



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #13

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

26/09/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

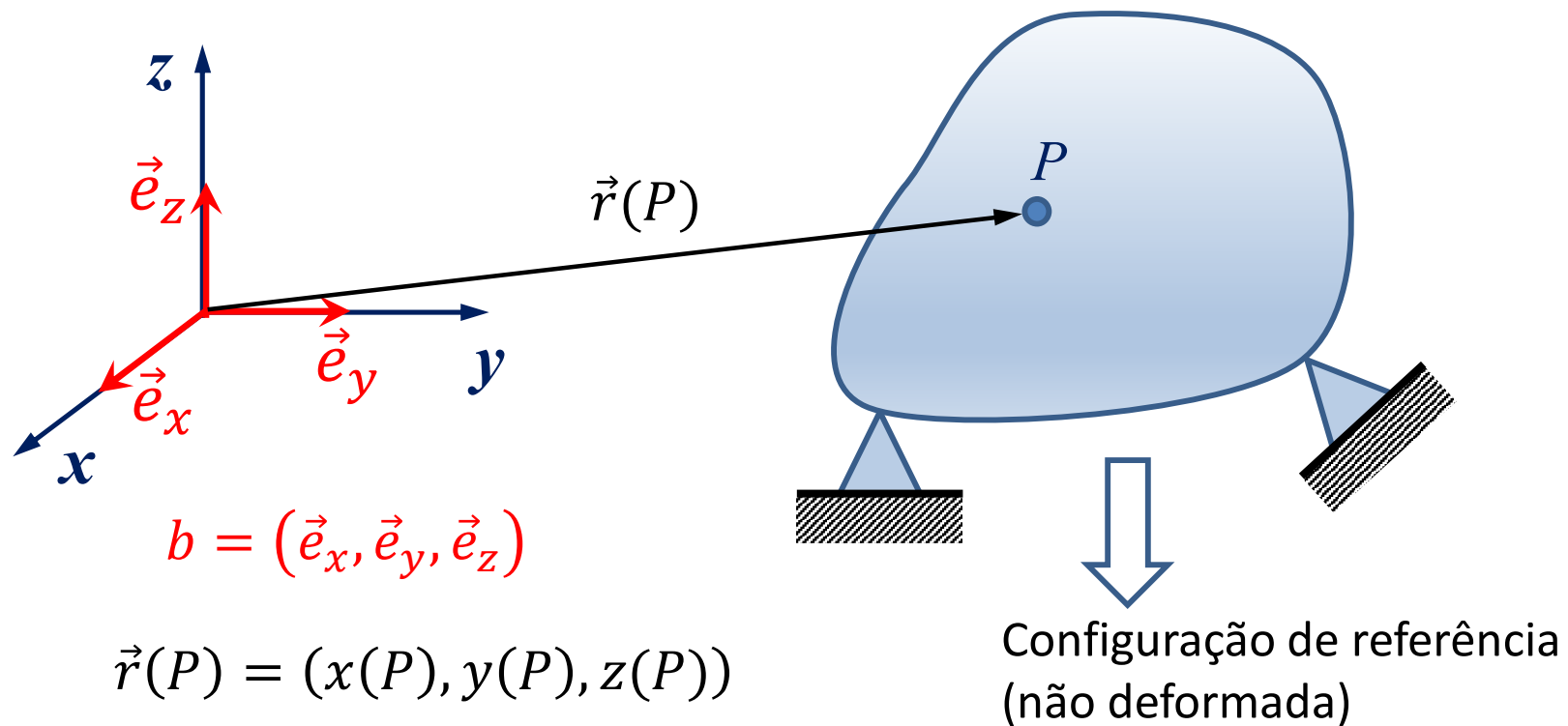
Agenda:

1. Notação para deslocamentos, alongamentos e distorções
2. Família de alongamentos
3. Relações deformações-deslocamentos em coordenadas cartesianas
4. Equações constitutivas para materiais com comportamento elástico-linear
5. Equacionamento para a solução geral de problemas da Teoria da Elasticidade Clássica (TEC)



1. Notação para deslocamentos, alongamentos e distorções

Notação clássica:

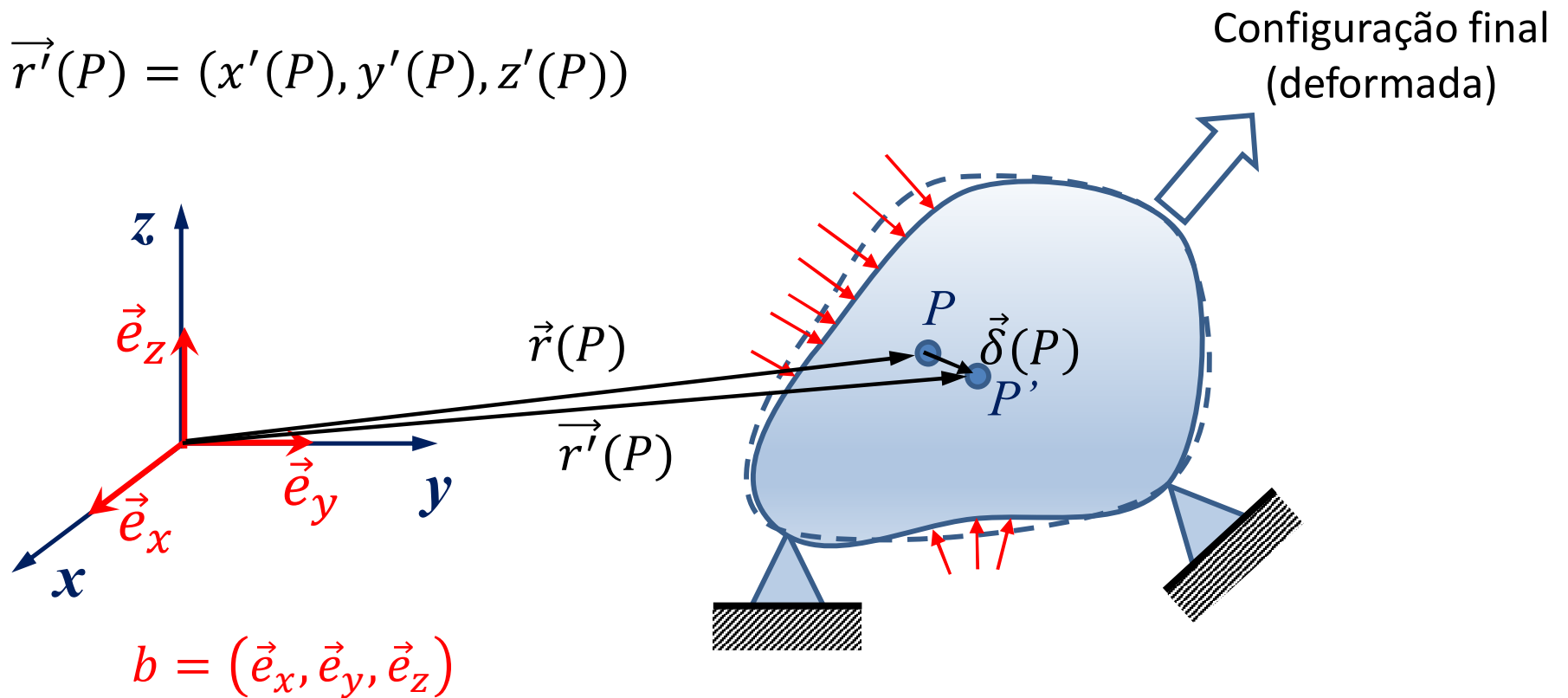




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

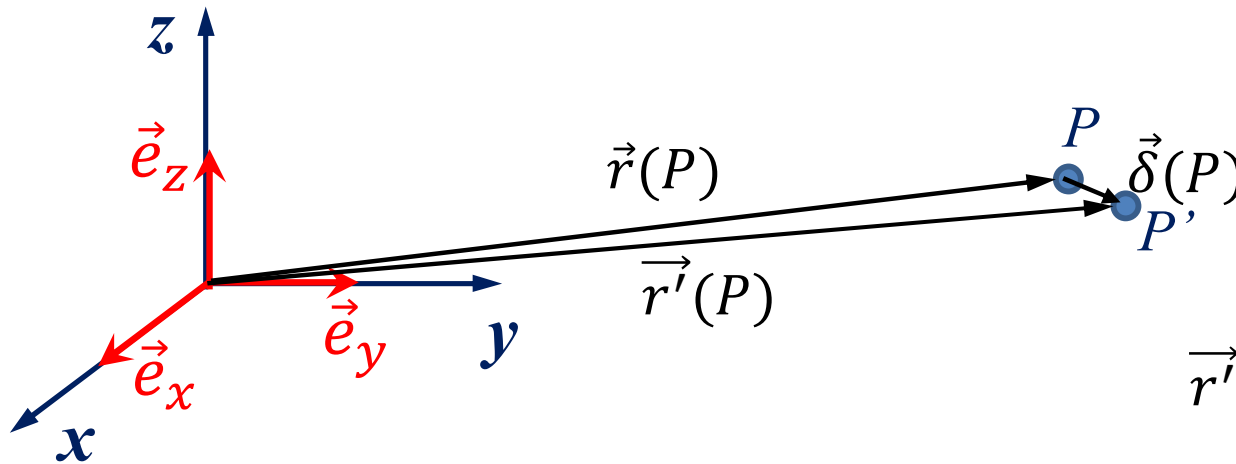
$$\vec{r}(P) = (x(P), y(P), z(P))$$

$$\vec{r}'(P) = (x'(P), y'(P), z'(P))$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\vec{r}'(P) = \vec{r}(P) + \vec{\delta}(P)$$

$$\vec{\delta}(P) = (u(P), v(P), w(P))$$

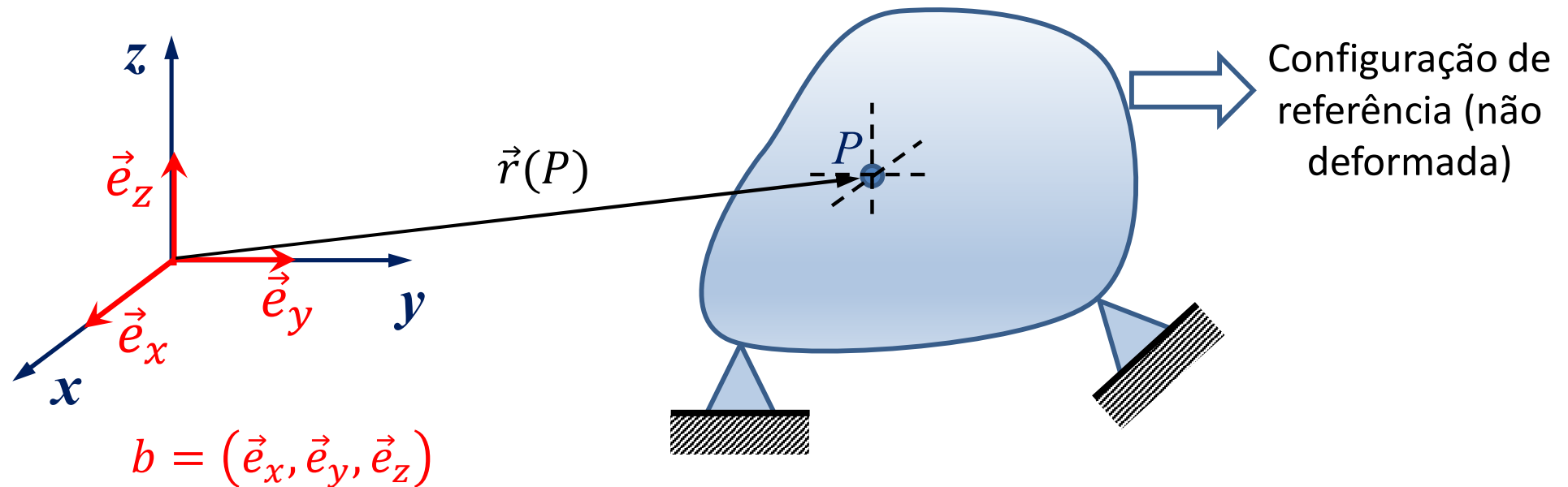
$u = u(P) = u(x(P), y(P), z(P))$ = componente do vetor $\vec{\delta}$ segundo a direção x .

$v = v(P) = v(x(P), y(P), z(P))$ = componente do vetor $\vec{\delta}$ segundo a direção y .

$w = w(P) = w(x(P), y(P), z(P))$ = componente do vetor $\vec{\delta}$ segundo a direção z .



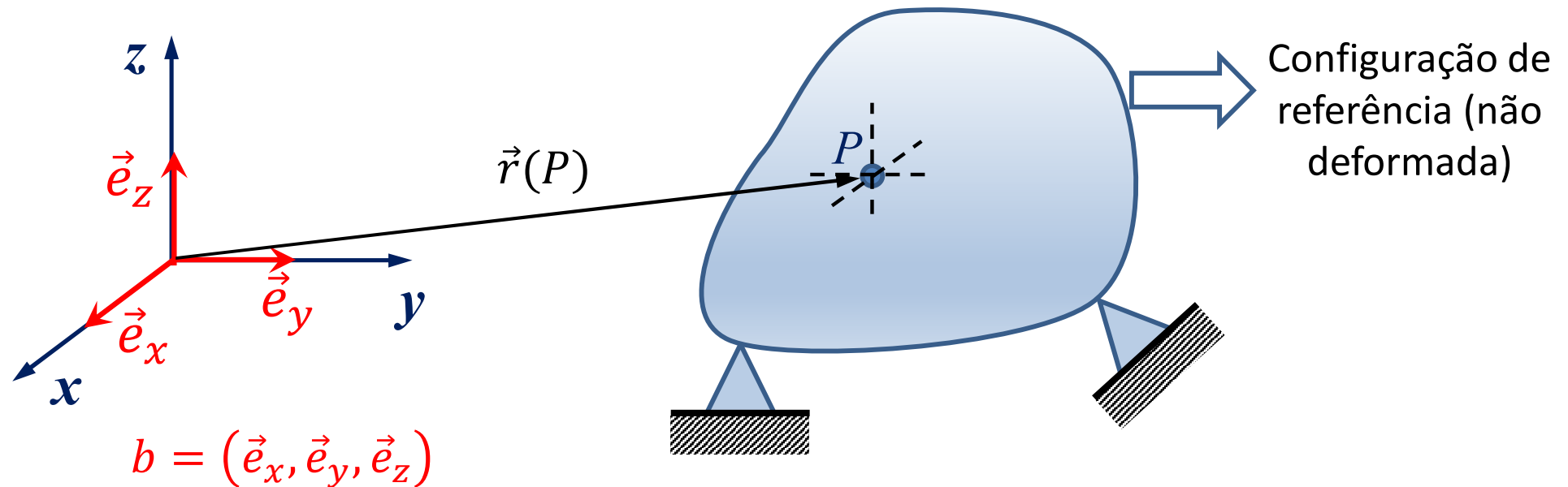
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \rightarrow$ alongamentos das fibras que passam pelo ponto P e que estão alinhadas (na configuração de referência) com as direções de $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, respectivamente.



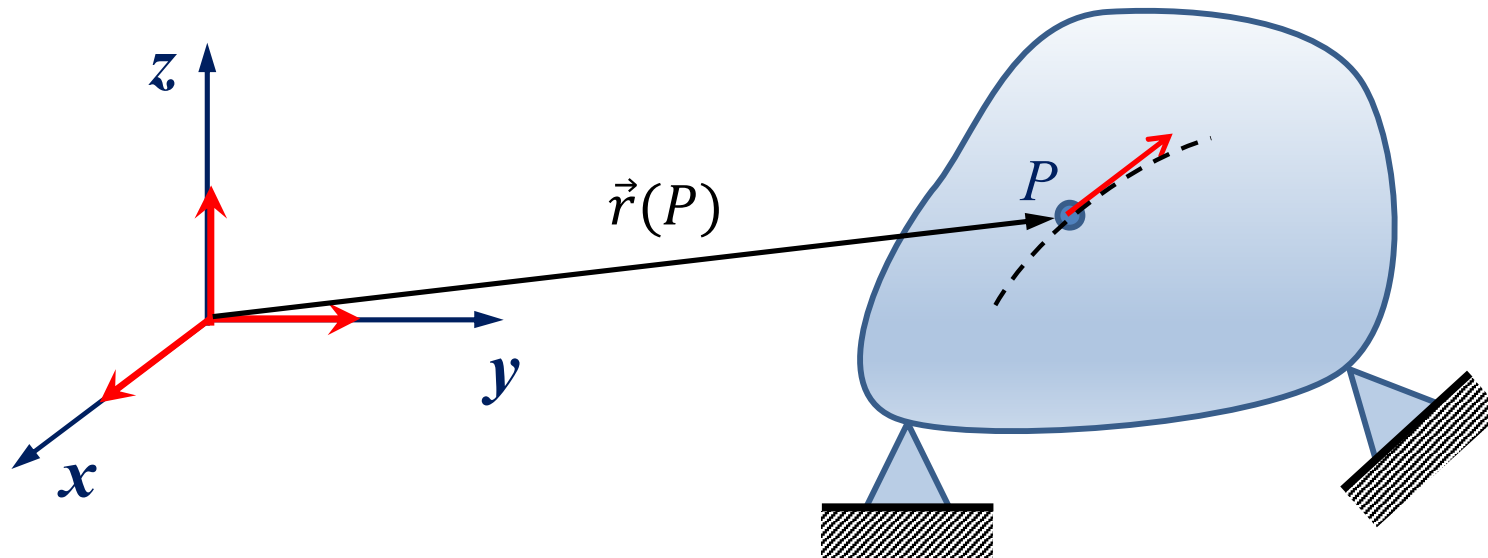
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx} \rightarrow$ distorções entre duas fibras que passam pelo ponto P e que estão alinhadas, na configuração de referência, com as direções de $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, $(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$ e $(\vec{e}_z, \vec{e}_x)$, respectivamente.



2. Família de alongamentos



Sejam:

dl_r = comprimento infinitesimal (na configuração de referência) de uma fibra que passa por um dado ponto P e está orientada segundo uma direção $\vec{n}$;

dl = comprimento (na configuração deformada) da mesma fibra.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Definimos o estiramento da fibra como:

$$\lambda = \frac{dl}{dl_r}$$

E observamos que:

1. λ é um adimensional e sempre será um número real positivo;
2. Se $\lambda > 1$, há um aumento no comprimento da fibra;
3. Se $0 < \lambda < 1$, há uma diminuição no comprimento da fibra;
4. Se $\lambda = 1$, não há qualquer variação no comprimento da fibra.

A partir do estiramento λ é possível definir vários alongamentos relacionados, como:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Alongamento linear:

$$\varepsilon = \frac{dl - dl_r}{dl_r} = \frac{dl}{dl_r} - 1 = \lambda - 1$$

- Alongamento quadrático (ou de Green):

$$\varepsilon_q = \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{(dl)^2 - (dl_r)^2}{(dl_r)^2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dl}{dl_r} \right)^2 - 1 \right] = \frac{\lambda^2 - 1}{2}$$

- Alongamento natural, logarítmico ou de Hencky:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 = \ln \left(\frac{dl}{dl_r} \right) = \ln(\lambda)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Alongamento hiperbólico ou de Reiner:

$$\varepsilon_h = \varepsilon_{-1} = \frac{dl - dl_r}{dl} = 1 - \frac{dl_r}{dl} = 1 - \lambda^{-1}$$

- Alongamento de Almansi:

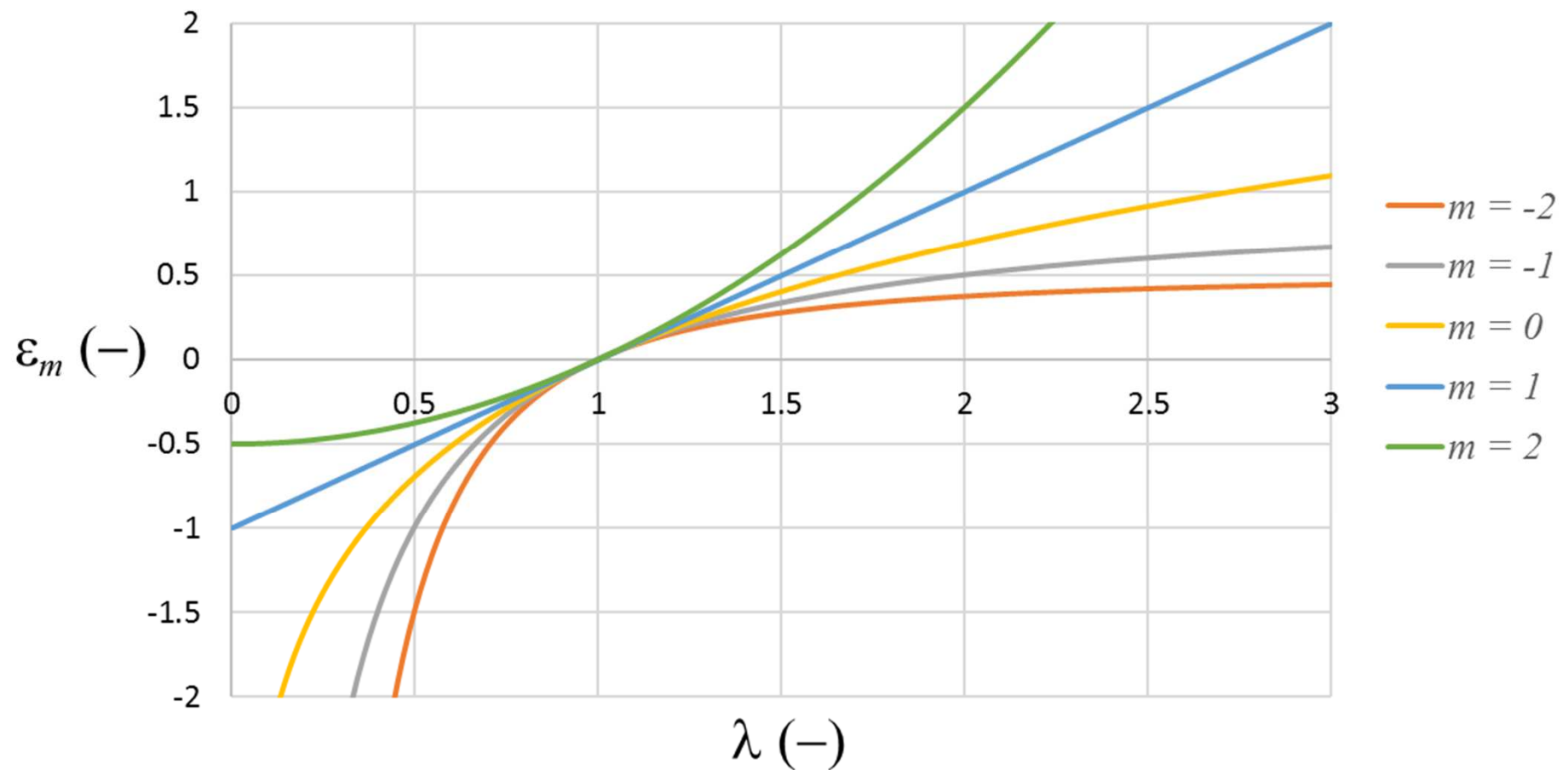
$$\varepsilon_A = \varepsilon_{-2} = \frac{1}{2} \frac{(dl)^2 - (dl_r)^2}{(dl)^2} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{dl_r}{dl} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} [1 - \lambda^{-2}]$$

Todos esses alongamentos pertencem à família de alongamentos dada por:

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{1}{m} (\lambda^m - 1), & \text{se } m \neq 0 \\ \ln(\lambda), & \text{se } m = 0 \end{cases}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

1. Independentemente do alongamento considerado, temos:

$$\lambda > 1 \Leftrightarrow \varepsilon_m > 0$$

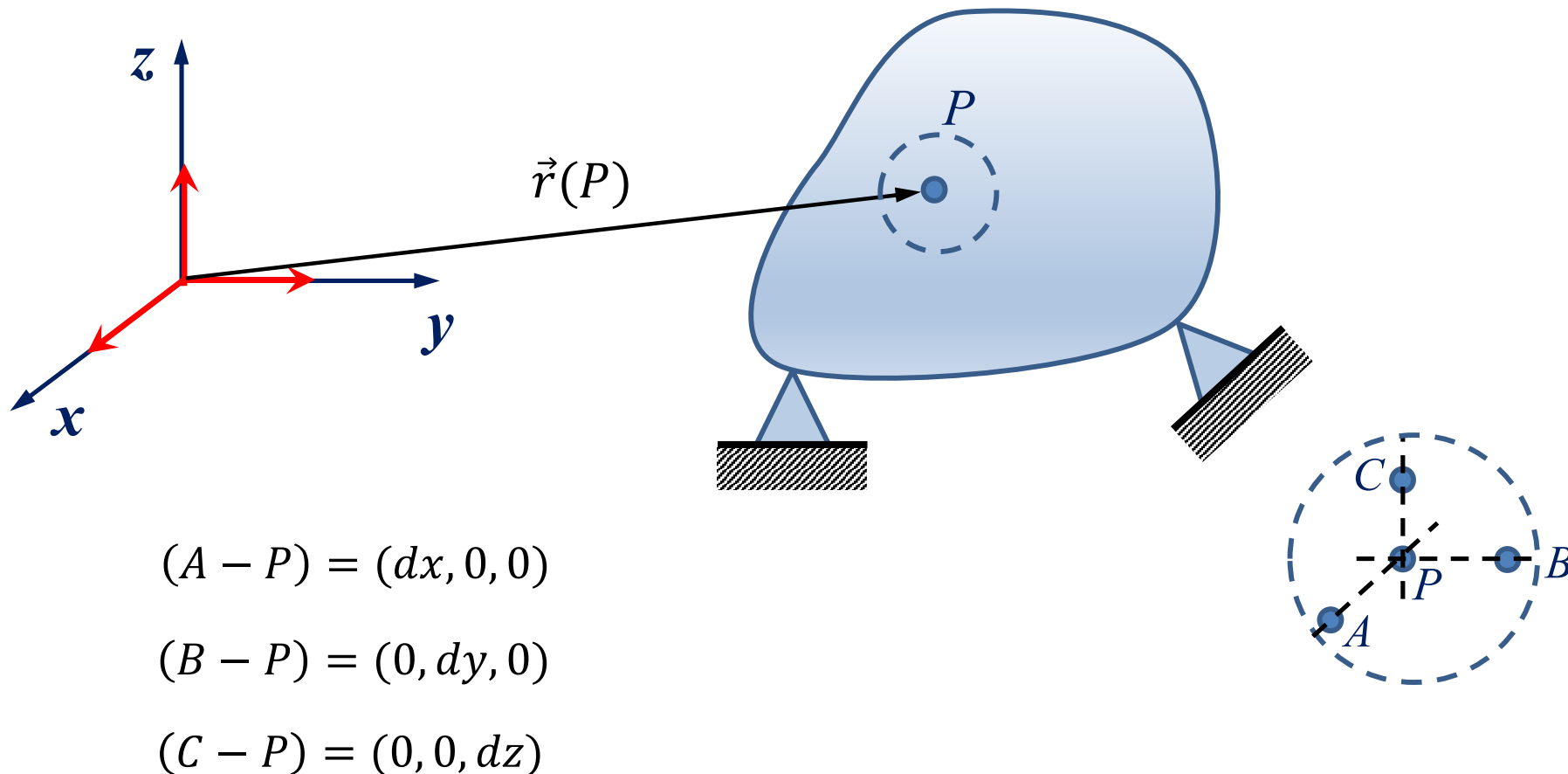
$$\lambda = 1 \Leftrightarrow \varepsilon_m = 0$$

$$0 < \lambda < 1 \Leftrightarrow \varepsilon_m < 0$$

2. É possível mostrar que a família de alongamentos é contínua no parâmetro m (expoente do estiramento);
3. Para $|\varepsilon| < 1\%$ e $|m| \leq 2$, o erro cometido ao aproximarmos o valor do alongamento (associado a $m \neq 1$) com o valor do alongamento linear (associado a $m = 1$) é inferior a 0,5% em valor absoluto. Assim, em condições de L.G., as diferenças entre os valores dos diversos alongamentos é insignificante.



3. Relações deformações-deslocamentos em coordenadas cartesianas





Cálculo dos alongamentos:

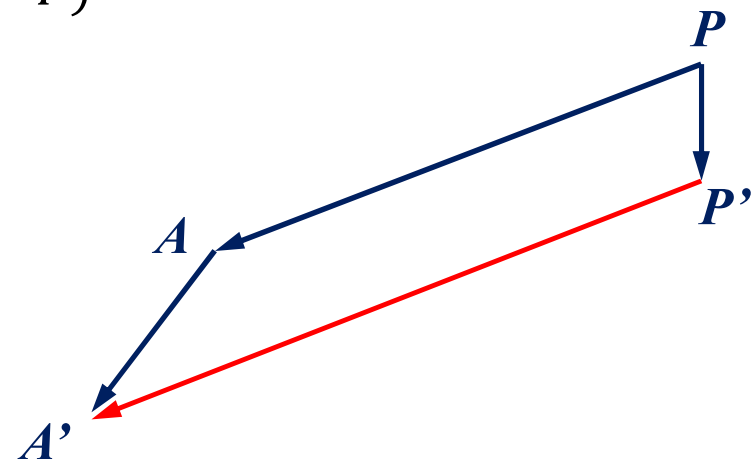
$$\varepsilon_x = \lambda_x - 1 \quad \lambda_x = \frac{dl}{dl_r} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\|A' - P'\|}{\|A - P\|}$$

$$(A - P) = (dx, 0, 0) \Rightarrow \|A - P\| = |dx|$$

$$(A' - P') = (A' - A) + (A - P) - (P' - P)$$

$$(A' - A) = (u_A, v_A, w_A)$$

$$(P' - P) = (u_P, v_P, w_P)$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo:

$$(A' - P') = (u_A - u_P + dx, v_A - v_P, w_A - w_P)$$

$$u_A \cong u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \quad v_A \cong v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \quad w_A \cong w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx$$

$$(A' - P') \cong \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) dx$$

$$\|A' - P'\| \cong \left(\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right)^{1/2} |dx|$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\lambda_x = \frac{dl}{dl_r} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\|A' - P'\|}{\|A - P\|} = \left(\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Logo:

$$\varepsilon_x = \lambda_x - 1 = \left(\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\varepsilon_{x,q} = \frac{1}{2} (\lambda_x^2 - 1) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 1 \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Linearizando as expressões de ε_x e de $\varepsilon_{x,q}$ encontramos:

$$\varepsilon_x \cong \left| 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right| - 1 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{x,q} \cong \frac{\partial u}{\partial x}$$

Assim, em condições de linearidade geométrica, vale:

$$\varepsilon_x \cong \varepsilon_{x,q} \cong \frac{\partial u}{\partial x}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Procedendo de forma análoga com as fibras tomadas nas duas outras direções, encontramos:

Para o alongamento ε_y :

$$\varepsilon_y = \lambda_y - 1 = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\varepsilon_{y,q} = \frac{1}{2} (\lambda_y^2 - 1) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\text{L.G.:} \quad \varepsilon_y \cong \varepsilon_{y,q} \cong \frac{\partial v}{\partial y}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para o alongamento ε_z :

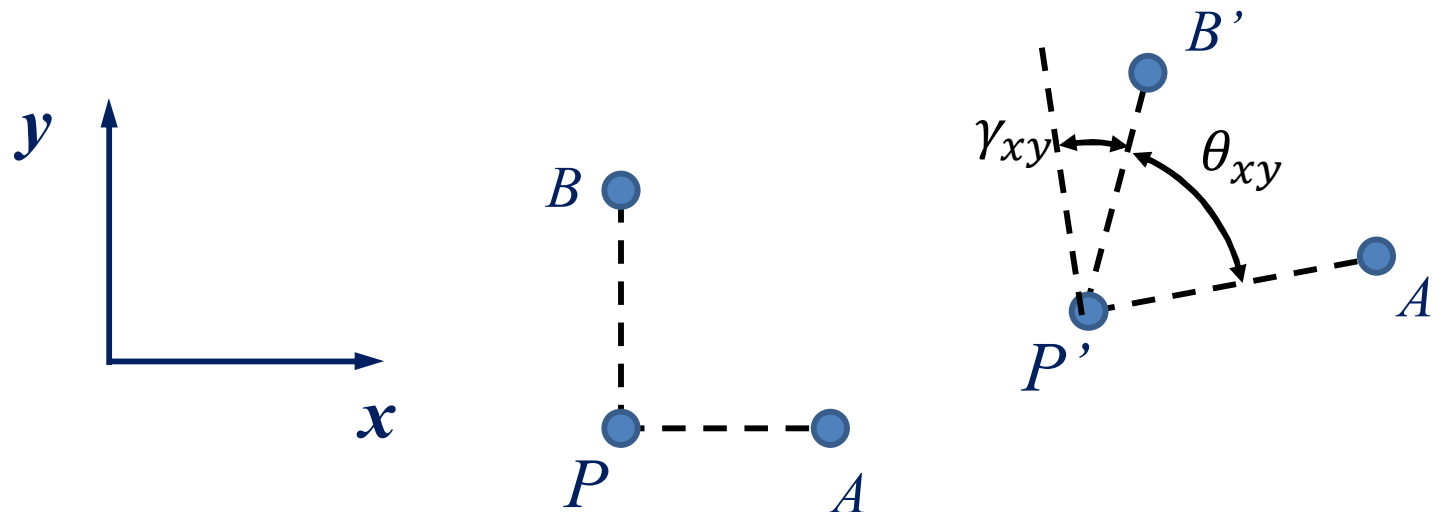
$$\varepsilon_z = \lambda_z - 1 = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\varepsilon_{z,q} = \frac{1}{2} (\lambda_z^2 - 1) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\text{L.G.:} \quad \varepsilon_z \cong \varepsilon_{z,q} \cong \frac{\partial w}{\partial z}$$



Cálculo das distorções:



$$\gamma_{xy} + \theta_{xy} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_{xy} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta_{xy}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right) = \sin(\gamma_{xy})$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\text{sen}(\gamma_{xy}) = \cos(\theta_{xy}) = \left(\frac{A' - P'}{\|A' - P'\|} \right) \cdot \left(\frac{B' - P'}{\|B' - P'\|} \right)$$

$$\lambda_x = \frac{\|A' - P'\|}{\|A - P\|} \Leftrightarrow \|A' - P'\| = \lambda_x |dx| = \lambda_x dx \quad (\text{considerando } dx > 0)$$

$$\lambda_y = \frac{\|B' - P'\|}{\|B - P\|} \Leftrightarrow \|B' - P'\| = \lambda_y |dy| = \lambda_y dy \quad (\text{considerando } dy > 0)$$

$$(A' - P') \cong \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) dx \quad (\text{vide slide \#16})$$

$$(B' - P') \cong \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), 1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) dy \quad (\text{por analogia})$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\left(\frac{A' - P'}{\|A' - P'\|} \right) \cdot \left(\frac{B' - P'}{\|B' - P'\|} \right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_x \cdot \lambda_y} \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \cdot \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), 1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)$$

$$\text{sen}(\gamma_{xy}) = \frac{1}{\lambda_x \cdot \lambda_y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

Linearizando a expressão (admitindo condições de L.G.):

$$\gamma_{xy} \cong \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Procedendo de forma análoga com os pares de fibras tomados nas demais direções, encontramos:

Para a distorção γ_{yz} :

$$\text{sen}(\gamma_{yz}) = \frac{1}{\lambda_y \cdot \lambda_z} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

Linearizando a expressão (admitindo condições de L.G.):

$$\gamma_{yz} \cong \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para a distorção γ_{zx} :

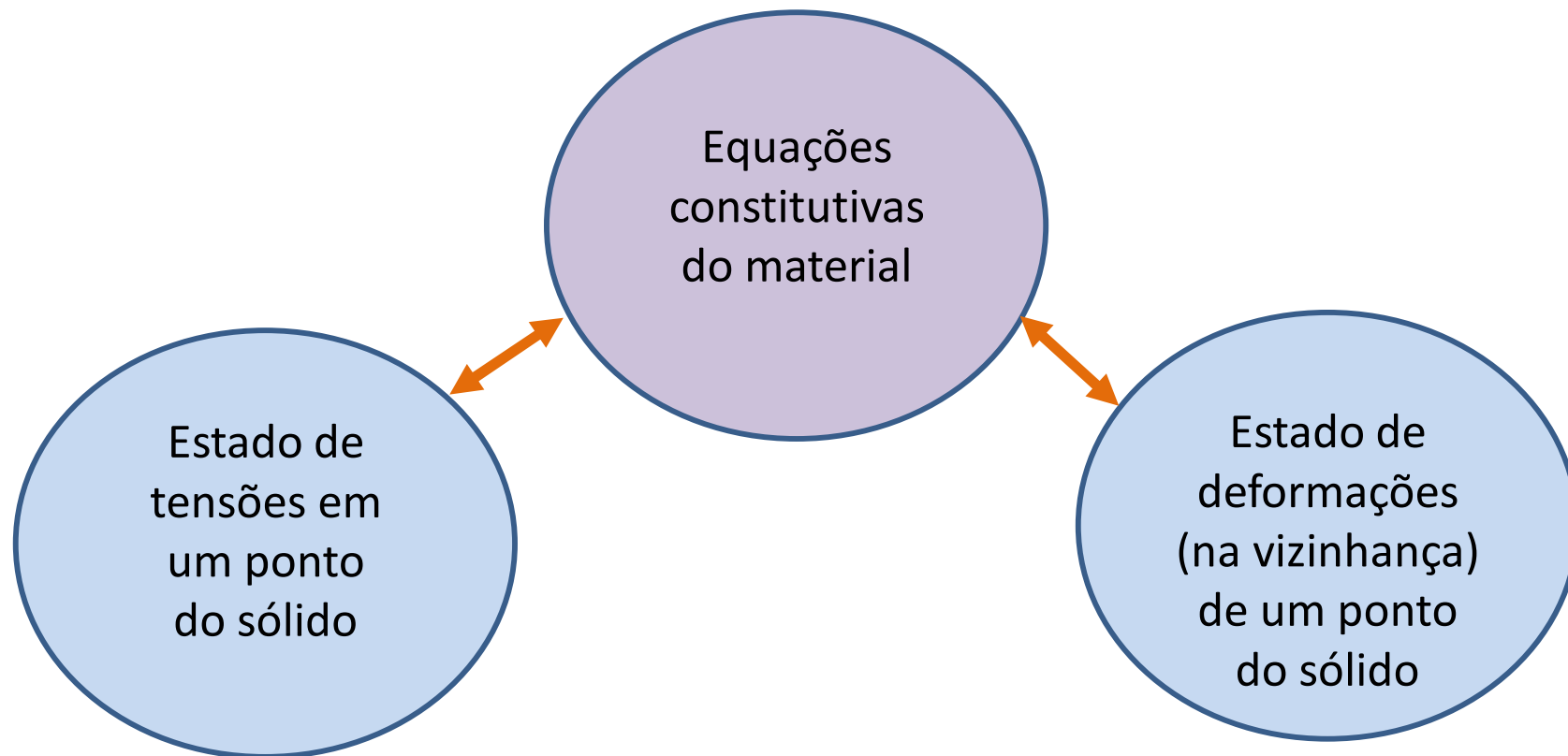
$$\text{sen}(\gamma_{zx}) = \frac{1}{\lambda_z \cdot \lambda_x} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

Linearizando a expressão (admitindo condições de L.G.):

$$\gamma_{zx} \cong \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$



4. Equações constitutivas para materiais com comportamento elástico-linear





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

As equações constitutivas mais simples são as que estabelecem relações lineares entre as componentes de deformação e as componentes de tensão. No caso mais geral, as relações lineares são dadas por:

$$\varepsilon_x = A_{11}\sigma_x + A_{12}\sigma_y + A_{13}\sigma_z + A_{14}\tau_{xy} + A_{15}\tau_{yz} + A_{16}\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_y = A_{21}\sigma_x + A_{22}\sigma_y + A_{23}\sigma_z + A_{24}\tau_{xy} + A_{25}\tau_{yz} + A_{26}\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_z = A_{31}\sigma_x + A_{32}\sigma_y + A_{33}\sigma_z + A_{34}\tau_{xy} + A_{35}\tau_{yz} + A_{36}\tau_{zx}$$

$$\gamma_{xy} = A_{41}\sigma_x + A_{42}\sigma_y + A_{43}\sigma_z + A_{44}\tau_{xy} + A_{45}\tau_{yz} + A_{46}\tau_{zx}$$

$$\gamma_{yz} = A_{51}\sigma_x + A_{52}\sigma_y + A_{53}\sigma_z + A_{54}\tau_{xy} + A_{55}\tau_{yz} + A_{56}\tau_{zx}$$

$$\gamma_{zx} = A_{61}\sigma_x + A_{62}\sigma_y + A_{63}\sigma_z + A_{64}\tau_{xy} + A_{65}\tau_{yz} + A_{66}\tau_{zx}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

A matriz $[A]$ traz um total de 36 constantes elásticas, mas para materiais com comportamento elástico a matriz $[A]$ é simétrica ($A_{ij} = A_{ji}$), o que reduz o total de constantes elásticas para 21 (caso mais geral de anisotropia).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Quando o material possui planos de simetria elástica, há uma redução ainda maior no número de constantes elásticas a serem determinadas, como nos casos a seguir:

Materiais ortótropos:

Os materiais ortótropos possuem três planos de simetria elástica, os quais são perpendiculares entre si. Considerando que estes planos de simetria elástica sejam os planos xy , yz e zx , as equações constitutivas ficam simplificadas para:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Neste caso, são necessárias apenas 9 constantes elásticas independentes para caracterizar o comportamento do material.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Materiais transversalmente isotrópicos:

Neste caso, todo plano paralelo a uma dada direção (que define uma direção principal de elasticidade) também será um plano de simetria elástica. Considerando que o eixo z seja o que define esta direção principal, as equações constitutivas ficam simplificadas na forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Sendo: $A_{11} = A_{22}$, $A_{13} = A_{23}$, $A_{55} = A_{66}$ e $A_{44} = f(A_{11}, A_{12})$

Neste caso, são necessárias apenas 5 constantes elásticas independentes para caracterizar o comportamento do material.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Materiais isotrópicos:

Neste caso, todo plano é um plano de simetria elástica do material e equações constitutivas ficam simplificadas na forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Sendo: $A_{11} = A_{22} = A_{33}$, $A_{12} = A_{13} = A_{23}$, $A_{44} = A_{55} = A_{66}$ e
 $A_{44} = f(A_{11}, A_{12})$

Neste caso, são necessárias apenas 2 constantes elásticas independentes para caracterizar o comportamento do material.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Utilizando a nomenclatura clássica, e considerando que os eixos x, y e z referem-se às direções 1, 2 e 3 (respectivamente), as equações constitutivas para materiais ortótropos ficam:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= +\frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_3 & \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_3 & \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}} \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2 + \frac{\sigma_3}{E_3} & \gamma_{31} &= \frac{\tau_{31}}{G_{31}}\end{aligned}$$

As nove constantes elásticas independentes são:

$$E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{31}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Utilizando a nomenclatura clássica, e considerando que os eixos x, y e z referem-se às direções 1, 2 e 3 (respectivamente), as equações constitutivas para materiais transversalmente isotrópicos (sendo o plano de isotropia o plano xy = 12) ficam:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= +\frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_3 & \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_3 & \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}} \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2 + \frac{\sigma_3}{E_3} & \gamma_{31} &= \frac{\tau_{31}}{G_{31}}\end{aligned}$$

Sendo: $E_1 = E_2$, $G_{23} = G_{31}$, $\nu_{31} = \nu_{32}$ e $G_{12} = E_1/(2(1 + \nu_{12}))$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Utilizando a nomenclatura clássica, as equações constitutivas para materiais isótropos ficam:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= +\frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y + \frac{1}{E}\sigma_z & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}$$

Sendo: $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ou alternativamente:

$$\sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

Sendo:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$



5. Equacionamento para a solução geral de problemas da Teoria da Elasticidade Clássica (TEC)

As seguintes incógnitas fazem parte da solução de um problema da Teoria da Elasticidade Clássica (T.E.C.):

- Campo de tensões: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ (seis funções)
- Campo de deformações: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ (seis funções)
- Campo de deslocamentos: u, v, w (3 funções)

Total: 15 funções incógnitas



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para a determinação da solução do problema são utilizadas:

1) Equações diferenciais de equilíbrio: 3 equações

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2) Relações deslocamentos-deformações: 6 equações

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

3) Equações constitutivas: 6 equações

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Total: 15 equações para 15 funções.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Naturalmente, a solução procurada também deve satisfazer:

- 1) As condições de contorno do problema;
- 2) As condições iniciais do problema.

1) Condições de contorno:

As condições de contorno do problema estabelecem que, para todo instante de tempo t e para todos os pontos situados na fronteira (contorno) do sólido, são conhecidos:

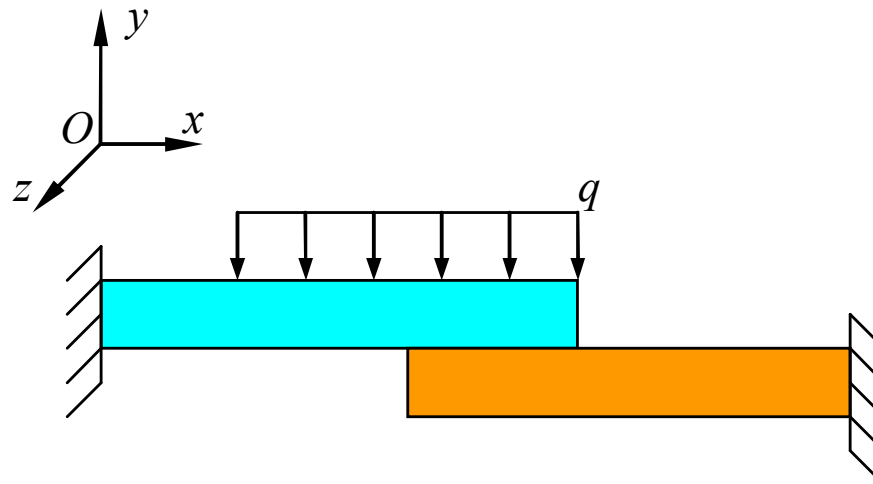
- a) o carregamento aplicado na fronteira (contorno) do sólido ou
- b) os deslocamentos (ou algumas de suas componentes) dos pontos situados na fronteira (contorno) do sólido, ou
- c) alguma relação entre carregamento e deslocamentos na fronteira (contorno) do sólido.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ou seja:

$$\forall t \in [t_o, t_f], \forall P \in \partial\beta \Rightarrow \begin{cases} a) \vec{s}(P, t) = T(P) \cdot \vec{n} \\ \text{ou} \\ b) u_i(P, t) = \bar{u}_i(P, t) \\ \text{ou} \\ c) f(\vec{s}(P, t), \vec{u}(P, t)) = \vec{0} \end{cases}$$





2) Condições iniciais:

As condições iniciais do problema estabelecem que no instante inicial ($t = t_0$) sejam conhecidos o vetor posição e o vetor velocidade de todos os pontos do sólido.

$$t = t_0, \quad \forall P \in \beta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a) \vec{r}(P, t_0) = \vec{r}(P, t_0) \\ e \\ b) \left. \frac{\partial \vec{r}(P, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\partial \vec{r}(P, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

[1] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1970.