



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #18

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

16/10/2025



Problemas 2D em coordenadas polares. Parte 2

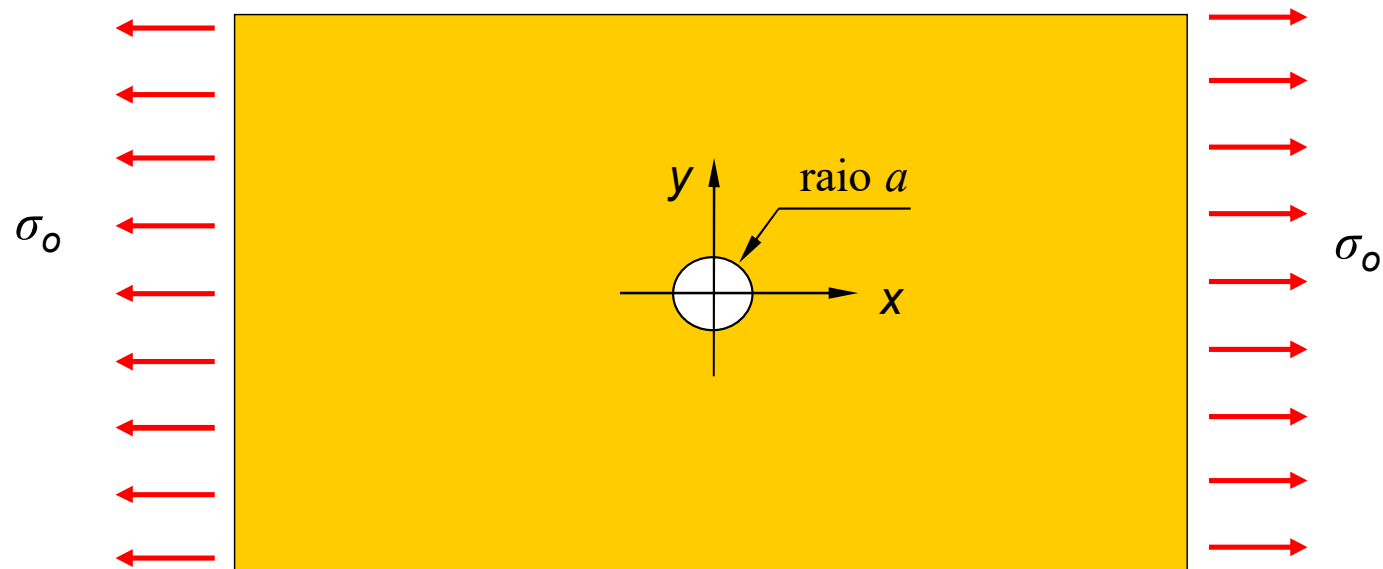
1. Efeito de orifícios circulares na distribuição de tensões em chapas
2. Força concentrada em um ponto de um bordo reto;
3. Solução geral do problema 2D em coordenadas polares



1. Efeito de orifícios circulares na distribuição de tensões em chapas

Hipóteses:

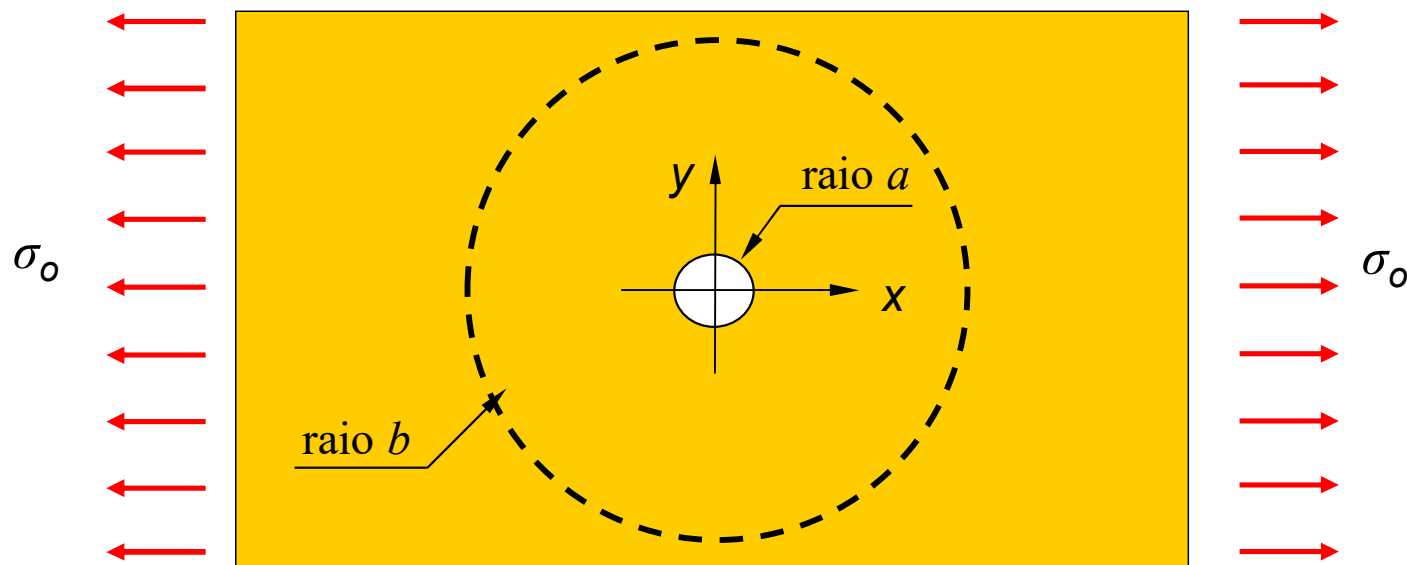
- Chapa fina, submetida a tração uniforme de valor σ_o na direção x ;
- Pequeno orifício circular de raio a existente no centro da chapa.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Consideremos a porção da chapa no interior de um círculo de raio b ($b \gg a$), concêntrico com o orifício. Considerando que o efeito do orifício é localizado, podemos admitir que as tensões à distância b são efetivamente as mesmas que em uma chapa sem orifício.

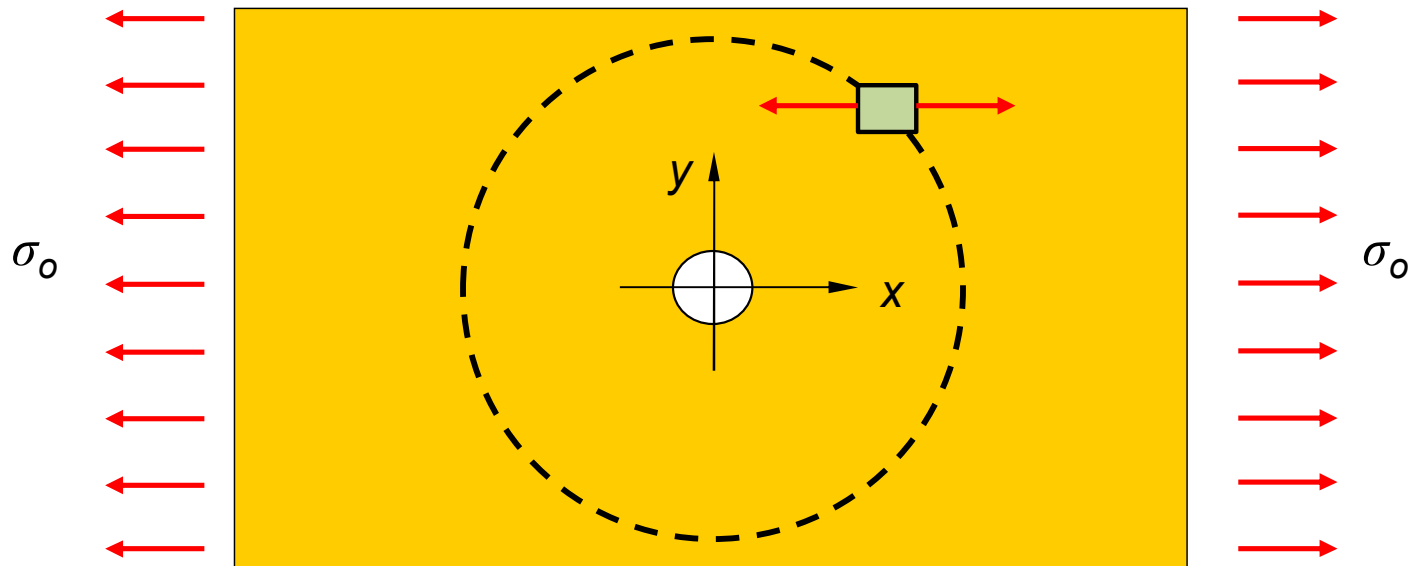




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim, o estado de tensões para os pontos que estão sobre a circunferência de raio b é dado pelo tensor:

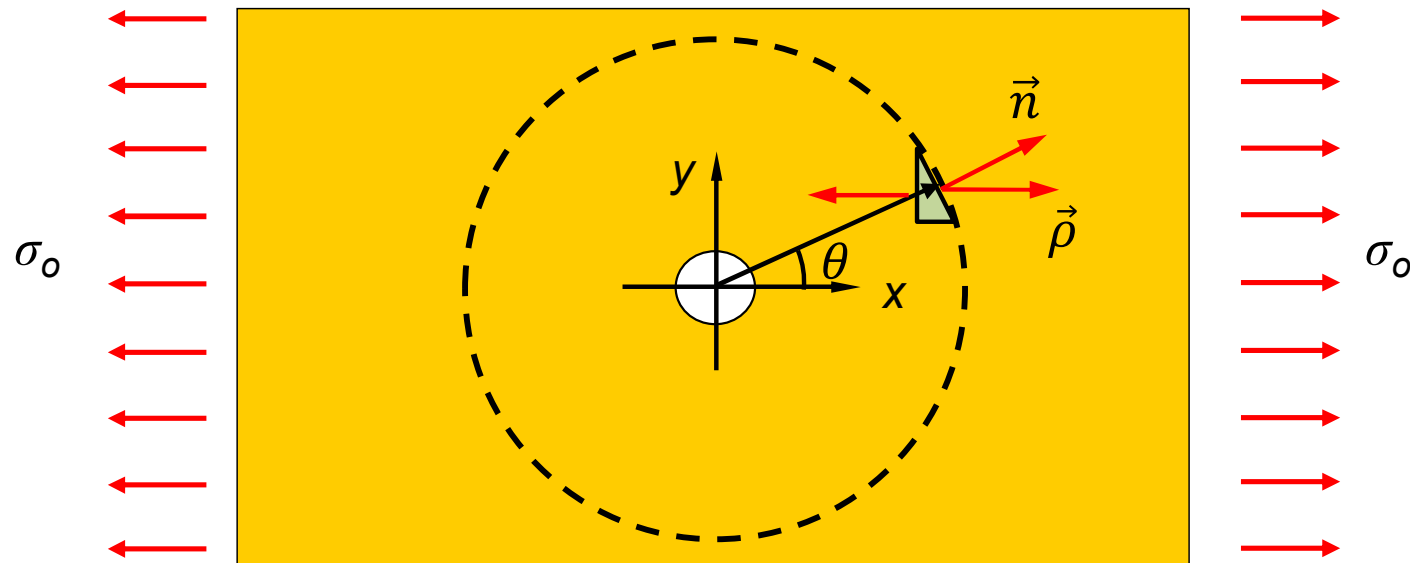
$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Onde:} \quad b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y)$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Vamos determinar as componentes do vetor tensão que atua em um plano tangente a um dado ponto da circunferência de raio b :



$$\vec{\rho} = T \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_o \cdot \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

As componentes normal e cisalhante do vetor tensão no plano inclinado são dadas por:

$$\sigma = \sigma_r = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \sigma_o \cdot \cos^2 \theta$$

$$\tau = \tau_{r\theta} = \vec{\rho} \cdot \vec{t} = -\sigma_o \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

Assim, a distribuição de tensões nos pontos distantes do orifício é dada por:

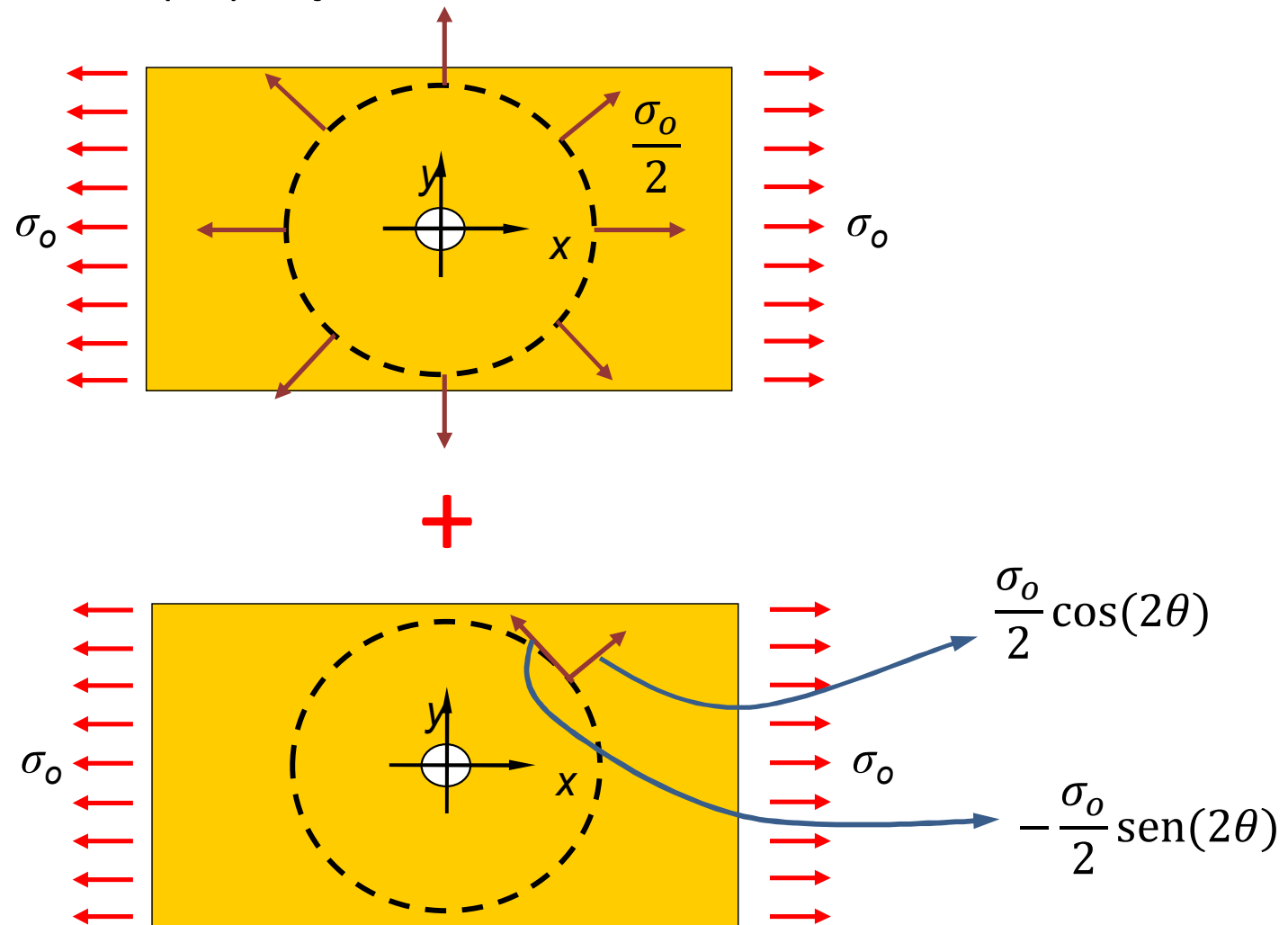
$$\sigma_r = \sigma_o \cdot \cos^2 \theta = \sigma_o \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} \right)$$

$$\tau_{r\theta} = -\sigma_o \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta = -\sigma_o \cdot \frac{\sin(2\theta)}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Pelo princípio da superposição:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A solução para o primeiro caso pode ser obtida a partir da solução para vasos de pressão de parede espessa, ou seja:

$$\sigma_r = \frac{(p_o - p_i).a^2.b^2}{(b^2 - a^2).r^2} + \frac{p_i.a^2 - p_o.b^2}{(b^2 - a^2)}$$
$$\sigma_\theta = -\frac{(p_o - p_i).a^2.b^2}{(b^2 - a^2).r^2} + \frac{p_i.a^2 - p_o.b^2}{(b^2 - a^2)}$$
$$\tau_{r\theta} = 0$$

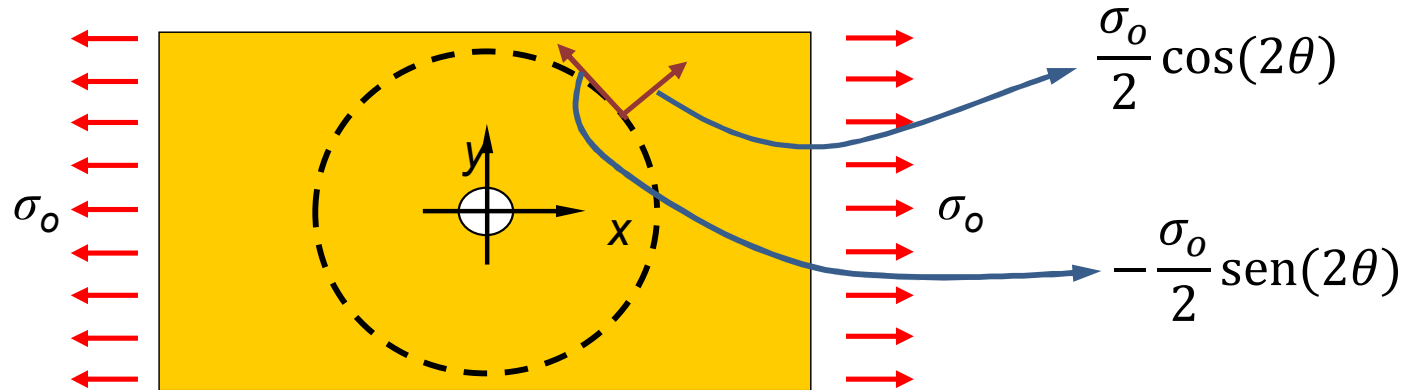
que, aplicada para este caso em particular, resultará:

$$\begin{array}{l} p_i = 0 \\ b^2 - a^2 \cong b^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sigma_{r,1} = -p_o \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{\sigma_o}{2} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{\theta,1} = -p_o \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{\sigma_o}{2} \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \\ \tau_{r\theta,1} = 0 \end{array} \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Falta determinar a solução para a parte restante do carregamento:



Lembrando, porém, que:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tal carregamento sobre o contorno sugere o uso de uma função de tensão da forma:

$$\phi(r, \theta) = f(r) \cdot \cos(2\theta)$$

Substituindo tal função na equação de compatibilidade de deformações:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

obteremos a seguinte EDO para a determinação de $f(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0$$

cuja solução geral é:

$$f(r) = A.r^2 + B.r^4 + C.\frac{1}{r^2} + D$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo:
$$\phi(r, \theta) = \left[A.r^2 + B.r^4 + C.\frac{1}{r^2} + D \right].\cos(2\theta)$$

Que leva ao campo de tensões

$$\sigma_{r,2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = - \left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cdot \cos(2\theta)$$

$$\sigma_{\theta,2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12B.r^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cdot \cos(2\theta)$$

$$\tau_{r\theta,2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = \left(2A + 6B.r^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \cdot \sin(2\theta)$$

onde as constantes A , B , C e D são obtidas a partir das condições de contorno do problema (2ª parcela do carregamento).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para $r = a$, devemos ter:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_r = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{array} \right.$$

E, para $r = b$, devemos ter:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_r = \sigma_o \cdot \frac{\cos(2\theta)}{2} \\ \tau_{r\theta} = -\sigma_o \cdot \frac{\sin(2\theta)}{2} \end{array} \right.$$

Resultando no seguinte sistema linear:

$$\left[\begin{array}{l} 2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} = 0 \\ 2A + 6B.a^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} = 0 \\ 2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2} = -\frac{\sigma_o}{2} \\ 2A + 6B.b^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2} = -\frac{\sigma_o}{2} \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resolvendo o sistema e fazendo a substituição: $b = a/\xi$:

virá (no limite para $\xi \rightarrow 0$):

$$\left[\begin{array}{ll} A = -\frac{\sigma_o}{4} & B = 0 \\ C = -\sigma_o \cdot \frac{a^4}{4} & D = \sigma_o \cdot \frac{a^2}{2} \end{array} \right.$$

Resultando:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{r,2} = \frac{\sigma_o}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cdot \cos(2\theta) \\ \sigma_{\theta,2} = -\frac{\sigma_o}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cdot \cos(2\theta) \\ \tau_{r\theta,2} = -\frac{\sigma_o}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \cdot \sin(2\theta) \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Finalmente, pelo Princípio da Superposição, teremos o campo de tensões resultante:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_o}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_o}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos(2\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_o}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_o}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_o}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin(2\theta)$$

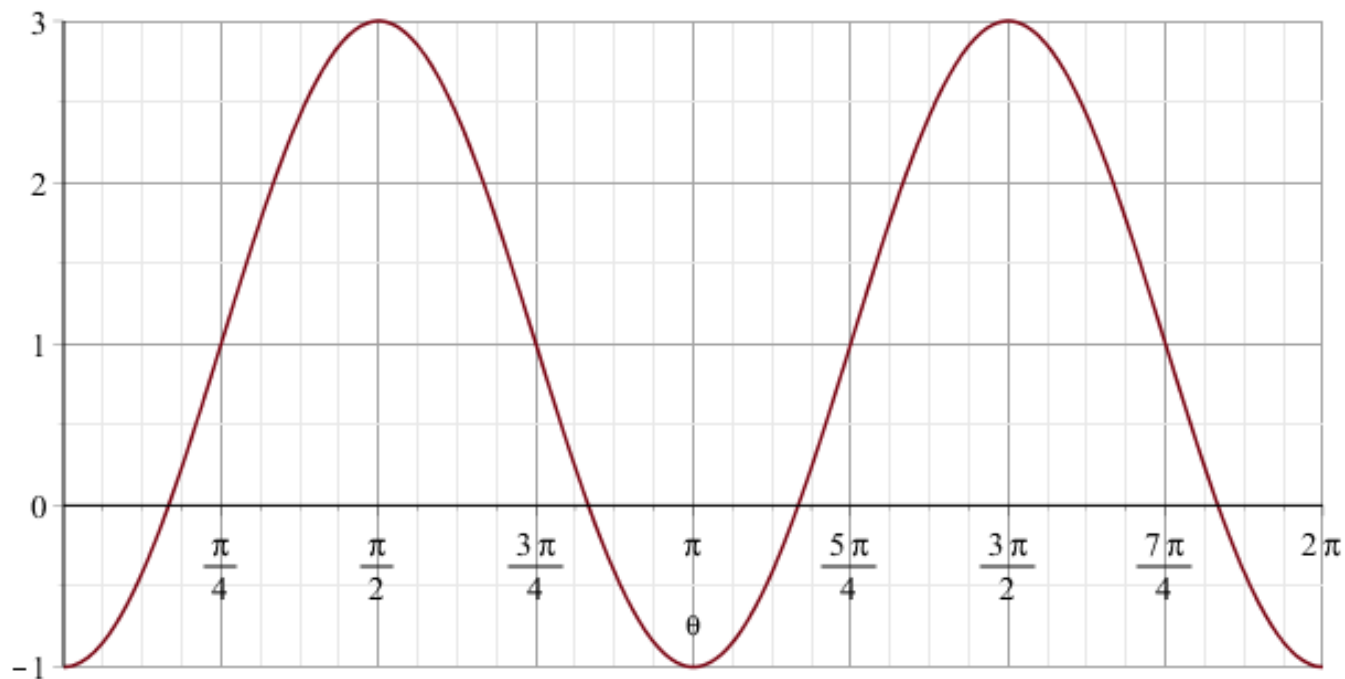
Esta solução foi obtida por G. Kirsch em 1898.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Em particular, no bordo do orifício teremos:

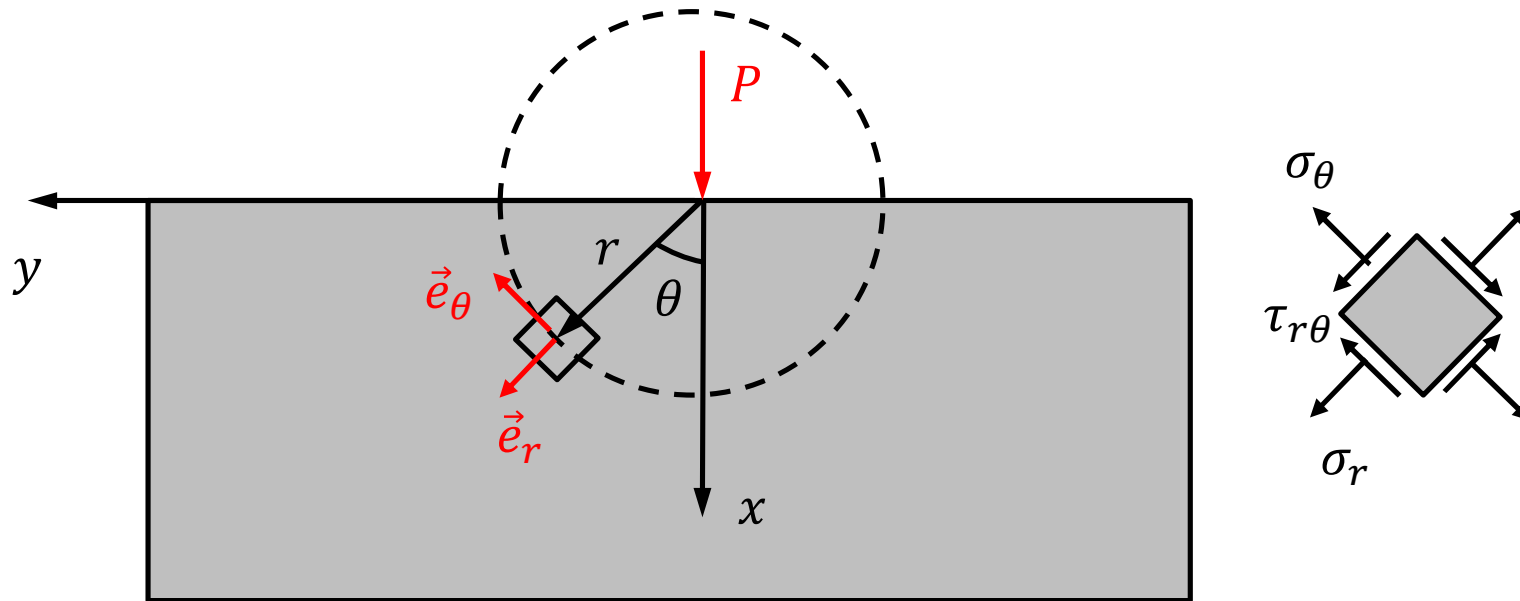
$$\sigma_{\theta} = \sigma_o(1 - 2\cos(2\theta))$$





2. Força concentrada atuando em um ponto de um bordo reto

Consideremos agora o problema referente a uma força vertical concentrada, de intensidade P , atuando em um bordo reto horizontal de uma chapa semi-infinita. Consideremos também que a força esteja distribuída uniformemente sobre a espessura da chapa.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A solução deste problema pode ser encontrada pelo uso da função de tensão (biharmônica) dada por:

$$\phi(r, \theta) = Cr\theta \operatorname{sen}\theta$$

que leva à seguinte distribuição de tensões (denominada distribuição radial simples):

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{2C \cos \theta}{r}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Verifica-se que as condições de contorno sobre o bordo reto (visivelmente descarregado, exceto no ponto de aplicação da carga) ficam prontamente atendidas com esta solução (tensões cisalhantes e tensões circunferenciais nulas para $\theta = \pm \pi/2$ e $r > 0$).

Para obter a constante C da função de tensão basta impor que a resultante das forças que atuam em uma superfície cilíndrica de raio r seja igual a P , ou seja:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r \cos \theta r d\theta = -P$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{2C \cos \theta}{r} \right) \cos \theta r d\theta = -P \quad \Leftrightarrow \quad 2C \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = -P$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$2C \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = -P \quad \longleftrightarrow \quad 2C \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta = -P$$

$$\longleftrightarrow \quad C \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -P \quad \longleftrightarrow \quad C = -\frac{P}{\pi}$$

Logo:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

A solução deste problema foi obtida por meio da solução tridimensional de Boussinesq por Flamant, em 1892.



3. Solução geral do problema 2D em coordenadas polares

Uma expressão geral da função de tensão $\phi = \phi(r, \theta)$ para a solução de problemas 2D em coordenadas polares foi apresentada por Michell, em 1899. Tal função de tensão é uma superposição de várias outras soluções encontradas e pode ser aplicada para casos gerais.

Os três primeiros termos da 1ª linha, por exemplo, representam a solução para a distribuição simétrica de tensões em relação à origem. O 1º termo da 2ª linha fornece a solução para a distribuição radial simples (problema de Flamant). Já os termos restantes da 2ª linha juntamente com os termos da 3ª linha fornecem a solução para uma porção de um anel circular submetido à flexão. Os termos da 4ª linha, para $n = 2$, fornecem a solução do problema de Kirsch, e assim por diante.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Distribuição simétrica de tensões em relação à origem

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) = & \left[a_0 \ln(r) + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln(r) \right] + d_0 r^2 \theta + \left[a'_0 \theta \right] \\ & + \left[\frac{a_1}{2} r \theta \sin \theta \right] + \left(b_1 r^3 + \frac{a'_1}{r} + b'_1 r \ln(r) \right) \cos \theta \\ & - \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta + \left(d_1 r^3 + \frac{c'_1}{r} + d'_1 r \ln(r) \right) \sin \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n r^n + b_n r^{n+2} + \frac{a'_n}{r^n} + \frac{b'_n}{r^{n-2}} \right) \cos(n\theta) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(c_n r^n + d_n r^{n+2} + \frac{c'_n}{r^n} + \frac{d'_n}{r^{n-2}} \right) \sin(n\theta) \end{aligned}$$

Distribuição de tensões cisalhantes uniformes (para um dado r) em um anel

Flexão de um anel circular por uma força concentrada com orientação qualquer

Solução para o problema de Kirsch (para $n=2$)

Distribuição radial simples (problema de Flamant)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

[1] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1970.