



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas*

*Aula #16*

*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

*09/10/2025*



## Problemas 2D em coordenadas polares. Parte 1

1. Equações gerais em coordenadas polares
2. Distribuição de tensões simétricas em relação a um eixo
3. Solução do problema do vaso de pressão cilíndrico de parede espessa via campo de deslocamentos
4. Flexão pura de barras curvas
5. Deslocamentos para distribuições simétricas de tensão
6. Flexão de uma barra curva por uma força na sua extremidade



## **1. Equações gerais em coordenadas polares**

Vimos nas aulas anteriores que as equações necessárias para a determinação do campo de tensões em problemas de EPT e de EPD em coordenadas retangulares, nos casos em que as forças distribuídas no volume são desprezíveis, eram dadas por:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Em coordenadas polares as equações análogas para a determinação do campo de tensões serão dadas por:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Considerando a função:  $\phi = \phi(r, \theta)$ , função de tensão de Airy, tal que:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

...verificamos que as duas equações diferenciais de equilíbrio em coordenadas polares ficam prontamente satisfeitas, sendo que a única equação restante a ser verificada é a equação de compatibilidade de deformações que fica expressa na forma:



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

ou, de forma simplificada:

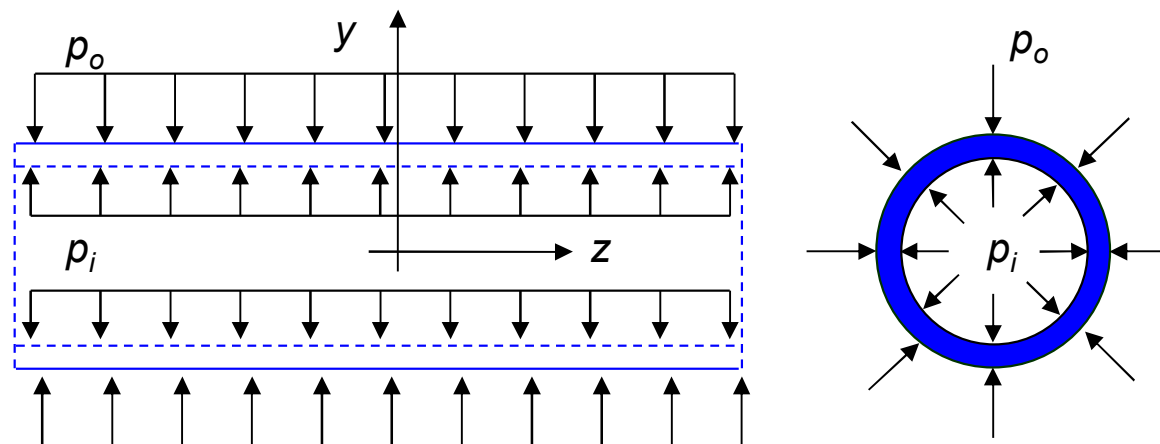
$$\nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \nabla^4 \phi(r, \theta) = 0$$

ou seja,  $\phi = \phi(r, \theta)$  deve ser uma função biarmônica.



## 2. Distribuição de tensões simétricas em relação a um eixo

Em alguns casos, a função de tensão irá depender apenas da variável  $r$ . Nos problemas de estado plano, isso ocorre, p.ex., em tubos submetidos a pressões interna e externa distribuídas uniformemente ao longo da direção circunferencial e axial).





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Uma vez que a função de tensão irá depender apenas da variável  $r$ , teremos:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_\theta = \frac{d^2 \phi}{dr^2}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad \Rightarrow \quad \tau_{r\theta} = 0$$

e a equação de compatibilidade de deformações fica:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Ou, na forma expandida:

$$\frac{d^4\phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\phi}{dr} = 0$$

Tal EDO pode ser reduzida a uma equação diferencial linear com coeficientes constantes pela introdução de uma nova variável ( $t$ ) tal que:

$$r = e^t$$

Com tal mudança de variável, a nova EDO fica escrita como:

$$\frac{d^4\phi}{dt^4} - 4 \frac{d^3\phi}{dt^3} + 4 \frac{d^2\phi}{dt^2} = 0$$

Procurando soluções da forma:  $\phi(t) = Ce^{\eta t}$ , encontraremos o polinômio característico:



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

$$\eta^4 - 4\eta^3 + 4\eta^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \eta^2(\eta - 2)^2 = 0$$

Cujas raízes fornecem:

$$\left[ \begin{array}{ll} \eta = 0 & \text{(raiz de multiplicidade 2)} \\ \eta = 2 & \text{(raiz de multiplicidade 2)} \end{array} \right.$$

Logo:  $\phi(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t}$

E, lembrando que:  $r = e^t$ , encontramos:

$$\phi(r) = C_1 + C_2 \ln(r) + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln(r)$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Pela notação do livro-texto, que passaremos a utilizar:

$$\phi(r) = A \ln(r) + Br^2 \ln(r) + Cr^2 + D$$

Tal função de tensão leva à seguinte distribuição de tensões:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln(r)) + 2C$$

$$\sigma_\theta = \frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\ln(r)) + 2C$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$



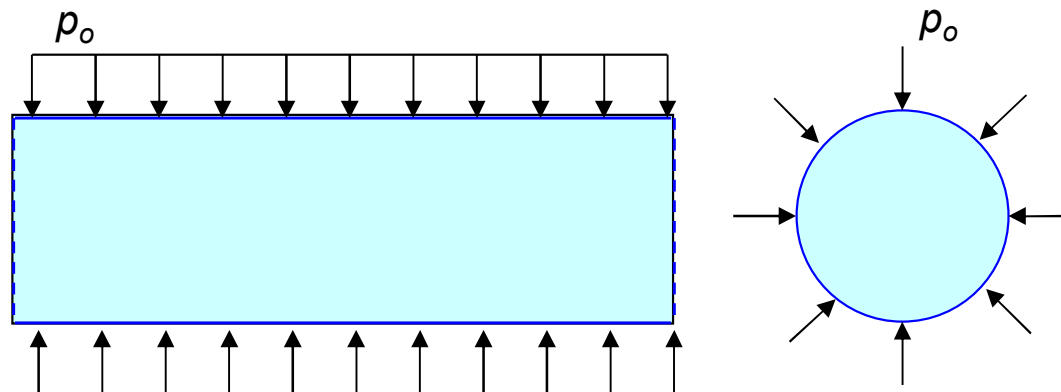
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Se não houver orifício na origem de coordenadas, as constantes  $A$  e  $B$  devem ser obrigatoriamente nulas. Assim, no caso de uma chapa (ou eixo) maciça(o) e sem forças distribuídas no volume, a distribuição de tensões para tal função de tensão fica:

$$\sigma_r = 2C$$

$$\sigma_\theta = 2C$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$





***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Porém, se houver orifício na origem, outras soluções podem ser obtidas a partir da função de tensão obtida. Tomando apenas  $B = 0$ , por exemplo, virá:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C$$

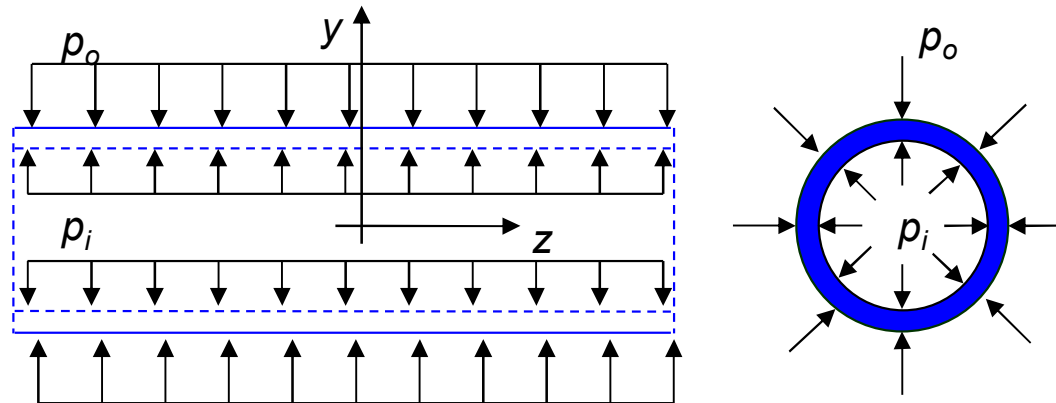
$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Observando que as tensões radiais são constantes para uma dada distância  $r$  à origem, podemos adaptar esta solução para o problema de determinação de tensões em um tubo de parede espessa submetido a pressões interna e/ou externa uniformemente distribuídas:



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



As constantes  $A$  e  $C$  são obtidas a partir das condições de contorno que, neste caso, são dadas por:

$$\left[ \begin{array}{l} r = a \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = \frac{A}{a^2} + 2C = -p_i \\ r = b \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = \frac{A}{b^2} + 2C = -p_o \end{array} \right.$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Resultando:

$$\left[ \begin{array}{l} A = \frac{(p_o - p_i).a^2.b^2}{(b^2 - a^2)} \\ 2C = \frac{p_i.a^2 - p_o.b^2}{(b^2 - a^2)} \end{array} \right.$$

E assim a distribuição final de tensões fica dada por:

$$\sigma_r = \frac{(p_o - p_i).a^2.b^2}{(b^2 - a^2).r^2} + \frac{p_i.a^2 - p_o.b^2}{(b^2 - a^2)}$$
$$\sigma_\theta = -\frac{(p_o - p_i).a^2.b^2}{(b^2 - a^2).r^2} + \frac{p_i.a^2 - p_o.b^2}{(b^2 - a^2)}$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Para a determinação do deslocamento radial  $u_r(r)$ , usamos a relação:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \cancel{\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}} = \frac{(\sigma_\theta - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_z))}{E}$$

$$u_r(r) = \frac{(\sigma_\theta - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_z)) \cdot r}{E}$$



### **3. Solução do problema do vaso de pressão cilíndrico de parede espessa via campo de deslocamentos**

Uma solução alternativa para o problema de determinação da distribuição de tensões em vasos de parede espessa pode ser obtida utilizando o procedimento geral apresentado na 3ª aula, ou seja, considerando:

- Relações entre deslocamentos e deformações;
- Equações constitutivas;
- Equações diferenciais de equilíbrio.

Naturalmente, as condições de axissimetria da estrutura e do carregamento permitem que algumas hipóteses simplificadoras sobre o campo de deslocamentos sejam inicialmente feitas, a saber:



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Nas condições de ETA:  $u_r = u_r(r, z)$ ,  $u_\theta = 0$ ,  $u_z = u_z(r, z)$

Logo, das relações deformações-deslocamentos em coordenadas cilíndricas teremos:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{r\theta} = 0 \quad (\tau_{r\theta} = 0)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{\theta z} = 0 \quad (\tau_{\theta z} = 0)$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Ademais, da hipótese de que as S.T.'s são uniformes e de que o carregamento é uniformemente distribuído ao longo do comprimento (não varia com  $z$ ), pode-se inferir que todas as seções terão o mesmo comportamento e que seções planas continuarão planas após a deformação, de forma que:

$$u_r = u_r(r), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = u_z(z)$$

Logo:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \qquad \varepsilon_z = \frac{du_z}{dz}$$

$$\gamma_{r\theta} = 0 \qquad \gamma_{rz} = 0 \qquad \gamma_{\theta z} = 0$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Das equações constitutivas, teremos:

$$\sigma_r = \lambda.(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G.\varepsilon_r = \lambda.\left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{du_z}{dz}\right) + 2G.\frac{du_r}{dr}$$

$$\sigma_\theta = \lambda.(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G.\varepsilon_\theta = \lambda.\left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{du_z}{dz}\right) + 2G.\frac{u_r}{r}$$

$$\sigma_z = \lambda.(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G.\varepsilon_z = \lambda.\left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{du_z}{dz}\right) + 2G.\frac{du_z}{dz}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{zr} = 0$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

E das equações diferenciais de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2 \cdot \tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned}$$

A 3a eq. (juntamente com as relações anteriores) nos permite concluir que:

$$\frac{d^2 u_z}{dz^2} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad u_z(z) = A_1 + A_2 \cdot z$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Logo:

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_r = \lambda \left( \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{du_z}{dz} \right) + 2G \cdot \frac{du_r}{dr} = \sigma_r(r) \\ \sigma_\theta = \lambda \left( \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{du_z}{dz} \right) + 2G \cdot \frac{u_r}{r} = \sigma_\theta(r) \\ \sigma_z = \lambda \left( \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{du_z}{dz} \right) + 2G \cdot \frac{du_z}{dz} = \sigma_z(r) \end{array} \right.$$

Voltando à 1a eq. de equilíbrio, chega-se à seguinte EDO:

$$(\lambda + 2G) \cdot \left[ \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} \right] = 0$$

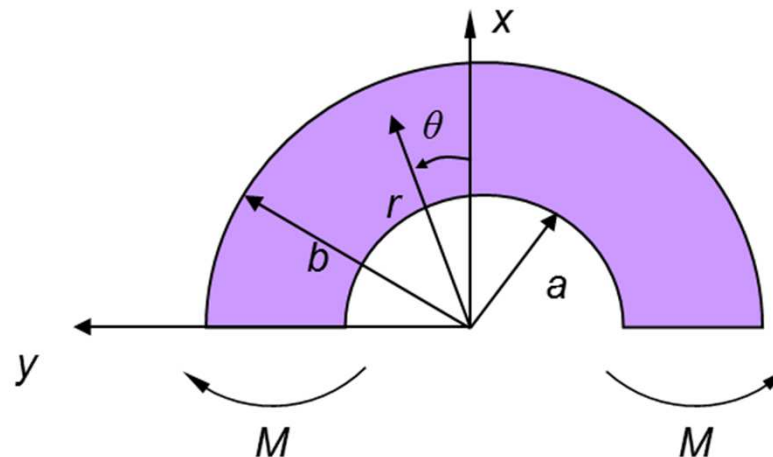
cuja solução fornece:  $u_r(r) = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}$

sendo  $C_1$  e  $C_2$  obtidos a partir das condições de contorno.



## 4. Flexão pura de barras curvas

Hipóteses: barra curva, de S.T. retangular constante (ou seja, não varia com  $z$ ), sujeita à flexão no plano de curvatura por conjugados  $M$  (por unidade de espessura da barra) aplicados nas extremidades.



Sendo o momento fletor constante ao longo do comprimento da barra, é natural admitir que a distribuição de tensões seja a mesma em todas as S.T.'s radiais, justificando o uso da função de tensão previamente obtida.



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Assim, tomando:  $\phi(r) = A.\ln(r) + B.r^2.\ln(r) + C.r^2 + D$

teremos, como já visto:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\phi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B.(1 + 2\ln(r)) + 2C$$

$$\sigma_\theta = \frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B.(2\ln(r) + 3) + 2C$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

As constantes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são obtidas aplicando-se as condições de contorno que são nesse caso:



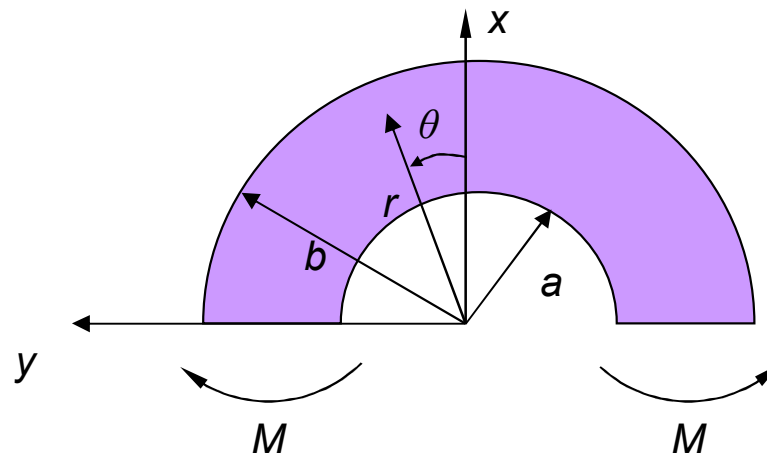
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

$$\sigma_r = 0 \quad (\text{para } r = a \text{ e } r = b)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (\text{em todo o contorno})$$

$$\int_a^b \sigma_\theta \cdot dr = 0 \quad (\text{força normal nas S.T.'s})$$

$$\int_a^b \sigma_\theta \cdot r \cdot dr = -M \quad (\text{momento fletor nas S.T.'s})$$





***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Da 1ª condição de contorno, resulta:

$$\frac{A}{a^2} + B.(1 + 2\ln(a)) + 2C = 0$$

$$\frac{A}{b^2} + B.(1 + 2\ln(b)) + 2C = 0$$

A 2ª condição de contorno está automaticamente atendida e, com a 1ª condição atendida, a 3ª condição fica necessariamente satisfeita (pois o uso de uma função de tensão garante o equilíbrio e uma força resultante não-nula nas extremidades violaria tal equilíbrio).

Resta, portanto, apenas a 4ª condição de contorno:

$$\int_a^b \sigma_{\theta} . r . dr = \int_a^b \left( \frac{d^2 \phi}{dr^2} \right) . r . dr = -M$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

$$\int_a^b \left( \frac{d^2 \phi}{dr^2} \right) r \cdot dr = \left. \frac{d\phi}{dr} \cdot r \right|_a^b - \int_a^b \left( \frac{d\phi}{dr} \right) dr$$

Lembrando que:

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\phi}{dr} \\ \sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left. \frac{d\phi}{dr} \cdot r \right|_a^b = 0$$

Logo:

$$\int_a^b \left( \frac{d\phi}{dr} \right) dr = \phi(b) - \phi(a) = M$$

$$A \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) + B \cdot [b^2 \cdot \ln(b) - a^2 \cdot \ln(a)] + C \cdot (b^2 - a^2) = M$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Resolvendo o sistema linear de 3 equações a 3 incógnitas, teremos:

$$A = -\frac{4M}{N} \cdot a^2 b^2 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$B = -\frac{2M \cdot (b^2 - a^2)}{N}$$

$$C = \frac{M}{N} \cdot \left[ b^2 - a^2 + 2 \cdot (b^2 \cdot \ln(b) - a^2 \cdot \ln(a)) \right]$$

onde:

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \cdot \left( \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^2$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

E o campo de tensões final fica dado por:

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N} \left( \frac{a^2 b^2}{r^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) + b^2 \cdot \ln\left(\frac{r}{b}\right) + a^2 \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right)$$
$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{N} \left( -\frac{a^2 b^2}{r^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) + b^2 \cdot \ln\left(\frac{r}{b}\right) + a^2 \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) + b^2 - a^2 \right)$$
$$\tau_{r\theta} = 0$$

Estas relações fornecem a distribuição de tensões satisfazendo a todas as condições de contorno para a flexão pura de barras curvas e representam a solução exata do problema (desde que a distribuição das forças normais nas seções extremas seja dada como prevê a expressão para  $\sigma_\theta$ ).



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

A comparação da expressão obtida para  $\sigma_\theta$  com outras expressões oriundas de soluções elementares e apresentadas em livros de R.M. mostra que:

- Se a altura da barra,  $h = b - a$ , for pequena comparada ao raio do eixo central,  $R_m = (a + b)/2$ , a distribuição linear de tensões proposta pela Resistência dos Materiais para barras de eixo reto é aceitável;
- Caso contrário, a Resistência dos Materiais mostra que a distribuição de tensões segue (aproximadamente) uma lei hiperbólica na forma:

$$\sigma_\theta \cong \frac{M}{S.(r_c - r_n)} \cdot \left[ \frac{r_n}{r} - 1 \right]$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

onde:

$r_c$  = distância do centróide da S.T. ao centro de curvatura (origem do sistema de coordenadas);

$r_n$  = distância do eixo neutro da S.T. ao centro de curvatura;

$r$  = distância do ponto (onde se quer calcular a tensão) ao centro de curvatura;

$M$  = momento aplicado (em N.m, não em N), ou seja, não é o momento por unidade de espessura da chapa;

$S$  = área da S.T.

(Ref.: Timoshenko, S.P., “Resistência dos Materiais”, vol.2, 1960)



## **5. Deslocamentos para distribuições simétricas de tensão**

Vimos que a distribuição de tensões nos casos de estado plano em que a função de tensão independe de  $\theta$  é dada por:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\phi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B \cdot (1 + 2 \ln(r)) + 2C$$

$$\sigma_\theta = \frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B \cdot (2 \ln(r) + 3) + 2C$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Considerando o caso de EPT, o uso das equações constitutivas e das relações entre deslocamentos e deformações permite a determinação do campo de deslocamentos  $u_r = u_r(r, \theta)$  e  $u_\theta = u_\theta(r, \theta)$ .



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Assim, das relações:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{(\sigma_r - \nu \cdot \sigma_\theta)}{E}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{(\sigma_\theta - \nu \cdot \sigma_r)}{E}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = 0$$

Obtemos:

$$u_r(r, \theta) = \frac{1}{E} \left[ -\frac{(1+\nu) \cdot A}{r} + 2(1-\nu) \cdot B \cdot r \cdot \ln(r) - B \cdot (1+\nu) \cdot r + 2C(1-\nu) \cdot r \right] + \\ + H \cdot \sin \theta + K \cdot \cos \theta$$

$$u_\theta(r, \theta) = \frac{4 \cdot B \cdot r \cdot \theta}{E} + F \cdot r + H \cdot \cos \theta - K \cdot \sin \theta$$

onde as constantes  $A$ ,  $B$  e  $C$  assumem valores específicos para cada caso particular e  $F$ ,  $H$  e  $K$  são obtidos a partir de condições de vínculos.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Impondo, por exemplo, as seguintes condições de vínculos em um anel:

$$\left[ \begin{array}{l} u_r = 0 \\ u_\theta = 0 \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0 \end{array} \right. \quad \text{para } r = r_o \text{ e } \theta = 0$$

pode-se verificar facilmente que:  $F = H = 0$

E portanto:

$$u_\theta(r, \theta) = \frac{4.B.r.\theta}{E} - K.\text{sen } \theta$$

(translação da S.T.)

(rotação da S.T.)



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Da expressão obtida, é possível concluir que:

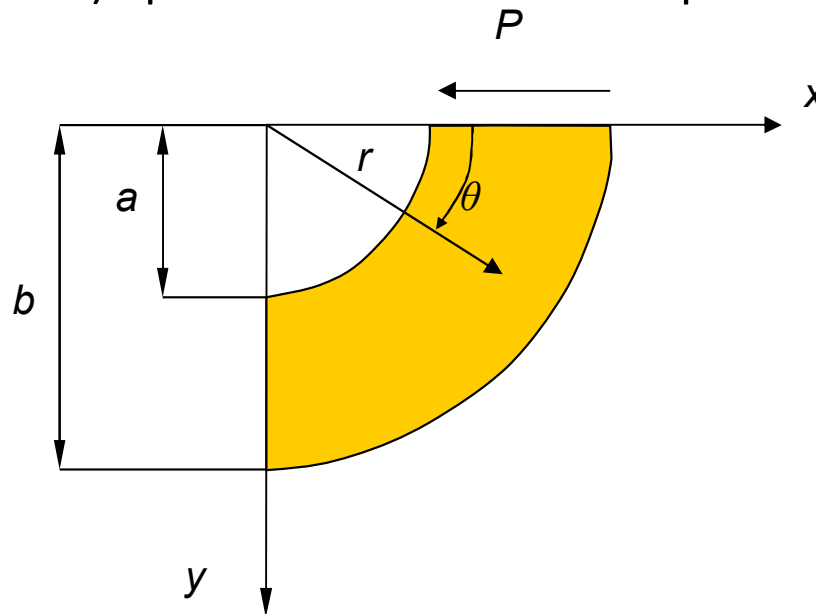
- S.T.'s planas permanecem planas na flexão pura de barras curvas;
- A parcela proporcional a  $B$  na componente de deslocamento  $u_\theta$  não é unívoca em  $\theta$ , sendo fisicamente impossível de ocorrer em um anel fechado. Daí a razão de termos tomado  $B = 0$  na solução do vaso de pressão cilíndrico (vide slide 13).



## 6. Flexão de uma barra curva por uma força na sua extremidade

Hipóteses:

Barra curva, de S.T. retangular constante (ou seja, não varia com  $z$ ), submetida à flexão no plano de curvatura por uma força transversal  $P$  (por unidade de espessura) aplicada à extremidade superior na direção radial.





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Observando que o momento fletor em uma dada S.T. é proporcional a  $\sin(\theta)$  e que a tensão normal  $\sigma_\theta$  é proporcional ao momento fletor (de acordo com a teoria elementar de flexão de barras curvas), podemos admitir que isto também seja válido para a solução exata.

E, lembrando que:  $\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$

Podemos considerar que:  $\phi(r, \theta) = f(r) \cdot \sin(\theta)$

Substituindo tal expressão para a função de tensão na equação de compatibilidade de deformações:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Encontramos: 
$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} \right) = 0$$

cuja solução é dada por:

$$\phi(r, \theta) = \left[ A.r^3 + B.\frac{1}{r} + C.r + D.r.\ln(r) \right] . \text{sen}(\theta)$$

e o campo de tensões fica dado por:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \left( 2A.r - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) . \text{sen}(\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left( 6A.r + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) . \text{sen}(\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = - \left( 2A.r - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) . \cos(\theta)$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Da condição de que os bordos interno e externo da barra curva estão descarregados, teremos:

$$\begin{cases} \sigma_r = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad \text{para } r = a \text{ e } r = b$$

Resultando:

$$\begin{cases} 2A.a - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a} = 0 \\ 2A.b - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b} = 0 \end{cases}$$

A 3a condição é dada por:

$$\int_a^b (\tau_{r\theta}|_{\theta=0}) dr = P \quad \Rightarrow \quad -A.(b^2 - a^2) + B.\frac{(b^2 - a^2)}{a^2.b^2} - D.\ln\left(\frac{b}{a}\right) = P$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Resolvendo o sistema linear de 3 equações a 3 incógnitas, teremos:

$$\left[ \begin{array}{l} A = \frac{P}{2N} \\ B = -\frac{P.a^2.b^2}{2N} \\ D = -\frac{P.(a^2 + b^2)}{N} \end{array} \right.$$

Onde:  $N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Substituindo os valores das constantes  $A$ ,  $B$  e  $D$  nas equações anteriores, temos o campo de tensões totalmente determinado.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Para a extremidade superior ( $\theta = 0$ ), encontramos:

$$\sigma_{\theta} = 0$$
$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{N} \left[ r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{(a^2 + b^2)}{r} \right]$$

e, para a extremidade inferior ( $\theta = \pi/2$ ), encontramos:

$$\sigma_{\theta} = \frac{P}{N} \left[ 3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{(a^2 + b^2)}{r} \right]$$
$$\tau_{r\theta} = 0$$

Os cálculos permitem concluir que a teoria simples, baseada na hipótese de que as seções transversais permanecem planas durante a flexão, fornece resultados satisfatórios.



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Vamos analisar, agora, qual problema pode ser resolvido se a função de tensão tiver a forma:

$$\phi(r, \theta) = g(r) \cdot \cos(\theta)$$

Antes, porém, devemos observar que, para que a função dada acima seja uma função de tensão, devemos ter:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

Assim, resulta (como no caso anterior):

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dg}{dr} - \frac{g}{r^2} \right) = 0$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

cuja solução é:  $g(r) = A_3.r^3 + B_3.\frac{1}{r} + C_3.r + D_3.r.\ln(r)$

A função de tensão fica então dada por:

$$\phi(r, \theta) = \left[ A_3.r^3 + B_3.\frac{1}{r} + C_3.r + D_3.r.\ln(r) \right].\cos(\theta)$$

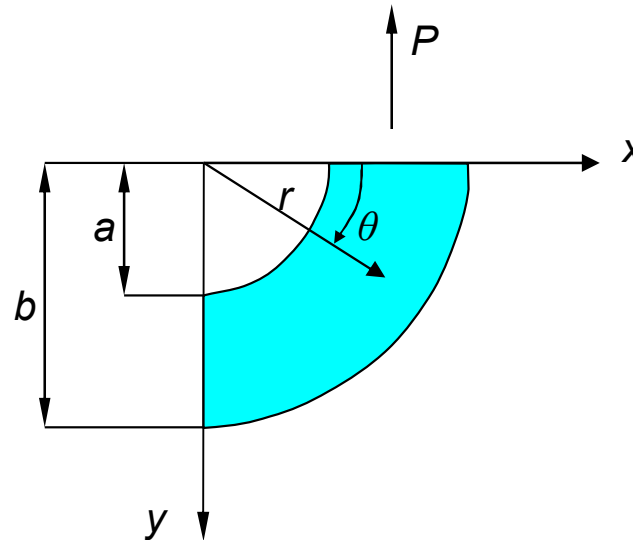
e o campo de tensões associado será dado por:

$$\left[ \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \left( 2A_3.r - \frac{2B_3}{r^3} + \frac{D_3}{r} \right) \cos(\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left( 6A_3.r + \frac{2B_3}{r^3} + \frac{D_3}{r} \right) \cos(\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = \left( 2A_3.r - \frac{2B_3}{r^3} + \frac{D_3}{r} \right) \sin(\theta) \end{aligned} \right.$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Aplicando estes resultados a um anel circular submetido a uma força normal (por unidade de espessura) na extremidade superior, teremos:



- Condições de contorno nos bordos interno ( $r = a$ ) e externo ( $r = b$ ):

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_r = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{array} \right] \iff \left[ \begin{array}{l} 2A_3 \cdot a - \frac{2B_3}{a^3} + \frac{D_3}{a} = 0 \\ 2A_3 \cdot b - \frac{2B_3}{b^3} + \frac{D_3}{b} = 0 \end{array} \right]$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

A 3a condição é dada por:

$$\int_a^b (\sigma_\theta|_{\theta=0}) dr = P \quad \Leftrightarrow \quad 3A_3 \cdot (b^2 - a^2) + B_3 \cdot \frac{(b^2 - a^2)}{a^2 \cdot b^2} + D_3 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = P$$

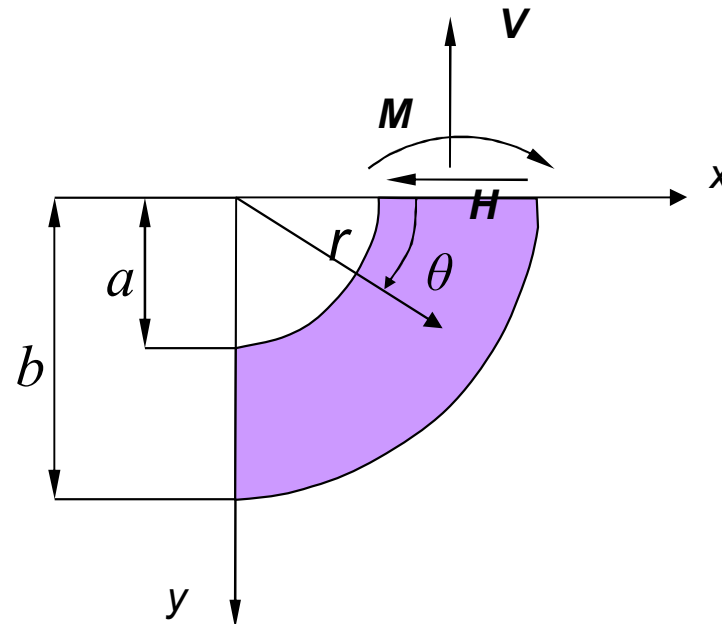
Resolvendo o sistema linear de 3 eqs. a 3 incógnitas, teremos:

$$\left[ \begin{array}{l} A_3 = -\frac{P}{2N_3} \\ B_3 = \frac{P \cdot a^2 \cdot b^2}{2N_3} \\ D_3 = \frac{P \cdot (a^2 + b^2)}{N_3} \end{array} \right. \quad \text{Onde:} \quad N_3 = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Tendo as soluções para a flexão pura, para uma carga horizontal e para uma carga vertical, a solução para qualquer força inclinada combinada com flexão pode ser obtida por superposição:





***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Referências:***

[1] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1970.