



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #08

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

29/08/2025



Idealização Estrutural [1-20]

1. Fundamentos da idealização estrutural [1-20.1]
2. Idealização de um painel [1-20.2]
3. Exemplo de aplicação
4. Efeito da idealização na análise de vigas sob flexão pura [1-20.3.1]
5. Efeito da idealização nos fluxos de cisalhamento de vigas com seções transversais abertas [1-20.3.2]
6. Exemplo de aplicação



1. Fundamentos da idealização estrutural [1-20.1]

Estruturas com seções transversais complexas podem ser idealizadas utilizando modelos geométricos simplificados cujo comportamento mecânico é muito próximo da estrutura real (sem as simplificações), para determinadas condições de carregamento. Veremos, contudo, que diferentes modelos da mesma estrutura são necessários para simular o comportamento estrutural conforme alteramos o carregamento aplicado.

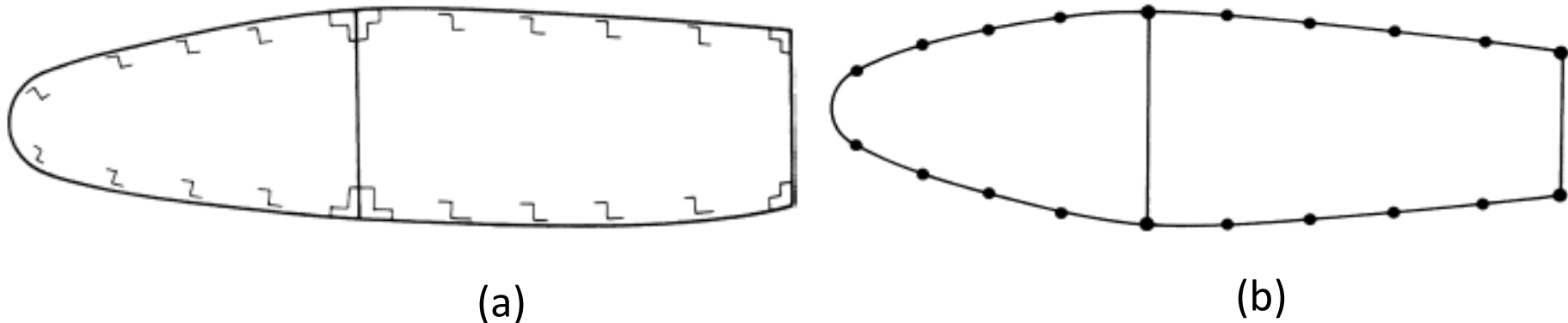


Fig.1. Seção transversal real (a) e seção transversal idealizada (b).



2. Idealização de um painel [1-20.2]

Como exemplo inicial, consideremos a idealização de um simples painel submetido a tensões normais, como indicado na Fig.20.3(a), em uma estrutura simplificada composta por duas áreas concentradas (*direct stress carrying booms*), B_1 e B_2 , dispostas nas extremidades do painel e que devem suportar as mesmas tensões indicadas nas extremidades e os mesmos esforços solicitantes que agem no painel (mesma força normal e mesmo momento fletor). Note que, na Fig.20.3(a), a espessura efetiva do painel (*direct stress carrying thickness*) é $t_D = t$, ao passo que, na estrutura idealizada (Fig.20.3(b)), ela passa a ser $t_D = 0$. Consideremos também que a distribuição de tensões normais seja linear.

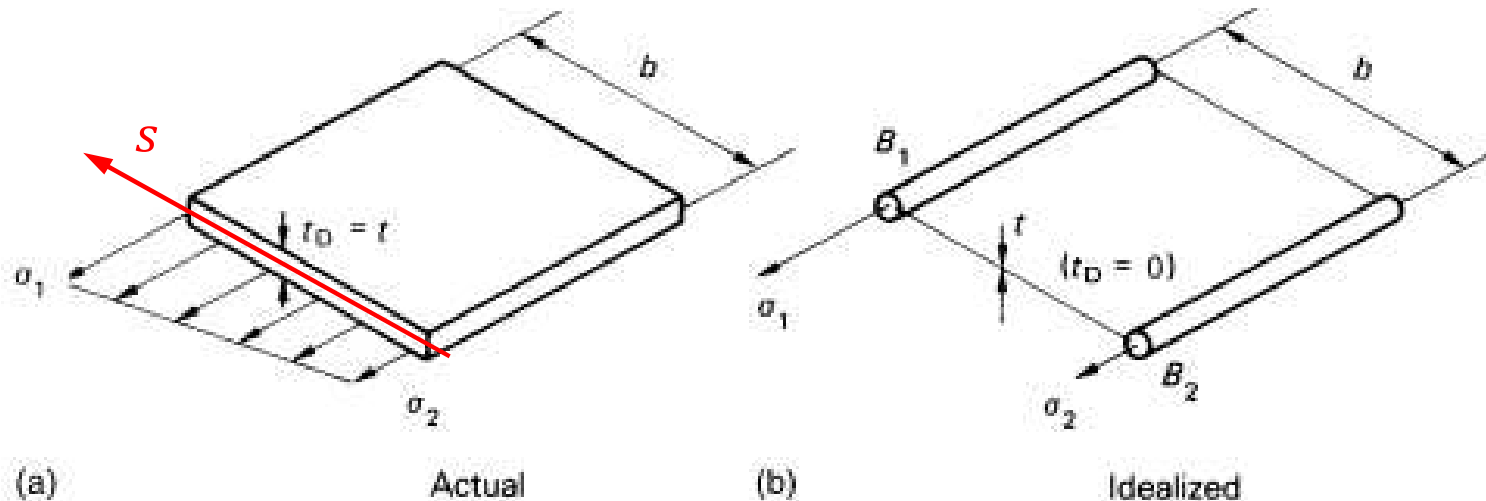


FIGURE 20.3 Idealization of a Panel



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tomando os momentos das forças distribuídas em relação ao eixo longitudinal que passa pela extremidade direita dos painéis (real e idealizado), teremos:

$$\int_0^b \left[\sigma_2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{b} \right) s \right] \cdot s \cdot t ds = (\sigma_1 B_1) b$$

$$\frac{\sigma_2 t b^2}{2} + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{3} \right) t b^2 = (\sigma_1 B_1) b$$

$$B_1 = \frac{\sigma_2 t b}{2 \sigma_1} + \frac{t b}{3} \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \Leftrightarrow B_1 = \frac{t b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \quad (20.1)$$

De modo análogo, tomando os momentos das forças distribuídas em relação ao eixo longitudinal que passa pela extremidade esquerda dos painéis (real e idealizado), virá:

$$\int_0^b \left[\sigma_2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{b} \right) s \right] (b - s) t ds = (\sigma_2 B_2) b \Leftrightarrow B_2 = \frac{t b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \quad (20.2)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Verifica-se facilmente que os valores de B_1 e de B_2 dados pelas equações (20.1) e (20.2) levam à mesma resultante que a distribuição linear de tensões permite determinar. De fato, pela distribuição de tensões linear no painel real:

$$N = \int_0^b \left[\sigma_2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{b} \right) s \right] t ds = \frac{bt}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

E, pela distribuição de tensões no painel idealizado:

$$N = B_1 \sigma_1 + B_2 \sigma_2 = \frac{tb}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \sigma_1 + \frac{tb}{6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \sigma_2 = \frac{bt}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

Verifica-se ainda que a distribuição de tensões indicada na Fig.20.3(a) é uma combinação de um carregamento associado a uma força normal e um momento fletor. No caso de um carregamento associado apenas a uma força normal, teremos $\sigma_1/\sigma_2 = 1$ (distribuição uniforme de tensões no painel), levando a:

$$B_1 = B_2 = \frac{tb}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Já para o caso de uma distribuição de tensões associada à flexão pura (ou seja, com uma resultante normal nula), teremos: $\sigma_1/\sigma_2 = -1$, levando a:

$$B_1 = B_2 = \frac{tb}{6}$$

Estes exemplos mostram que diferentes carregamentos levam a diferentes idealizações do painel. E, naturalmente, diferentes idealizações são necessárias para diferentes condições de carregamento.

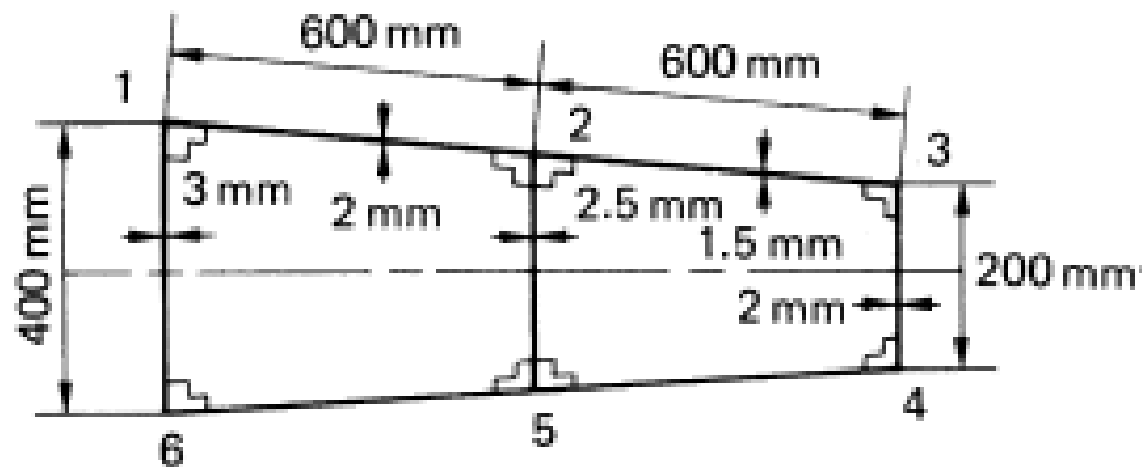
A idealização depende, é claro, da relação entre as tensões σ_1 e σ_2 que, se não forem totalmente conhecidas, podem ser ao menos estimadas em uma aproximação inicial, levando a um processo iterativo com rápida convergência.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3. Exemplo de aplicação

Parte da seção de uma asa possui a forma de um caixão com duas células fechadas como mostra a figura abaixo, onde as longarinas verticais (*vertical spars*) são conectadas ao revestimento inferior e superior da asa por meio de enrijecedores (cantoneiras) com área de seção transversal $A_r = 300 \text{ mm}^2$. Apresente uma seção idealizada formada por áreas concentradas (*direct stress carrying booms*) e por painéis que transportam apenas o fluxo de cisalhamento (*shear stress only carrying panels*) e que seja adequada para representar o comportamento estrutural da seção quando atuam sobre ela apenas momentos fletores no plano vertical. Posicione as áreas (*booms*) nas junções entre as longarinas e o revestimento (*spar/skin junctions*).



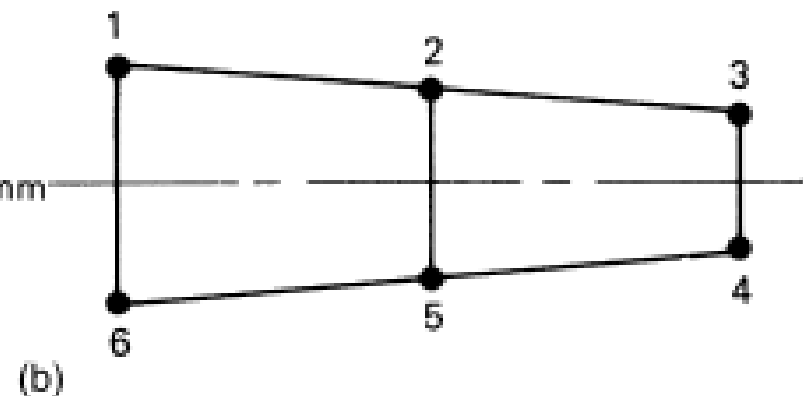
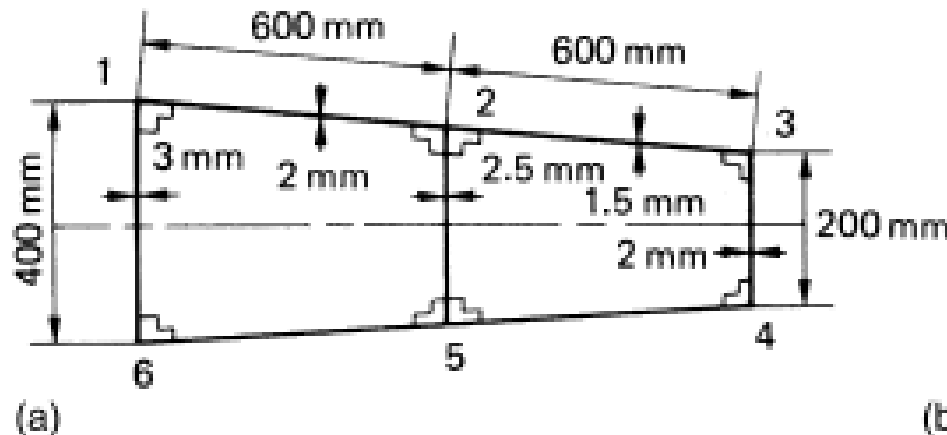


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

A seção idealizada está mostrada na Figura (b), onde, por simetria, temos $B_1 = B_6, B_2 = B_5$ e $B_3 = B_4$. Uma vez que a seção será submetida a momentos fletores que atuam apenas no plano vertical, as tensões decorrentes da flexão na asa serão diretamente proporcionais à distância do ponto (onde a tensão está sendo determinada) à linha neutra (que é o eixo de simetria horizontal, neste caso). Além disso, a distribuição de tensões em todos os painéis é linear de modo que a Eq.(20.1) e a Eq.(20.2) são válidas. Notamos, por fim, que, além das contribuições das chapas colaborantes, as áreas idealizadas devem incluir as áreas dos reforçadores (*spar flanges*). Assim:

$$B_1 = 300 + \frac{3.0 \times 400}{6} \left(2 + \frac{\sigma_6}{\sigma_1} \right) + \frac{2.0 \times 600}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ou seja:

$$B_1 = 300 + \frac{3.0 \times 400}{6}(2 - 1) + \frac{2.0 \times 600}{6} \left(2 + \frac{150}{200} \right)$$

$$B_1 (= B_6) = 1,050 \text{ mm}^2$$

De forma análoga:

$$B_2 = 2 \times 300 + \frac{2.0 \times 600}{6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + \frac{2.5 \times 300}{6} \left(2 + \frac{\sigma_5}{\sigma_2} \right) + \frac{1.5 \times 600}{6} \left(2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \right)$$

$$B_2 = 2 \times 300 + \frac{2.0 \times 600}{6} \left(2 + \frac{200}{150} \right) + \frac{2.5 \times 300}{6} (2 - 1) + \frac{1.5 \times 600}{6} \left(2 + \frac{100}{150} \right)$$

$$B_2 (= B_5) = 1,791.7 \text{ mm}^2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E, finalmente:

$$B_3 = 300 + \frac{1.5 \times 600}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right) + \frac{2.0 \times 200}{6} \left(2 + \frac{\sigma_4}{\sigma_3} \right)$$

$$B_3 = 300 + \frac{1.5 \times 600}{6} \left(2 + \frac{150}{100} \right) + \frac{2.0 \times 200}{6} (2 - 1)$$

$$B_3 (= B_4) = 891.7 \text{ mm}^2$$



4. Efeito da idealização na análise de vigas sob flexão pura [1-20.3.1]

A análise apresentada nas seções 16.1 e 16.2 do livro-texto é plenamente válida e a distribuição de tensões na seção transversal é dada de forma geral pela equação (16.17) reproduzida abaixo:

$$\sigma_x = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y \quad (16.17)$$

É oportuno observar que, nesta equação, as coordenadas (x, y) do ponto onde estamos determinando a tensão normal (devida aos momentos fletores M_x e M_y) se referem a eixos cuja origem é o centroide da seção que está efetivamente suportando as tensões (*direct stress carrying area*). E, portanto, as propriedades seccionais presentes na Eq.(16.17) devem ser calculadas com base nesta área (*direct stress carrying area*) e calculadas em relação aos eixos que passam pelo centroide da área.

No caso em que a seção foi idealizada por áreas concentradas (*direct stress carrying booms*) e por painéis onde há apenas o fluxo de cisalhamento (para levar em conta as forças transversais), a distribuição de tensões normais consiste apenas em um número finito de tensões aplicadas nas áreas concentradas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo 20.2:

A figura 20.5 ilustra a seção de uma “fuselagem” que foi idealizada por meio de uma combinação de áreas concentradas que suportarão as tensões normais (direct stress carrying booms). Considerando que sobre a seção atue apenas um momento fletor de magnitude 100 kN.m que atua no plano vertical da seção (plano de simetria), determine as tensões normais em cada elemento.

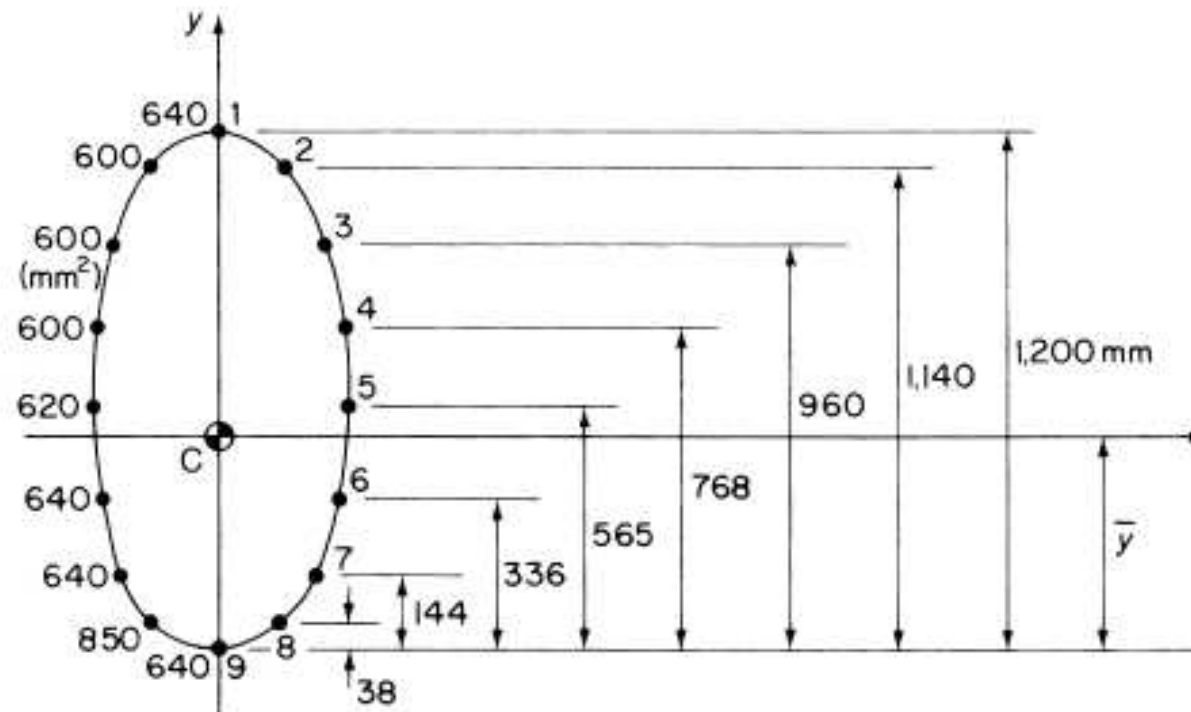


FIGURE 20.5 Idealized fuselage Section of **Example 20.2**



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Como o eixo vertical (eixo y) é um plano de simetria da seção, então $I_{xy} = 0$. E como apenas o momento fletor M_x atua sobre a seção, a Eq.(16.17) se reduz a:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} y \quad \text{Eq.(i)}$$

A origem do sistema de eixos Cxy deve ser o centroide da área (leia-se: *the direct stress carrying area*) que, neste caso, é o centroide das áreas concentradas. Assim, tomando os momentos das áreas em relação ao eixo horizontal que passa pela área B_9 , teremos:

$$\begin{aligned} & (6 \times 640 + 6 \times 600 + 2 \times 620 + 2 \times 850) \bar{y} \\ &= 640 \times 1,200 + 2 \times 600 \times 1140 + 2 \times 600 \times 960 + 2 \times 600 \times 768 \\ &+ 2 \times 620 \times 565 + 2 \times 640 \times 336 + 2 \times 640 \times 144 + 2 \times 850 \times 38 \end{aligned}$$

O que fornece:

$$\bar{y} = 540 \text{ mm}$$

O restante da solução é apresentado na Tabela 20.1 a seguir.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Table 20.1 Example 20.2

① Boom	② y (mm)	③ B (mm ²)	④ $\Delta I_{xx} = By^2$ (mm ⁴)	⑤ σ_z (N/mm ²)
1	+660	640	278×10^6	35.6
2	+600	600	216×10^6	32.3
3	+420	600	106×10^6	22.6
4	+228	600	31×10^6	12.3
5	+25	620	0.4×10^6	1.3
6	-204	640	27×10^6	-11.0
7	-396	640	100×10^6	-21.4
8	-502	850	214×10^6	-27.0
9	-540	640	187×10^6	-29.0

Da coluna 4, resulta: $I_{xx} = 1854 \times 10^6 \text{ mm}^4$

E as tensões indicadas em cada elemento são obtidas com o emprego da Eq.(i) apresentada no slide anterior (lembrando que as distâncias y devem ser tomadas a partir dos eixos que passam pelo centroide).



5. Efeito da idealização nos fluxos de cisalhamento de vigas com seções transversais abertas [1-20.3.2]

The derivation of Eq. (17.14) for the shear flow distribution in the cross-section of an open section beam is based on the equilibrium equation (17.2). The thickness t in this equation refers to the direct stress carrying thickness t_D of the skin. Equation (17.14) may therefore be rewritten

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t_D x \, ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t_D y \, ds \quad (20.3)$$

in which $t_D = t$ if the skin is fully effective in carrying direct stress or $t_D = 0$ if the skin is assumed to carry only shear stresses. Again, the section properties in Eq. (20.3) refer to the direct stress carrying area of the section, since they are those which feature in Eqs. (16.17) and (16.18),

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (17.2)$$

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t x \, ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y \, ds \quad (17.14)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Equation (20.3) makes no provision for the effects of booms which cause discontinuities in the skin and therefore interrupt the shear flow. Consider the equilibrium of the r th boom in the elemental length of beam shown in Fig. 20.6(a), which carries shear loads S_x and S_y acting through its shear center S . These shear loads produce direct stresses due to bending in the booms and skin and shear stresses in the skin. Suppose that the shear flows in the skin adjacent to the r th boom of cross-sectional area B_r are q_1 and q_2 . Then, from Fig. 20.6(b),

$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta z \right) B_r - \sigma_z B_r + q_2 \delta z - q_1 \delta z = 0$$

which simplifies to

$$q_2 - q_1 = - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} B_r \quad (20.4)$$

Substituting for σ_z in Eq. (20.4) from (16.17), we have

$$q_2 - q_1 = - \left[\frac{(\partial M_y / \partial z) I_{xx} - (\partial M_x / \partial z) I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right] B_r x_r - \left[\frac{(\partial M_x / \partial z) I_{yy} - (\partial M_y / \partial z) I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right] B_r y_r$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

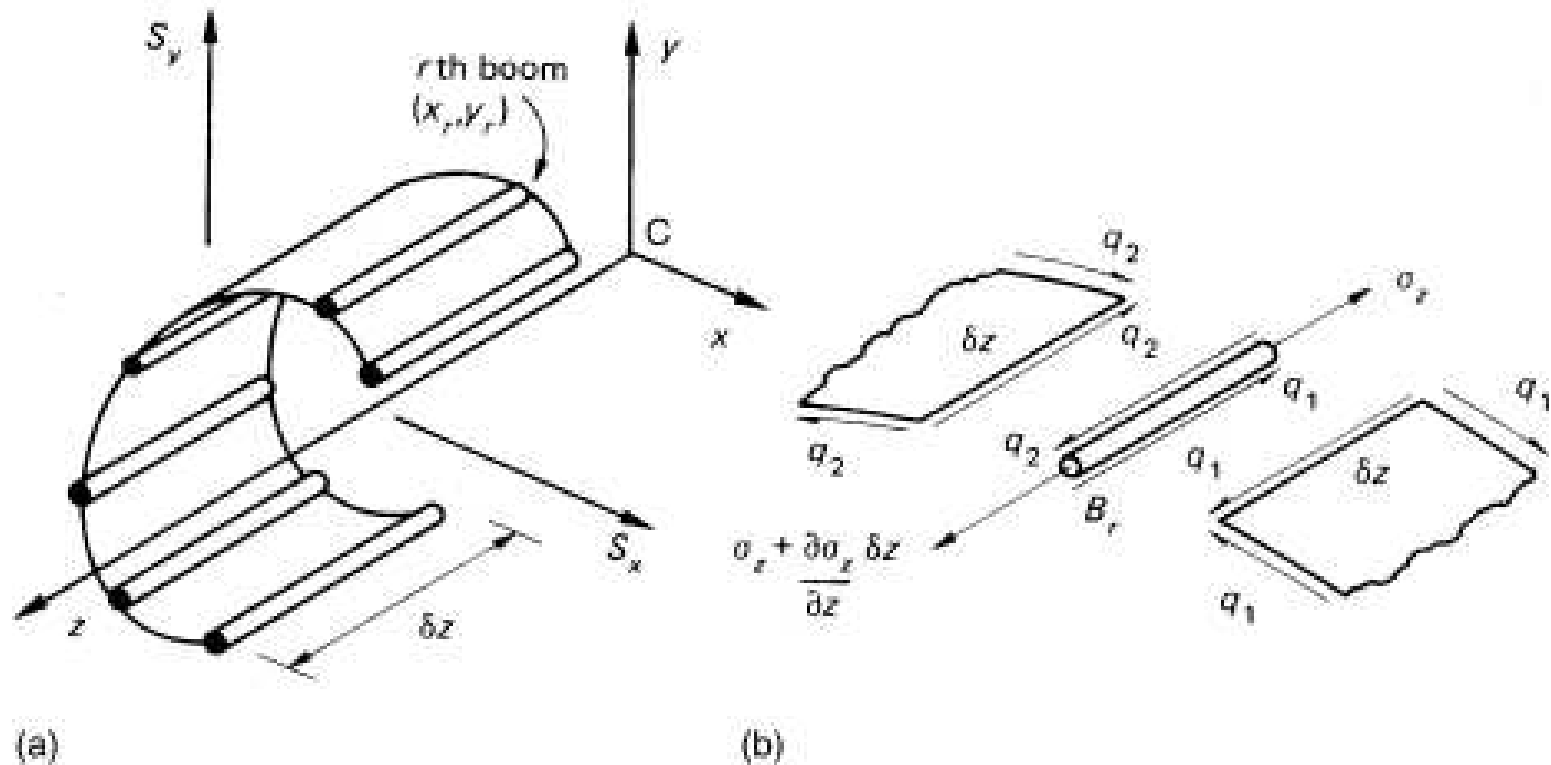


FIGURE 20.6 (a) Elemental Length of Shear Loaded Open Section Beam with Booms; (b) Equilibrium of Boom Element



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

or, using the relationships of Eqs. (16.22) and (16.23),

$$q_2 - q_1 = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) B_r x_r - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) B_r y_r \quad (20.5)$$

Equation (20.5) gives the change in shear flow induced by a boom which itself is subjected to a direct load $(\sigma_r B_r)$. Each time a boom is encountered, the shear flow is incremented by this amount, so that if, at any distance s around the profile of the section, n booms have been passed, the shear flow at the point is given by

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D x \, ds + \sum_{r=1}^n B_r x_r \right) - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D y \, ds + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right) \quad (20.6)$$



6. Exemplo de aplicação

Exemplo 20.3:

Determine os fluxos de cisalhamento na seção transversal apresentada na Fig. 20.7 em virtude de uma força transversal $S_y = 4.8 \text{ kN}$ que age sobre o centro de cisalhamento. Considere que as paredes da viga são responsáveis apenas pela transmissão das tensões de cisalhamento, ao passo que as áreas concentradas (nos pontos 1, 2, 3 e 4), cada qual com 300 mm^2 , suportam as tensões normais devidas à flexão.

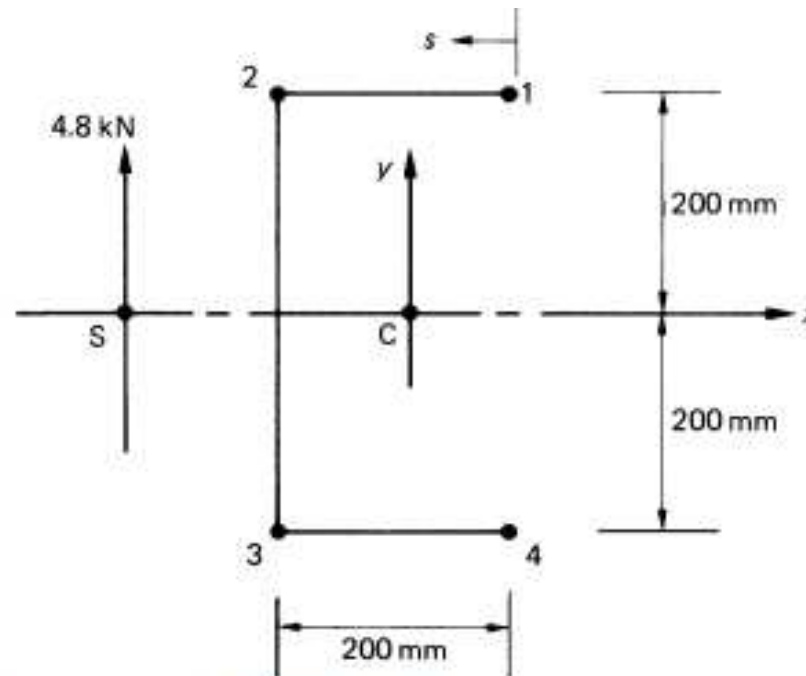


FIGURE 20.7 Idealized Channel Section of **Example 20.3**



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Observamos que a espessura efetiva das paredes para o modelo idealizado (onde apenas as áreas concentradas é que suportam as tensões normais decorrentes da flexão) passa a ser $t_D = 0$ e o centroide desta seção idealizada é facilmente obtido (vide figura no slide anterior). Neste caso (da seção idealizada), tanto o eixo horizontal Cx quanto o eixo vertical Cy (que passam pelo centroide da seção idealizada) são eixos de simetria, o que leva a $I_{xy} = 0$. Além disso, como temos $S_x = 0$, a Eq.(20.6) se reduz a:

$$q_s = -\frac{S_y}{I_{xx}} \sum_{r=1}^n B_r y_r$$

Onde: $I_{xx} = 4 \times 300\text{mm}^2 \times (200\text{mm})^2 = 48 \times 10^6 \text{mm}^4$

Substituindo os valores de $S_y = 4800 \text{ N}$ e de I_{xx} teremos:

$$q_s = -\frac{4.8 \times 10^3}{48 \times 10^6} \sum_{r=1}^n B_r y_r = -10^{-4} \sum_{r=1}^n B_r y_r \quad (\text{ii})$$

At the outside of boom 1, $q_s = 0$. As boom 1 is crossed, the shear flow changes by an amount given by

$$\Delta q_1 = -10^{-4} \times 300 \times 200 = -6 \text{ N/mm}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Hence, $q_{12} = -6 \text{ N/mm}$, since, from Eq. (i), it can be seen that no further changes in shear flow occur until the next boom (2) is crossed. Hence,

$$q_{23} = -6 - 10^{-4} \times 300 \times 200 = -12 \text{ N/mm}$$

Similarly,

$$q_{34} = -12 - 10^{-4} \times 300 \times (-200) = -6 \text{ N/mm}$$

while, finally, at the outside of boom 4, the shear flow is

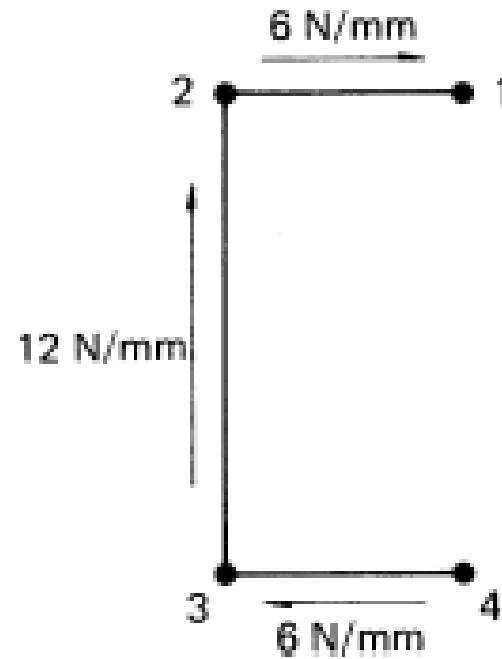
$$-6 - 10^{-4} \times 300 \times (-200) = 0$$

as expected. The complete shear flow distribution is shown in Fig. 20.8.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



(Fluxo de cisalhamento na seção idealizada do exemplo 20.3)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Megson, T. H. G. *Aircraft Structures for Engineering Students*. 6th ed., Butterworth-Heinemann, 2016. Cap. 20: Structural Idealization
- 20.1 – Principles (p.605-606)
 - 20.2 – Idealization of a panel (p.606-608)
 - 20.3 – Effect of idealization on the analysis of open and closed section beams (p.608-620)
 - 20.3.1 – Bending of open and closed section beams (p.609-610)
 - 20.3.2 – Shear of open section beams (p.610-616)
 - Problems (p.623-627)