



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #07

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

28/08/2025

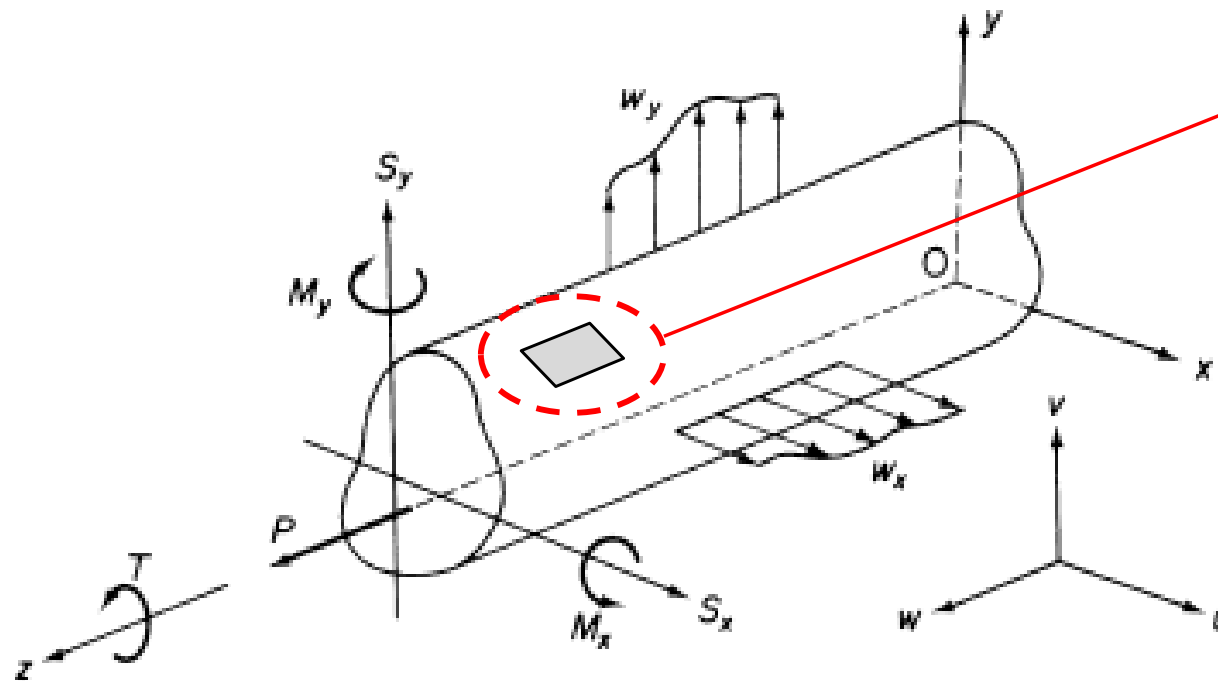


Torção de vigas de parede fina

1. Relações úteis (tensões-deformações-deslocamentos) para vigas de parede fina [1-17.1]
2. Ângulo de giro e empenamento de vigas de parede fina com ST fechada sob carregamentos transversais [1-17.3.1]
3. Torção de vigas de parede fina (seção unicelular) [1-18.1]
4. Torção de vigas de parede fina (multicelulares) [1-23.3]
5. Exemplo de aplicação



1. Relações úteis (tensões-deformações-deslocamentos) para vigas de parede fina [1-17.1]

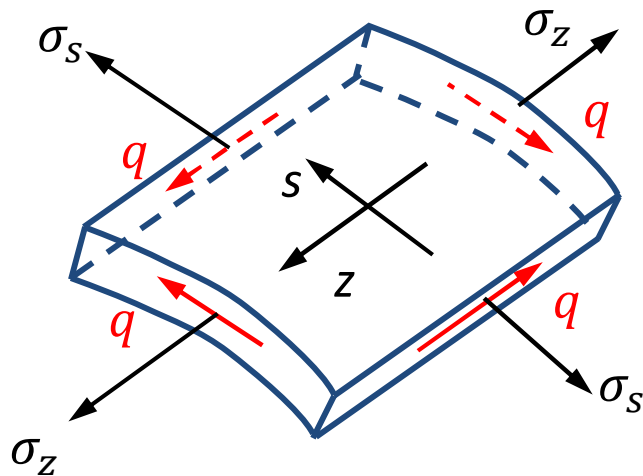


Elemento infinitesimal a ser analisado, com dois lados paralelos ao eixo central C_z (distantes ds entre si) e dois lados paralelos a seções transversais adjacentes (distantes dz entre si).

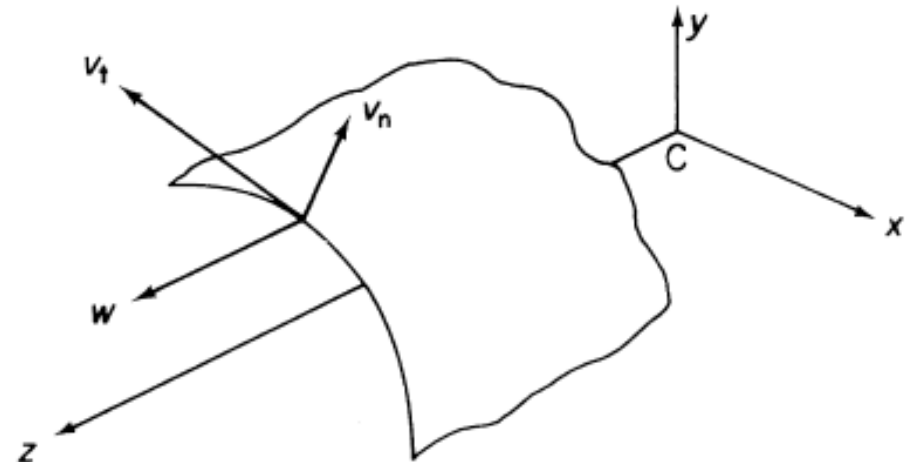


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tensões de membrana em um determinado ponto da viga (com coordenadas z e s fixas):



Componentes de deslocamento em um determinado ponto da viga (com coordenadas z e s fixas):



v_n = deslocamento na direção do versor normal;
 v_t = deslocamento na direção do versor tangente;
 w = deslocamento na direção axial.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Denotaremos (de forma análoga ao que veremos em breve nos problemas de EPT):

ε_z = deformação das fibras que possuem a direção da coordenada axial (z);

ε_s = deformação das fibras que possuem a direção da coordenada curvilínea (s),
ou seja, direção tangente ao contorno da seção;

$\gamma_{sz} = \gamma_{zs} = \gamma$ = distorção entre duas fibras (inicialmente ortogonais entre si),
tendo uma a direção da coordenada curvilínea (s), e a outra a direção axial (z).

Relações deformações-deslocamentos:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

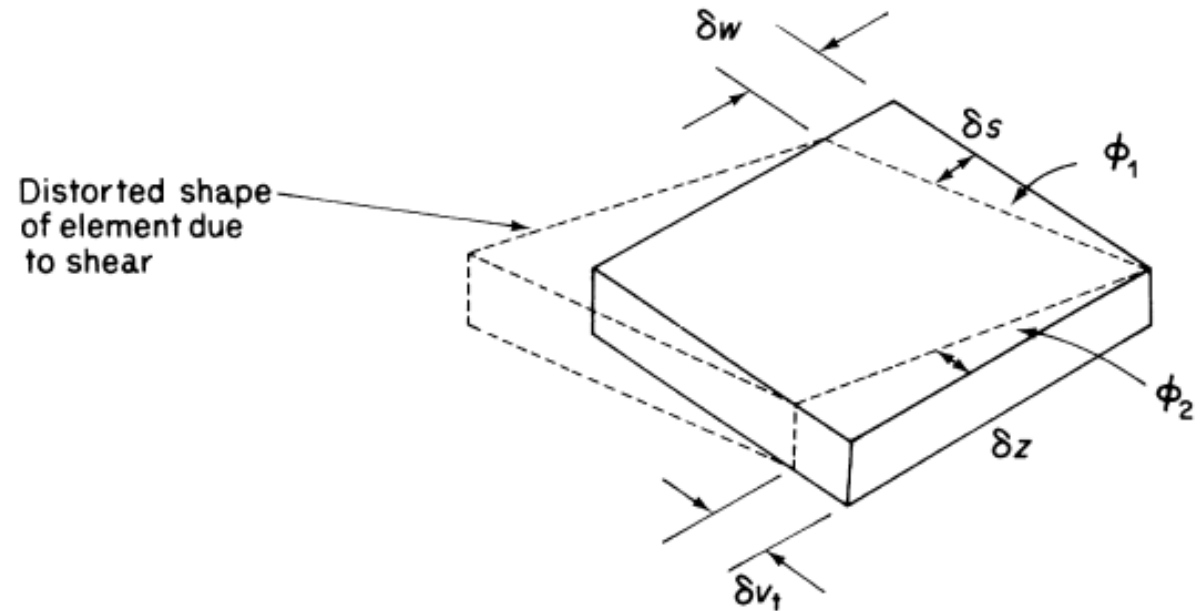
$$\varepsilon_s = \frac{v_n}{r} + \frac{\partial v_t}{\partial s}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E, para a distorção:

$$\gamma_{zs} = \gamma_{sz} = \gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z}$$



Considerando que o material dos painéis seja homogêneo, isotrópico e com comportamento elástico-linear, teremos:

$$q = \tau t = (G\gamma)t \quad \longrightarrow \quad q = Gt \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

No caso de estruturas aeronáuticas, formadas por painéis reforçados por cavernas (no caso da fuselagem), ou nervuras (no caso das asas), com espaçamentos relativamente pequenos (se comparados às dimensões da fuselagem ou da asa como um todo), é possível considerar que as seções transversais mantêm seu formato praticamente intacto, mas podem apresentar deslocamentos em seu próprio plano (como um corpo rígido), além de uma rotação em torno do eixo longitudinal decorrente da torção (no caso de as forças transversais não agirem no centro de cisalhamento da seção).





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim, para um sistema de coordenadas Oxy , com origem (por exemplo) no centroide de uma dada seção transversal (definida pela coordenada z), o deslocamento v_t em um ponto qualquer da seção (representado pelo ponto N na figura abaixo) pode ser expresso por:

$$v_t = u \cdot \cos\psi + v \cdot \sin\psi + p \cdot \theta$$

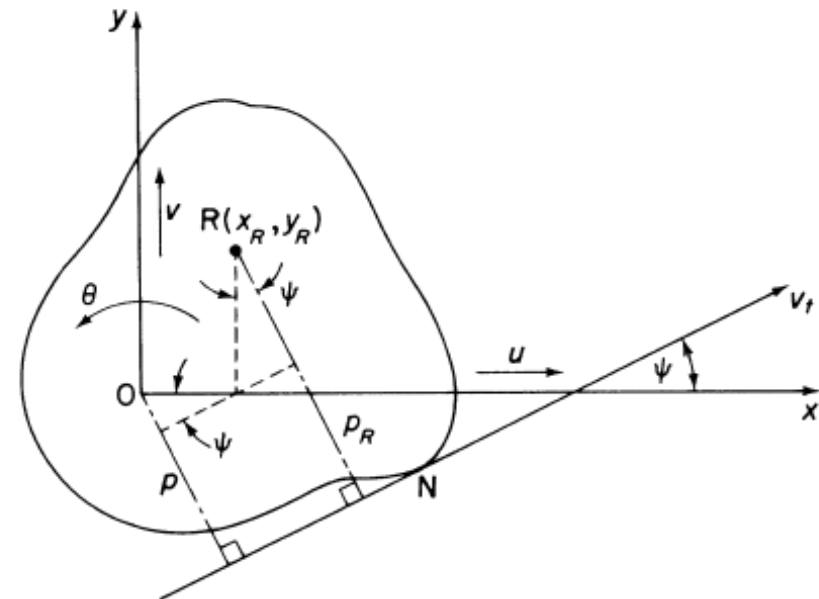
Onde:

$u = u(z)$ e $v = v(z)$ são os deslocamentos nas direções x e y da seção transversal (e de seu centroide, em particular);

ψ corresponde ao ângulo que o versor tangente à curva (passando pelo ponto N) forma com o eixo horizontal x ;

p corresponde à distância da linha (que passa por N e que tem a direção do versor tangente à curva) à origem do sistema de coordenadas;

$\theta = \theta(z)$ é o ângulo de torção (em rad) da seção em análise em relação a uma seção de referência.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Do exposto, considerando que a “viga” (leia-se: fuselagem ou asa) tenha seção transversal uniforme (o que faz com que $\psi = \psi(s)$ e $p = p(s)$), teremos, após derivar v_t em relação a z :

$$v_t = u \cdot \cos\psi + v \cdot \sin\psi + p \cdot \theta$$



$$\frac{\partial v_t}{\partial z} = \cos\psi \frac{du}{dz} + \sin\psi \frac{dv}{dz} + p \frac{d\theta}{dz}$$

Logo, retomando a expressão do fluxo de cisalhamento q (vide slide #6):

$$q = Gt \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \right) \quad \longrightarrow \quad q = Gt \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \cos\psi \frac{du}{dz} + \sin\psi \frac{dv}{dz} + p \frac{d\theta}{dz} \right)$$



2. Ângulo de giro e empenamento de vigas de parede fina com ST fechada sob carregamentos transversais [1-17.3.1]

Quando as linhas de ação das forças transversais aplicadas sobre uma viga de seção transversal fechada não passam pelo centro de cisalhamento, ocorre torção da viga (ângulo de giro não nulo) e um possível empenamento da seção transversal.

Utilizando resultados obtidos anteriormente, podemos obter expressões tanto para o ângulo de giro (por unidade de comprimento) da viga quanto para o empenamento da seção transversal. Retomando a expressão do fluxo apresentada no slide #9, teremos:

$$\frac{q}{Gt} = \frac{\partial w}{\partial s} + p \frac{d\theta}{dz} + \cos\psi \frac{du}{dz} + \sin\psi \frac{dv}{dz}$$

Integrando a expressão acima a partir de uma origem (arbitrária) escolhida para a coordenada curvilínea s (de $s_0 = 0$ até $s_f = s$), virá:

$$\int_0^s \frac{q}{Gt} ds = \int_0^s \left(\frac{\partial w}{\partial s} + p \frac{d\theta}{dz} + \cos\psi \frac{du}{dz} + \sin\psi \frac{dv}{dz} \right) ds$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\int_0^s \frac{q}{Gt} ds = \int_0^s \left(\frac{\partial w}{\partial s} + p \frac{d\theta}{dz} + \cos\psi \frac{du}{dz} + \sin\psi \frac{dv}{dz} \right) ds$$

$$\int_0^s \frac{q}{Gt} ds = w(s) - w(0) + \frac{d\theta}{dz} \int_0^s p(s) ds + \frac{du}{dz} \int_0^s \cos\psi ds + \frac{dv}{dz} \int_0^s \sin\psi ds$$

$$\int_0^s \frac{q}{Gt} ds = w(s) - w(0) + \frac{d\theta}{dz} \int_0^s p(s) ds + \frac{du}{dz} \int_{x(0)}^{x(s)} dx + \frac{dv}{dz} \int_{y(0)}^{y(s)} dy$$

$$\int_0^s \frac{q}{Gt} ds = w(s) - w(0) + 2A_{0s} \frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{dz} (x(s) - x(0)) + \frac{dv}{dz} (y(s) - y(0))$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Se a integral for realizada até que todo o circuito seja completado, teremos:

$$\oint_0^L \frac{q}{Gt} ds = \cancel{w(s) - w(0)} + 2A_m \frac{d\theta}{dz} + \cancel{\frac{du}{dz}(x(s) - x(0))} + \cancel{\frac{dv}{dz}(y(s) - y(0))}$$

$$\oint_0^L \frac{q}{Gt} ds = 2A_m \frac{d\theta}{dz}$$

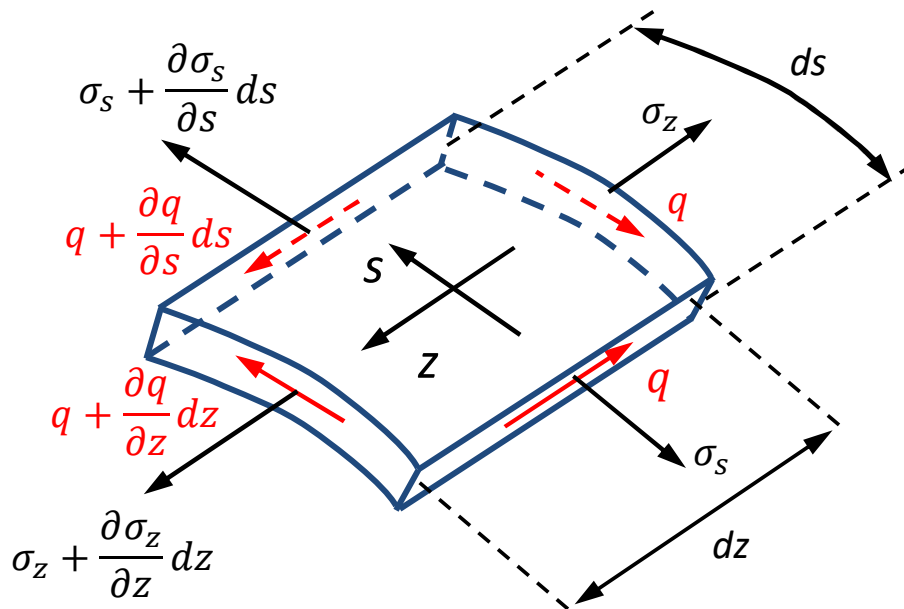
E o ângulo de giro por unidade de comprimento fica então dado por:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_m} \oint_0^L \frac{q}{Gt} ds$$



3. Torção de vigas de parede fina (unicelulares) [1-18.1]

Consideremos o caso de uma viga de seção transversal uniforme, fechada (unicelular) e de parede fina (podendo a espessura ser variável ao longo do contorno da seção transversal, isto é, $t = t(s)$). Considerando que a viga esteja submetida apenas a um torque (T) e que todas as seções estejam livres para empenar, não existirão tensões axiais, e as únicas tensões são as tensões de cisalhamento (associadas ao fluxo de cisalhamento, $q = \tau(s)t(s)$).



Das equações diferenciais de equilíbrio nas duas direções (z e s), obtemos, respectivamente:

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} + t \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} = 0$$

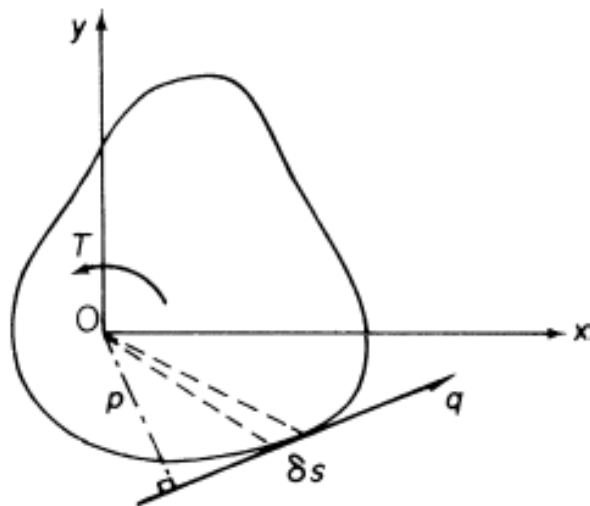


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Do exposto, conclui-se que, nas condições de torção pura da viga:

$$\frac{\partial q}{\partial s} = \frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

Em outras palavras, temos um fluxo de cisalhamento constante, cuja magnitude é determinada pelo equilíbrio entre o torque externo aplicado (T) e o torque decorrente do fluxo de cisalhamento nas seções transversais da viga:



$$T = \oint_0^L q \cdot p(s) ds = q \cdot \oint_0^L p(s) ds$$

$$T = \oint_0^L q \cdot p(s) ds = 2A_m q \Rightarrow \boxed{q = \frac{T}{2A_m}}$$

(1ª Fórmula de Bredt-Batho)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ainda neste caso, combinando as fórmulas vistas nos slides #12 e #14, vemos que o ângulo de giro por unidade de comprimento da viga será dado por:

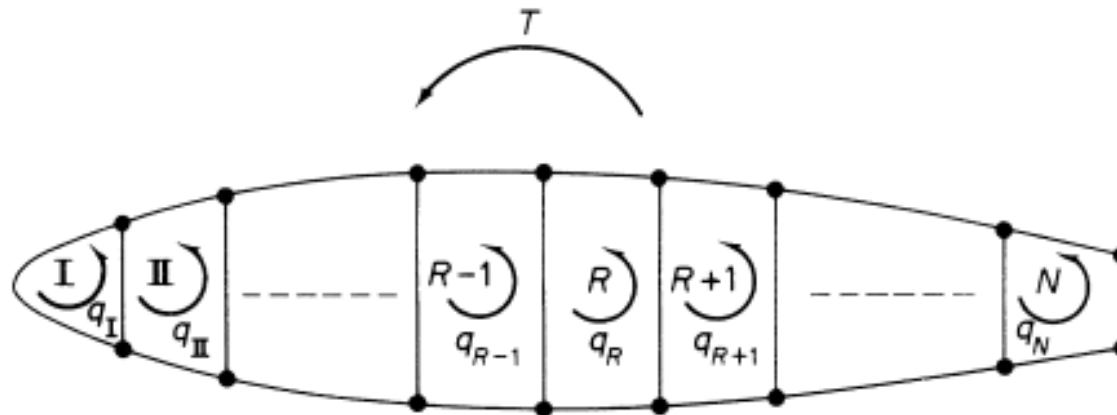
$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_m} \oint_0^L \frac{q}{Gt} ds = \frac{q}{2A_m} \oint_0^L \frac{1}{Gt} ds = \frac{T}{4A_m^2} \oint_0^L \frac{1}{Gt} ds$$

(2ª Fórmula de Bredt-Batho)



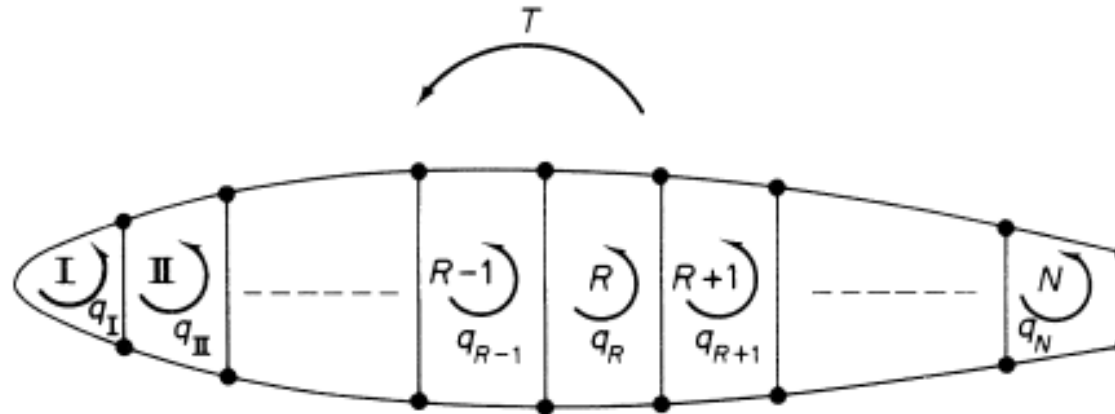
4. Torção de vigas de parede fina (multicelulares) [1-23.3]

A distribuição de pressão em uma superfície aerodinâmica (que leva às forças de sustentação e arrasto) é estaticamente equivalente a forças transversais atuantes no centro aerodinâmico e um momento (*pitching moment* - M_0). Tais esforços podem ser transferidos para o centro de cisalhamento da seção transversal na forma de forças cortantes (S_x e S_y), e um momento de torção (T). Neste tópico, avaliaremos como determinar os fluxos de cisalhamento e o ângulo de giro de uma seção transversal multicelular submetida a torção pura como ilustrado na figura abaixo.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Considerando que a seção seja formada por N células fechadas, as incógnitas do problema são:

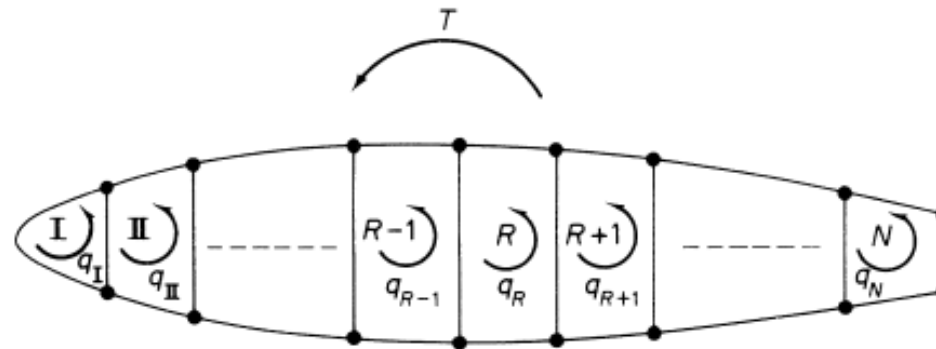
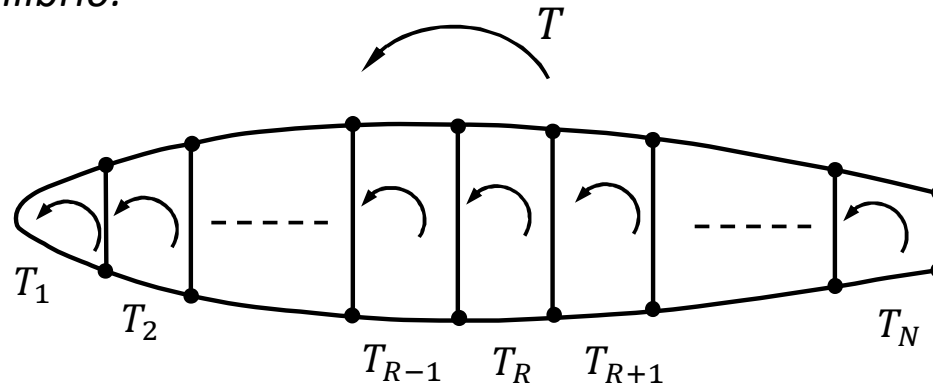
- Os fluxos de cisalhamento q_i ($1 \leq i \leq N$) atuantes em cada uma das N células^(*) (N incógnitas) e
- o ângulo de giro por unidade de comprimento ($d\theta/dz$) da seção como um todo.

(*) Admite-se que o fluxo de cisalhamento seja constante no interior de cada uma das N células.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Condição de equilíbrio:

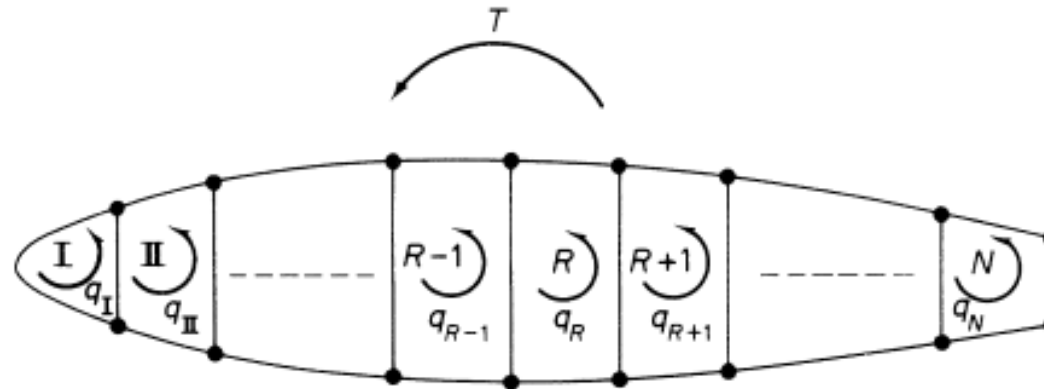


$$T = \sum_{R=1}^N T_R \quad \xrightarrow{T_R = 2A_{m,R}q_R} \quad T = 2 \sum_{R=1}^N A_{m,R}q_R$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2. Condição de compatibilidade de rotações (mesmo ângulo de giro para cada célula):



O ângulo de giro por unidade de comprimento da R -ésima célula, vista isoladamente, é dado por (vide slide #12):

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_{m,R}} \oint_0^{L_R} \frac{q}{Gt} ds = \frac{1}{2GA_{m,R}} \oint_0^{L_R} \frac{q}{t} ds$$

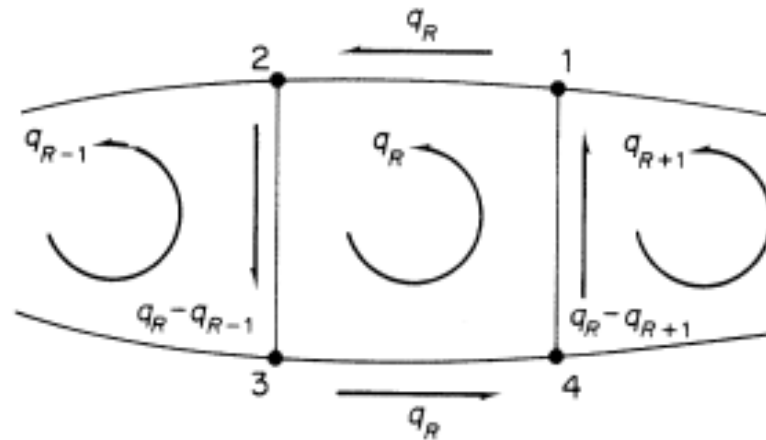


(desde que se tenha $G = \text{cte}$)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para a R -ésima célula:



Resultando:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2GA_{m,R}} \oint_0^{L_R} \frac{q}{t} ds = \frac{1}{2GA_{m,R}} [q_R \delta_{12} + (q_R - q_{R-1}) \delta_{23} + q_R \delta_{34} + (q_R - q_{R+1}) \delta_{41}]$$

Onde:
$$\delta_{ij} = \int_{s_i}^{s_j} \frac{ds}{t}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Podemos rescrever a equação anterior na seguinte forma:

$$2GA_{m,R} \frac{d\theta}{dz} = q_R(\delta_{12} + \delta_{23} + \delta_{34} + \delta_{41}) - q_{R-1}\delta_{23} - q_{R+1}\delta_{41}$$

E, para o caso de seções multicelulares onde as células estão conectadas consecutivamente (como indicado na figura anterior), podemos dar à fórmula acima um caráter geral:

$$2GA_{m,R} \frac{d\theta}{dz} = q_R\delta_R - q_{R-1}\delta_{R-1,R} - q_{R+1}\delta_{R+1,R}$$

Onde:

$$\left[\begin{array}{ll} \delta_R = \oint \frac{ds}{t} & \text{(cálculo feito ao redor de toda a } R\text{-ésima célula})} \\ \delta_{R-1,R} = \int_{s_i}^{s_j} \frac{ds}{t} & \text{(cálculo feito na parede comum às células } R-1 \text{ e } R) \\ \delta_{R+1,R} = \int_{s_i}^{s_j} \frac{ds}{t} & \text{(cálculo feito na parede comum às células } R \text{ e } R+1) \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

De posse da equação de equilíbrio e das equações que fornecem o ângulo de giro por unidade de comprimento (que deve ser o mesmo para todas as N células) obtemos um sistema linear de $N+1$ equações a $N+1$ incógnitas:

$$2 \sum_{R=1}^N A_{m,R} q_R = T$$

$$2GA_{m,R} \frac{d\theta}{dz} = q_R \delta_R - q_{R-1} \delta_{R-1,R} - q_{R+1} \delta_{R+1,R}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

5. Exemplo de aplicação

P.23.3 Determine the torsional stiffness of the four-cell wing section shown in Fig. P.23.3. Data are in Table 23.5.

Answer: $522.5 \times 10^6 \text{ G Nmm}^2/\text{rad}$

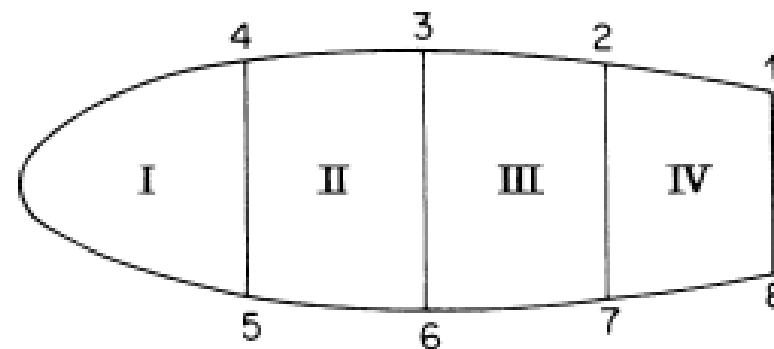


Table 23.5 Problem 23.3

Wall	12	23	34					
	78	67	56	45°	45°	36	27	18
Peripheral length (mm)	762	812	812	1,525	356	406	356	254
Thickness (mm)	0.915	0.915	0.915	0.711	1.220	1.625	1.220	0.915
Cell areas (mm ²)	$A_I = 161,500$		$A_{II} = 291,000$		$A_{III} = 291,000$		$A_{IV} = 226,000$	



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

A rigidez torcional de uma seção é definida como:

$$T = k_t \frac{d\theta}{dz}$$

Logo, para encontrar a rigidez torcional (k_t) da seção, é preciso obter o ângulo de giro por unidade de comprimento ($d\theta/dz$) para um torque arbitrário T . Como temos 4 células dispostas consecutivamente e o mesmo módulo de cisalhamento em todas, teremos as seguintes equações para um dado torque:

$$2A_1q_1 + 2A_2q_2 + 2A_3q_3 + 2A_4q_4 = T$$



$$(3,23q_1 + 5,82q_2 + 5,82q_3 + 4,52q_4) \times 10^5 = T \quad \text{Eq.(1)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ângulo de giro para a célula (1):

$$2GA_R \frac{d\theta}{dz} = q_R \delta_R - q_{R-1} \delta_{R-1,R} - q_{R+1} \delta_{R+1,R}$$

$$3,23 \times 10^5 G \frac{d\theta}{dz} = q_1 \delta_1 - q_2 \delta_{2,1}$$

$$\delta_1 = \oint \frac{ds}{t} = \frac{1525}{0,711} + \frac{356}{1,22} = 2436,67$$

$$\delta_{2,1} = \int \frac{ds}{t} = \frac{356}{1,22} = 291,80$$

Resultando: $2436,67q_1 - 291,80q_2 = 3,23 \times 10^5 G \frac{d\theta}{dz}$ Eq.(2)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ângulo de giro para a célula (2):

$$2GA_R \frac{d\theta}{dz} = q_R \delta_R - q_{R-1} \delta_{R-1,R} - q_{R+1} \delta_{R+1,R}$$

$$5,82 \times 10^5 G \frac{d\theta}{dz} = q_2 \delta_2 - q_1 \delta_{1,2} - q_3 \delta_{3,2}$$

$$\delta_2 = \oint \frac{ds}{t} = \frac{812}{0,915} + \frac{356}{1,22} + \frac{812}{0,915} + \frac{406}{1,625} = 2316,51$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \int \frac{ds}{t} = \frac{356}{1,22} = 291,80 \quad \delta_{3,2} = \int \frac{ds}{t} = \frac{406}{1,625} = 249,85$$

Resultando: $2316,51q_2 - 291,80q_1 - 249,85q_3 = 5,82 \times 10^5 G \frac{d\theta}{dz}$ Eq.(3)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ângulo de giro para a célula (3):

$$2GA_R \frac{d\theta}{dz} = q_R \delta_R - q_{R-1} \delta_{R-1,R} - q_{R+1} \delta_{R+1,R}$$

$$5,82 \times 10^5 G \frac{d\theta}{dz} = q_3 \delta_3 - q_2 \delta_{2,3} - q_4 \delta_{4,3}$$

$$\delta_3 = \oint \frac{ds}{t} = \frac{812}{0,915} + \frac{406}{1,625} + \frac{812}{0,915} + \frac{356}{1,22} = 2316,51$$

$$\delta_{2,3} = \delta_{3,2} = \int \frac{ds}{t} = \frac{406}{1,625} = 249,85 \quad \delta_{4,3} = \int \frac{ds}{t} = \frac{356}{1,22} = 291,80$$

Resultando: $2316,51q_3 - 249,85q_2 - 291,80q_4 = 5,82 \times 10^5 G \frac{d\theta}{dz}$ Eq.(4)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ângulo de giro para a célula (4):

$$2GA_R \frac{d\theta}{dz} = q_R \delta_R - q_{R-1} \delta_{R-1,R} - q_{R+1} \delta_{R+1,R}$$

$$4,52 \times 10^5 G \frac{d\theta}{dz} = q_4 \delta_4 - q_3 \delta_{3,4}$$

$$\delta_4 = \oint \frac{ds}{t} = \frac{762}{0,915} + \frac{356}{1,22} + \frac{762}{0,915} + \frac{254}{0,915} = 2234,97$$

$$\delta_{3,4} = \delta_{4,3} = \int \frac{ds}{t} = \frac{356}{1,22} = 291,80$$

Resultando: $2234,97q_4 - 291,80q_3 = 4,52 \times 10^5 G \frac{d\theta}{dz}$ Eq.(5)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Na forma matricial: $[A]\{X\} = \{B\}$

Onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} 323000 & 582000 & 582000 & 452000 & 0 \\ 2436.669664 & -291.8032787 & 0 & 0 & -323000 \\ -291.8032787 & 2316.512821 & -249.8461538 & 0 & -582000 \\ 0 & -249.8461538 & 2316.512821 & -291.8032787 & -582000 \\ 0 & 0 & -291.8032787 & 2234.972677 & -452000 \end{bmatrix}$$

$$\{X\} = \left\{ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad G \frac{d\theta}{dz} \right\}^t \quad \{B\} = \{T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^t$$

q_1, q_2, q_3 e q_4 $\longrightarrow$ expressos em N/mm

T $\longrightarrow$ expresso em Nmm

$G \left(\frac{d\theta}{dz} \right)$ $\longrightarrow$ expresso em N/mm^3



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Cuja solução é:

$$\begin{bmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \\ q4 \\ G\left(\frac{d\theta}{dz}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.21568754061922 \times 10^{-7} T \\ 5.82340556222909 \times 10^{-7} T \\ 5.98345741068891 \times 10^{-7} T \\ 4.62331565075601 \times 10^{-7} T \\ 1.89977691729764 \times 10^{-9} T \end{bmatrix}$$

Assim:

$$G\left(\frac{d\theta}{dz}\right) \cong 1,9 \times 10^{-9} \cdot T \quad \Leftrightarrow \quad T \cong 5,26 \times 10^8 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)$$

$$k_t \cong 5,26 \times 10^8 G$$

Onde: G está expresso em N/mm^2 , e k_t está expresso em Nmm^2/rad .



Referências:

- [1] Megson, T. H. G. *Aircraft Structures for Engineering Students*. 6th ed., Butterworth-Heinemann, 2016. Cap.17: Shear of beams / Cap.18: Torsion of beams / Cap.23: Wings
- 17.1 – General stress, strain and displacement relationships for open and single-cell closed section thin-walled beams (p.537-541)
- 17.3.1 – Twist and warping of shear loaded closed section beams (p.554-556)
- 18.1 – Torsion of closed section beams (p.569-571)
- 23.3 – Torsion (of wings) (p.665-669)