\hbar$, em que estado o sistema se encontra logo após a medida? (Resp.: $|1\ 1\rangle$)
h) Se imediatamente após essa medida de S_z se mede S_y, quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades?
i) Se nessa medida de S_y se obteve 0 e se imediatamente após essa medida se mede novamente S_z, quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades?

7) Sabendo que: $S_\pm|s\ m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\ |s\ \ m_s \pm 1\rangle$, construir as matrizes S_+ e S_- para o spin 3/2. A partir dessas matrizes mostrar que

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$