

LIMITE FUNDAMENTAL

Disciplina: Cálculo I LOB1003

Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais EEL-USP

LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL DO SENO

De acordo com as interpretações geométricas das funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico (de raio 1) e o Teorema do Confronto, podemos realizar uma demonstração heurística do importante limite, denominado Limite Trigonométrico Fundamental:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Considere um arco x , $0 < x < \frac{\pi}{2}$, na figura abaixo:

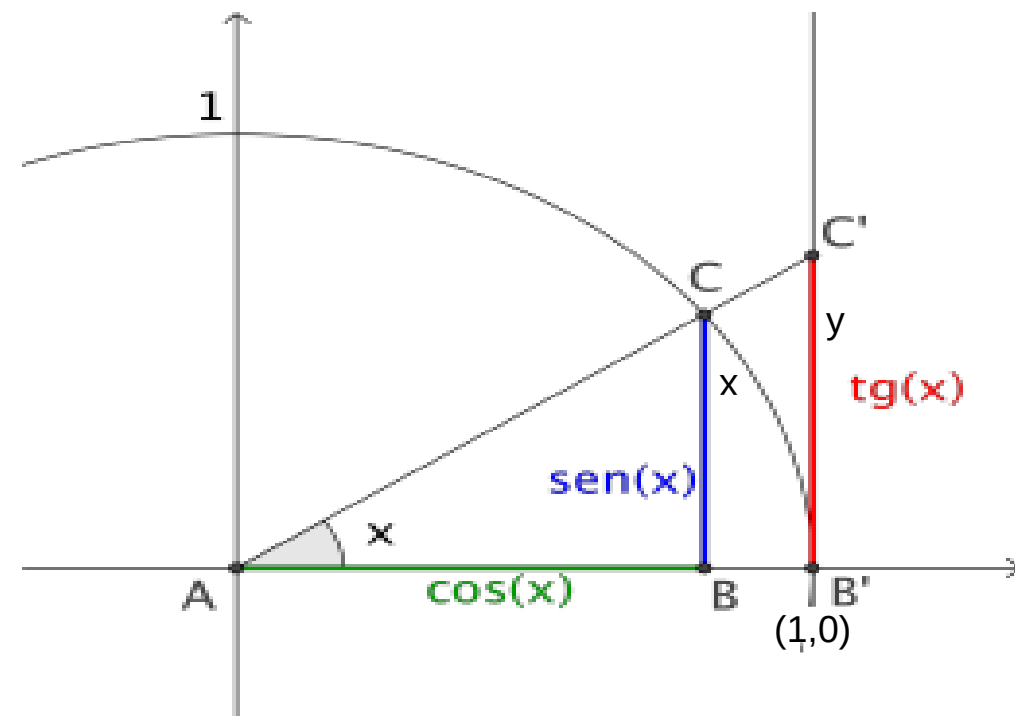


Figura 1: Círculo trigonométrico

Observa-se que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1$ é um limite fundamental, usando a relação trigonométrica $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ e aplicar o limite trigonométrico fundamental descrito acima. ¶

LIMITE FUNDAMENTAL TRIGONOMÉTRICO EXPONENCIAL

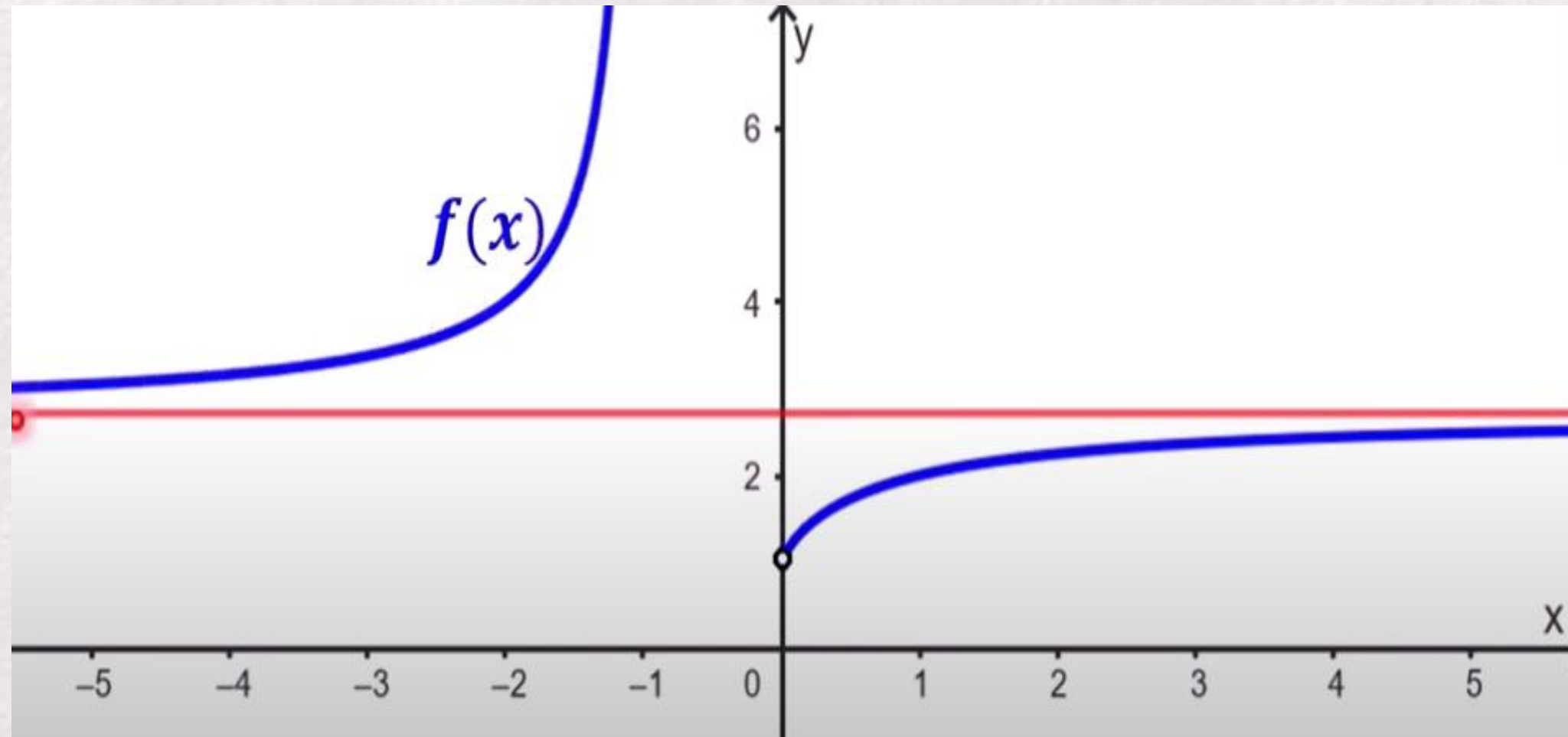
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Número
de Euler

Este limite é conhecido como o limite exponencial fundamental e dado por $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ onde $e = 2,718281\dots$ é a constante de Euler, que é um número irracional e é também a base dos logaritmos naturais ou neperianos.

LIMITE FUNDAMENTAL EXPONENCIAL

Considere o gráfico da $f(x)$ exponencial :



LIMITE FUNDAMENTAL LOGARÍTIMO

Considere o limite para análise:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Inicia-se esta demonstração fazendo uma troca de variáveis $t = a^x - 1 \therefore a^x = t + 1$ e quando $x \rightarrow 0$ também $t \rightarrow 0$.

Deve-se também encontrar uma expressão em t que seja igual a x para substituir quando faz-se a troca de variáveis. Assim, aplicando o logaritmo neperiano tem-se:

$$a^x = t + 1 \Rightarrow \ln a^x = \ln(t + 1) \Rightarrow ;$$

$$x \ln a = \ln(t + 1) \Rightarrow x = \frac{\ln(t + 1)}{\ln a} .$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$