



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #06

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

22/08/2025



Tensões cisalhantes em vigas [1-17]

1. Introdução e hipóteses
2. Equações diferenciais de equilíbrio em vigas de parede fina (S.T. aberta ou fechada) [1-17.1]
3. Cisalhamento em vigas de parede fina com S.T. fechada [1-17.3]
4. Centro de cisalhamento em vigas de parede fina com S.T. fechada [1-17.3.2]
5. Exemplos de aplicação



1. Introdução e hipóteses

Nesta aula vamos dar continuidade à determinação da distribuição de tensões de cisalhamento em vigas de parede fina, com o estudo das vigas de seção transversal fechada, formando uma única célula.

Neste caso, ao contrário do que foi visto nas seções transversais abertas (onde era necessário que as linhas de ação das forças transversais passassem pelo centro de cisalhamento), as linhas de ação das forças transversais podem, agora, passar por qualquer ponto.

Consequentemente, os carregamentos associados às tensões cisalhantes que serão calculadas podem ser compostos por forças transversais e um momento de torção atuantes na seção.



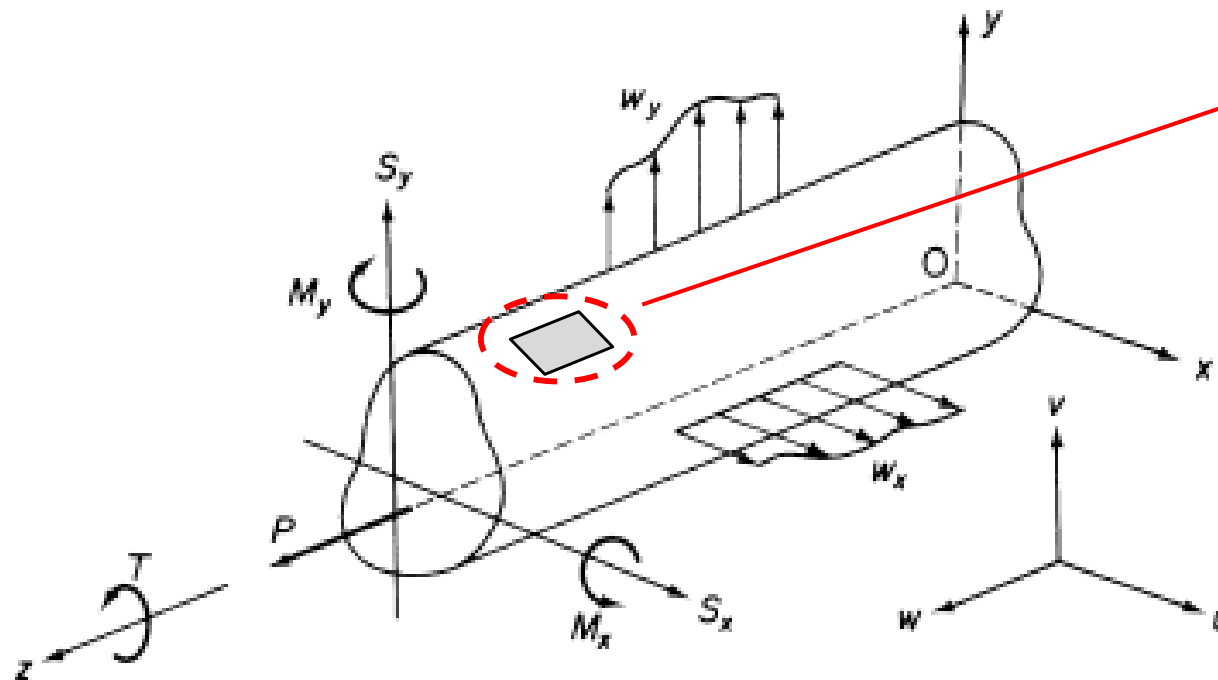
Hipóteses:

As hipóteses são as mesmas empregadas na aula anterior (para o estudo da distribuição das tensões de cisalhamento em vigas de parede fina e seção aberta), a saber:

- Viga possui parede fina;
- S.T. é uniforme (não varia ao longo do comprimento);
- Tensões cisalhantes são uniformes ao longo da espessura da parede e tangentes ao contorno da S.T.;
- Tensões normais são uniformes ao longo da espessura da parede;
- Efeitos de vínculos axiais são desprezíveis (empenamento livre da S.T.);
- Material homogêneo, isotrópico e com comportamento elástico-linear.



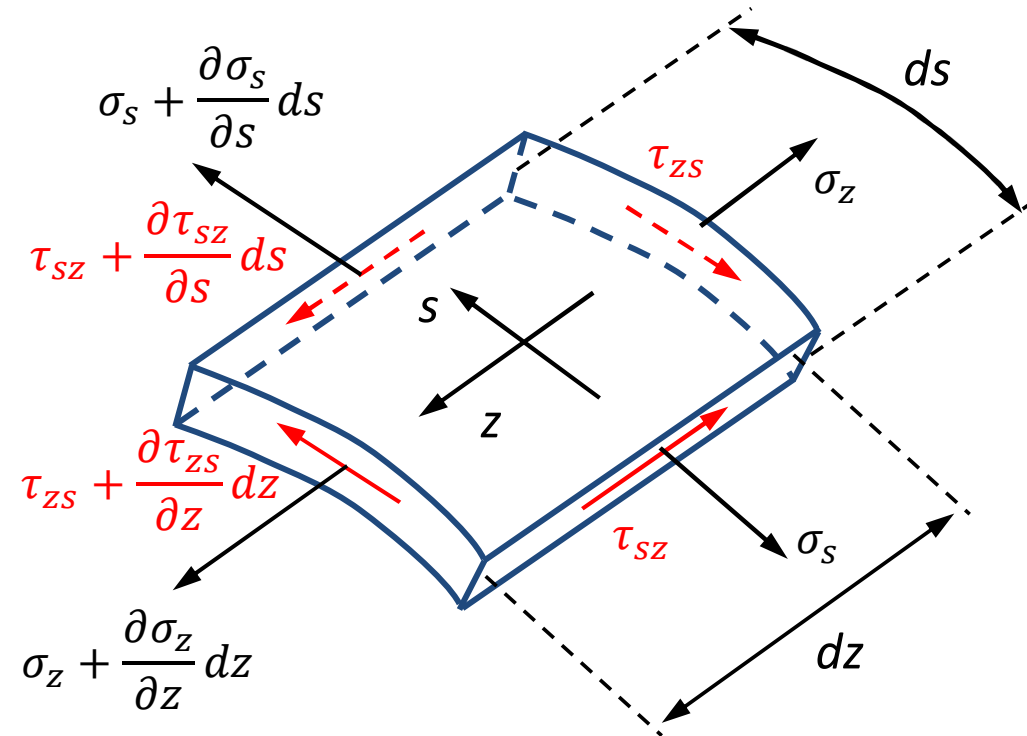
2. Equações diferenciais de equilíbrio em vigas de parede fina (S.T. aberta ou fechada)



Elemento infinitesimal a ser analisado, com dois lados paralelos ao eixo central C_z (distantes ds entre si) e dois lados paralelos a seções transversais adjacentes (distantes dz entre si).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



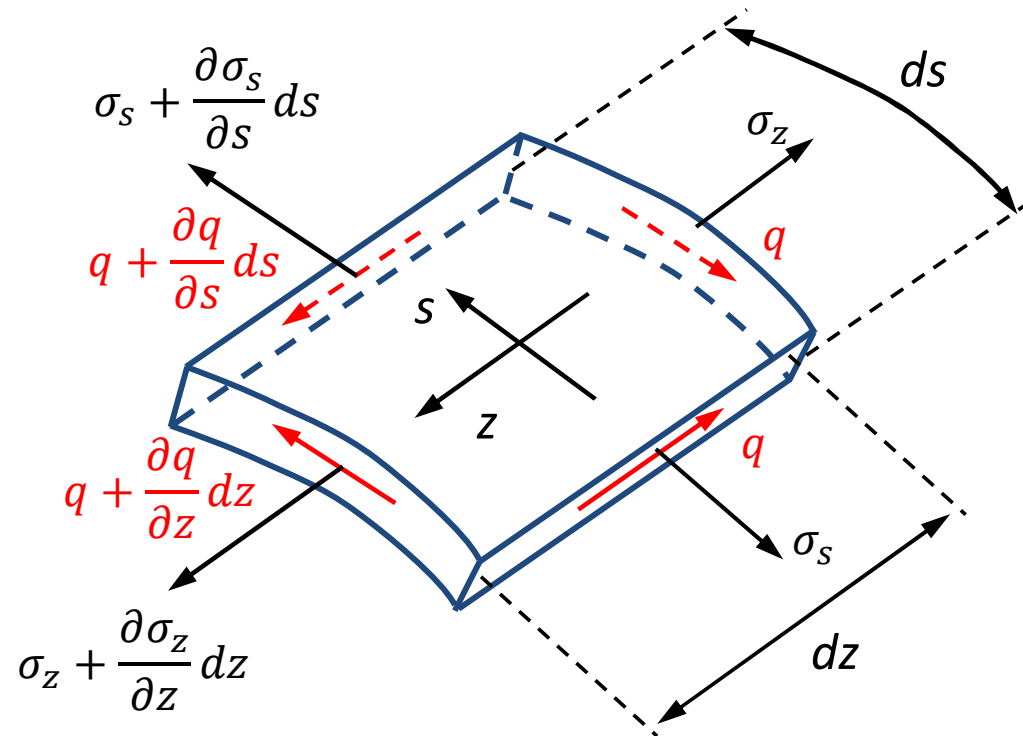
Lembrando que, pela simetria do tensor das tensões, $\tau_{sz} = \tau_{zs} = \tau$ e definindo o fluxo de cisalhamento como:

$$q = \tau \cdot t$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

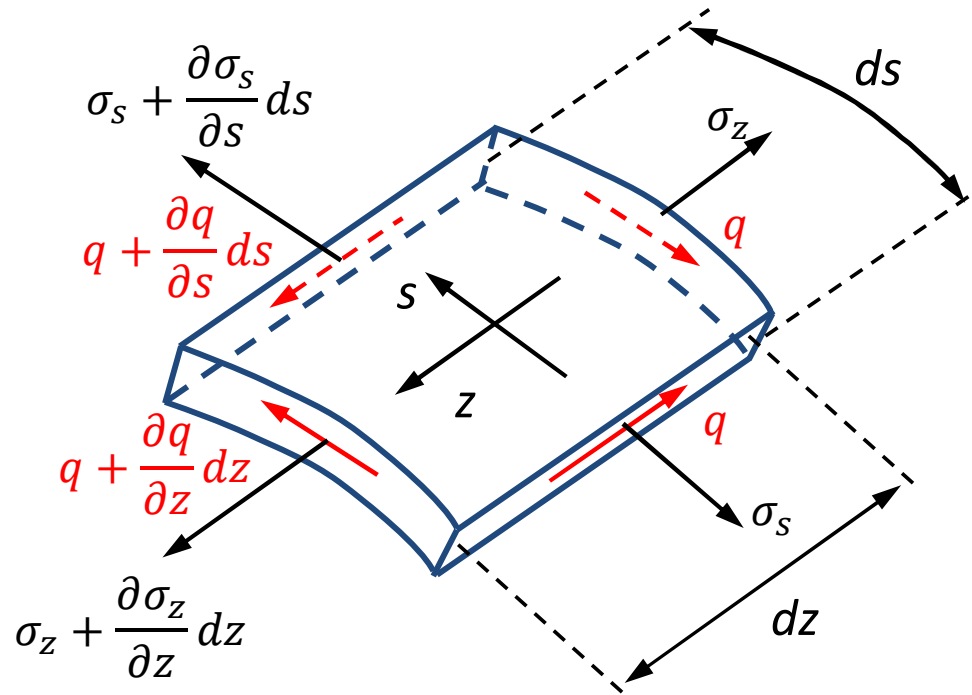
Teremos, de forma equivalente ao diagrama anterior:



Desprezando agora as possíveis variações de espessura ao longo dos comprimentos infinitesimais ds e dz e desprezando também as forças distribuídas no volume (no elemento infinitesimal de dimensões $ds \times dz \times t$), teremos ao impor o equilíbrio de forças na direção longitudinal (ou seja, segundo o eixo z):



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) t ds - (\sigma_z) t ds + \left(q + \frac{\partial q}{\partial s} ds \right) dz - (q) dz = 0$$

Fazendo as simplificações, dividindo cada parcela pelo produto $ds \cdot dz$, e levando ao limite para $ds \rightarrow 0$ e para $dz \rightarrow 0$, virá:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} t + \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$



3. Cisalhamento em vigas de parede fina com S.T. fechada

Retomando a equação vista na seção anterior:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} t + \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

Admitindo que a distribuição de tensões normais decorrentes da flexão simples possa ser representada de forma aceitável pela teoria simples de viga, temos (vide Aula #02):

$$\sigma_z = \frac{(M_y I_{xx} - M_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} x + \frac{(M_x I_{yy} - M_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} y$$

Assim, para vigas com seções transversais uniformes:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{((\partial M_y / \partial z) I_{xx} - (\partial M_x / \partial z) I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} x + \frac{((\partial M_x / \partial z) I_{yy} - (\partial M_y / \partial z) I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} y$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Mas das equações diferenciais de equilíbrio da viga (vide Aula #02, slides #17 e #18):

$$S_x = \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad \text{e} \quad S_y = \frac{\partial M_x}{\partial z}$$

Substituindo as relações acima na expressão de $\partial \sigma_z / \partial z$ resulta:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} x + \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} y$$

Logo:

$$\frac{\partial q}{\partial s} = - \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} tx - \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} ty$$

Integrando a equação acima ao longo da coordenada curvilínea s a partir de uma origem conveniente, teremos:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\int_0^s \frac{\partial q}{\partial s} ds = - \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s tx ds - \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s ty ds$$

$$q(s) = q_0 - \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s tx ds - \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s ty ds$$

Note que q_0 corresponde ao fluxo no ponto da seção escolhido como origem da coordenada curvilínea s . Desta forma, temos:

$$q(s) = q_0 + q_b(s)$$

Onde:

$$q_b(s) = - \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s tx ds - \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s ty ds$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O fluxo $q_b(s)$ corresponde ao fluxo de cisalhamento em uma seção transversal aberta cujo corte foi feito justamente no ponto escolhido como origem da coordenada curvilínea s . Naturalmente, tal fluxo, $q_b(s)$, é o fluxo existente nesta seção aberta, para forças transversais S_x e S_y agindo no centro de cisalhamento da mesma (ou seja, desta seção “aberta”).

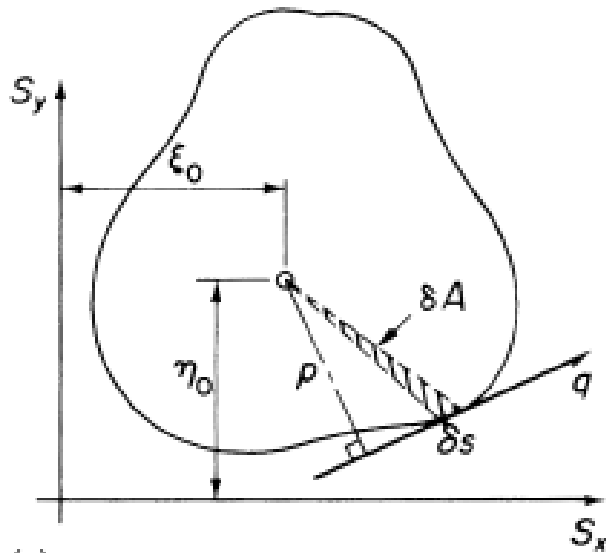
Assim, para cada “corte” escolhido teremos um valor específico de q_0 , correspondente ao valor da tensão de cisalhamento no “corte” feito, e um fluxo de cisalhamento $q_b(s)$ também correspondente àquela seção aberta. Porém, a distribuição final das tensões cisalhantes será sempre a mesma, independentemente da posição do corte.

O valor de q_0 é obtido por meio do equilíbrio de momentos (das forças externas e das forças internas) em relação a um eixo longitudinal (paralelo ao eixo Cz) passando por um polo arbitrário (devemos, usar, sempre, o polo mais conveniente para os cálculos).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tomando por base a figura abaixo e impondo a igualdade de momentos em relação ao polo indicado (que dista η_0 da linha de ação da força S_x e ξ_0 da linha de ação da força S_y), teremos:



$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \oint q(s) p(s) ds$$

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \oint (q_0 + q_b(s)) p(s) ds$$

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = q_0 \oint p(s) ds + \oint q_b(s) p(s) ds$$

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = 2A_m q_0 + \oint q_b(s) p(s) ds$$

... de onde decorre o valor de q_0 .



4. Centro de cisalhamento em vigas de parede fina com S.T. fechada

Lembramos que, por definição, o centro de cisalhamento da seção transversal de uma viga de seção transversal uniforme é o ponto geométrico em que, quando forem aplicadas forças transversais nesse ponto, elas não provocarão torção da viga (em outras palavras, a viga irá fletir sem torcer).

Nas vigas de parede fina e seção transversal aberta, a localização do centro de cisalhamento era obtida pela imposição do equilíbrio de momentos (das forças externas e das forças internas) com relação a um dado polo. No caso de seções transversais fechadas, este método é utilizado para determinar o fluxo de cisalhamento q_0 em um dado ponto (“corte”) da seção no caso em que se conhece o ponto de aplicação das forças externas. Como a posição do centro de cisalhamento é desconhecida, este método não é suficiente para que sejam determinados tanto o fluxo de cisalhamento q_0 quanto a posição do centro de cisalhamento.

A equação adicional para resolver o problema diz respeito ao ângulo de giro (torção) por unidade de comprimento da viga produzido pelo fluxo de cisalhamento. Como veremos nas próximas aulas, tal ângulo de giro é dado por:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_m} \oint \frac{q(s)}{Gt} ds = \frac{1}{2A_m} \oint \frac{(q_0 + q_b(s))}{Gt} ds$$

Impondo que o ângulo de giro seja nulo, virá:

$$\frac{d\theta}{dz} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2A_m} \oint \frac{(q_0 + q_b(s))}{Gt} ds = 0$$

$$q_0 \oint \frac{1}{Gt} ds + \oint \frac{q_b(s)}{Gt} ds = 0$$

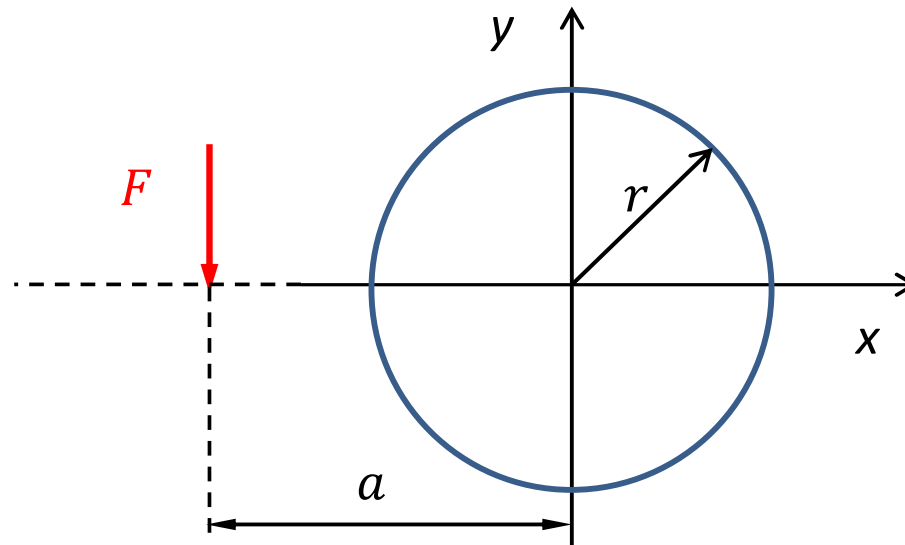
A equação acima, juntamente com a equação de equilíbrio de momentos, definem o valor do fluxo q_0 (para um dado corte feito na seção) e a posição do centro de cisalhamento.



5. Exemplo de aplicação

5.1) Determine a distribuição do fluxo de cisalhamento para a viga de parede fina (com espessura $t = cte$ e $t/r \ll 1$) e seção circular fechada indicada na figura abaixo, decorrente da aplicação de uma força transversal F aplicada como indicado na figura.

Dados: F, r, t, a .





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Claramente a força transversal não está aplicada no centro de cisalhamento da seção, o que faz com que o fluxo de cisalhamento seja decorrente tanto da ação da força cortante (aplicada no centro de cisalhamento) quanto do momento de torção que ela gera (ao ser transportada para o centro de cisalhamento). O fluxo total é dado por:

$$q(s) = q_0 + q_b(s) = q_0 - \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s tx ds - \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s ty ds$$

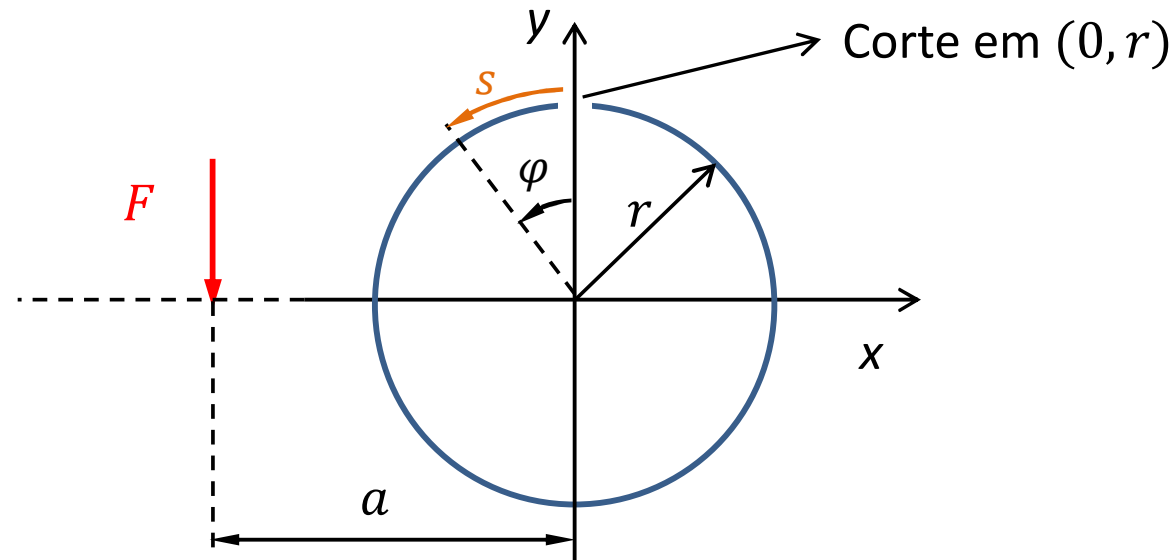
Como $S_x = 0$, $S_y = -F$ e os eixos x e y são eixos de simetria da seção (ou seja, $I_{xy} = 0$), resulta:

$$q(s) = q_0 + \frac{F}{I_{xx}} \int_0^s ty ds$$

Para o cálculo de q_0 consideremos (por exemplo) um corte na seção no ponto de coordenadas $(x, y) = (0, r)$ (topo da viga), de forma que q_0 passa a ser o valor do fluxo neste ponto (vide figura a seguir).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Neste caso: $y = r \cos \varphi$ $s = r \varphi$ $ds = r d\varphi$

Logo:
$$q = q_0 + \frac{F}{I_{xx}} \int_0^s ty ds = q_0 + \frac{F}{I_{xx}} \int_0^s tr \cos \varphi (r d\varphi) = q_0 + \frac{Ftr^2}{I_{xx}} \sin \varphi \Big|_0^\varphi$$

$$q(\varphi) = q_0 + \frac{Ftr^2}{I_{xx}} \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_p}{2} = \frac{2\pi r^3 t}{2} = \pi r^3 t$$

Teremos:

$$q(\varphi) = q_0 + \frac{F}{\pi r} \operatorname{sen} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Para o cálculo de q_0 , basta impor a igualdade de momentos (das forças externas e das forças internas) em relação a um eixo paralelo ao eixo longitudinal C_z passando por um polo adequado. O polo mais conveniente neste caso é o próprio centroide (que leva a braços constantes e iguais a r para o cálculo do momento devido às forças internas). Assim, resulta:

$$Fa = \int_0^{s_t} q(s)p(s)ds = \int_0^{2\pi} \left(q_0 + \frac{F}{\pi r} \operatorname{sen} \varphi \right) (r) r d\varphi$$

$$Fa = r^2 \left(q_0 \varphi - \frac{F}{\pi r} \cos \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi q_0 r^2 \quad \Leftrightarrow \quad q_0 = \frac{Fa}{2\pi r^2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O fluxo total fica então dado por:

$$q(\varphi) = \frac{Fa}{2\pi r^2} + \frac{F}{\pi r} \operatorname{sen}\varphi = \frac{F}{\pi r} \left(\frac{a}{2r} + \operatorname{sen}\varphi \right), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Pode-se verificar que:

1. O fluxo de cisalhamento máximo ocorre em $\varphi = \pi/2$ e vale:

$$q_{\max} = \frac{F}{\pi r} \left(\frac{a}{2r} + 1 \right)$$

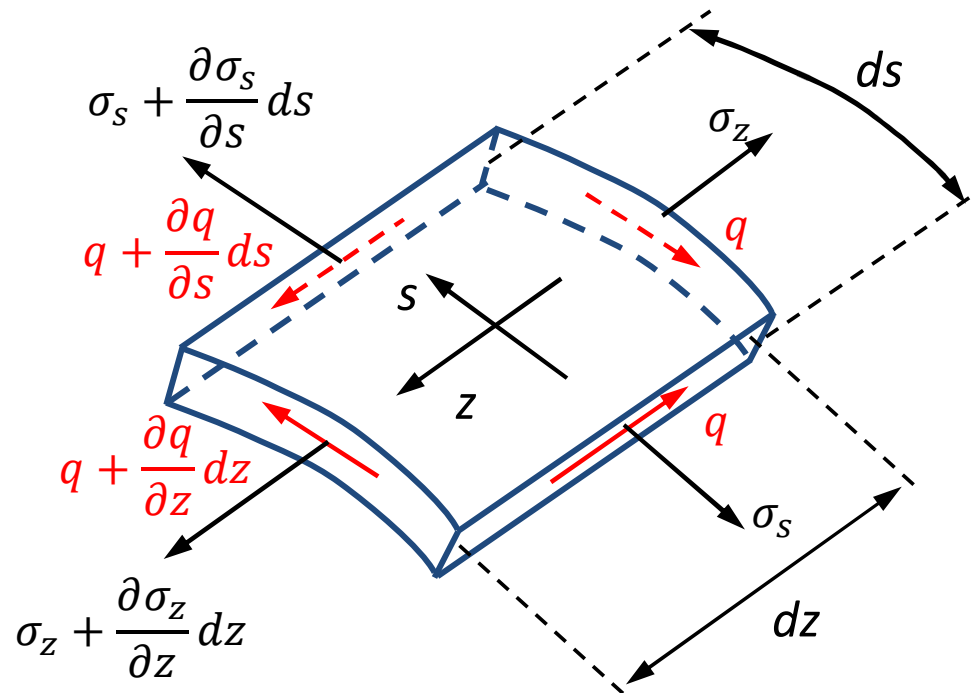
2. O fluxo de cisalhamento no ponto de corte decorre apenas do momento de torção sendo imediato verificar que o valor obtido é o mesmo que resulta da aplicação da fórmula de Bredt-Batho para a torção pura de tubos de parede fina (vide, p.ex., Gere & Goodno [2]):

$$q_0 = \frac{T}{2A_m} = \frac{Fa}{2\pi r^2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

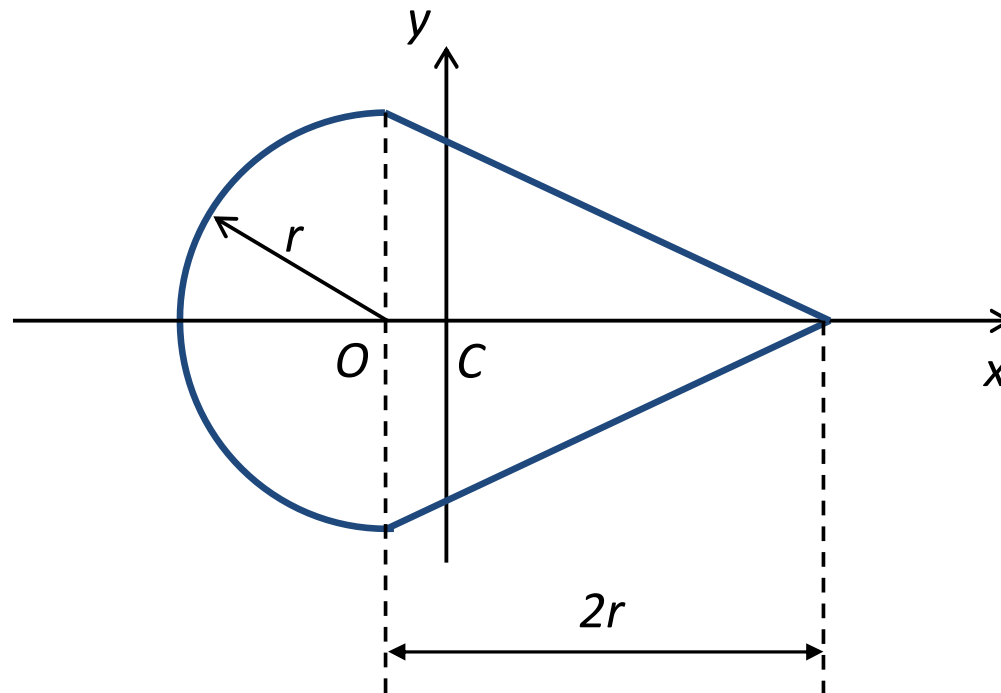
3. Para $a/2r > 1$, o sinal do fluxo de cisalhamento resulta positivo para todos os valores de φ . O sinal positivo mostra que o sentido do fluxo de cisalhamento, nas faces de orientação positiva, é anti-horário como estabelecido na convenção de sinais (vide figura a seguir).





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

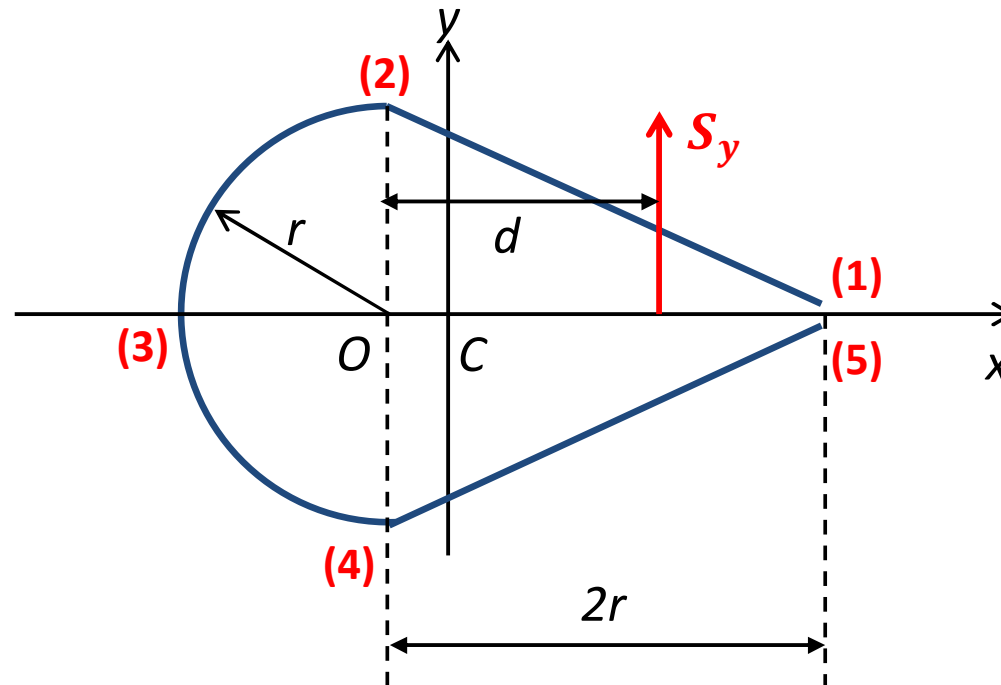
5.2) Determine a posição do centro de cisalhamento da viga de parede fina indicada na figura abaixo. Dados: r , t .





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução: Naturalmente o centro de cisalhamento deve estar situado, obrigatoriamente, sobre o eixo de simetria da seção (no caso, o eixo Cx). Basta, portanto, determinarmos a posição y_{SC} do centro de cisalhamento. Considerando que uma força transversal S_y atue sobre o centro de cisalhamento, com sua linha de ação distante d do ponto O , e fazendo um corte na seção separando os pontos “1” e “5”, teremos:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Da imposição de que o ângulo de giro é nulo, resulta:

$$q_0 \oint \frac{1}{Gt} ds + \oint \frac{q_b(s)}{Gt} ds = 0$$

E sendo $Gt = cte$:

$$q_0 \oint ds + \oint q_b(s) ds = 0 \quad \text{Eq.(1)}$$

O fluxo $q_b(s)$ em cada trecho é dado por:

$$q_b(s) = -\frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s t x ds - \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s t y ds$$

$$q_b(s) = -\frac{S_y}{I_{xx}} \int_0^s t y ds$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

No trecho 1-2: $y = s \cdot \text{sen}\beta$, $0 \leq s \leq r\sqrt{5}$

$$q_{b,12}(s) = -\frac{S_y}{I_{xx}} \int_0^s ty ds = -\frac{S_y t \text{sen}\beta}{I_{xx}} \int_0^s s ds = -\frac{S_y t \text{sen}\beta}{2I_{xx}} s^2$$

$$s = r\sqrt{5}: \quad q_{b,12}(s_2) = -\frac{5 S_y \text{sen}\beta}{2 I_{xx}} tr^2$$

No trecho 2-4: $y = r \cdot \text{cos}\alpha$, $s_2 = r\alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$

$$q_{b,24}(s) = -\frac{5 S_y \text{sen}\beta}{2 I_{xx}} tr^2 - \frac{S_y}{I_{xx}} \int_0^{s_2} ty ds_2$$

$$q_{b,24}(s) = -\frac{5 S_y \text{sen}\beta}{2 I_{xx}} tr^2 - \frac{S_y}{I_{xx}} \int_0^{\alpha} (t \cdot r \text{cos}\alpha) r d\alpha$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$q_{b,24}(s) = -\frac{5 S_y \text{sen}\beta}{2 I_{xx}} tr^2 - \frac{S_y tr^2}{I_{xx}} \text{sen}\alpha \Big|_0^\alpha =$$

$$q_{b,24}(s) = -\frac{5 S_y \text{sen}\beta}{2 I_{xx}} tr^2 - \frac{S_y tr^2}{I_{xx}} \text{sen}\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

O fluxo básico no trecho reto 4-5 é idêntico ao do trecho 1-2, sendo desnecessária sua determinação (verifique!). Retornando à equação (1) do slide #24:

$$q_0 \oint ds + \oint q_b(s) ds = 0$$

$$q_0(2\sqrt{5} + \pi)r + 2 \int_0^{r\sqrt{5}} \left(-\frac{S_y t \text{sen}\beta}{2 I_{xx}} s^2 \right) ds + \int_0^\pi \left(-\frac{5 S_y \text{sen}\beta}{2 I_{xx}} tr^2 - \frac{S_y tr^2}{I_{xx}} \text{sen}\alpha \right) r d\alpha = 0$$

$$q_0(2\sqrt{5} + \pi)r = \frac{S_y t \text{sen}\beta}{I_{xx}} \int_0^{r\sqrt{5}} (s^2) ds + \frac{5\pi S_y \text{sen}\beta}{2 I_{xx}} tr^3 + \frac{S_y tr^3}{I_{xx}} \int_0^\pi (\text{sen}\alpha) d\alpha$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$q_0(2\sqrt{5} + \pi) = \frac{5\sqrt{5}}{3} \frac{S_y t r^2 \operatorname{sen} \beta}{I_{xx}} + \frac{5\pi}{2} \frac{S_y t r^2 \operatorname{sen} \beta}{I_{xx}} + 2 \frac{S_y t r^2}{I_{xx}}$$

$$q_0(2\sqrt{5} + \pi) = \frac{S_y t r^2}{I_{xx}} \left(\frac{5\sqrt{5}}{3} \operatorname{sen} \beta + \frac{5\pi}{2} \operatorname{sen} \beta + 2 \right)$$

Mas:
$$\left[\begin{aligned} \operatorname{sen} \beta &= \frac{r}{r\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ I_{xx} &= \frac{\pi r^3 t}{2} + 2 \int_0^{r\sqrt{5}} (s \cdot \operatorname{sen} \beta)^2 t ds = \frac{\pi r^3 t}{2} + \frac{2\sqrt{5} r^3 t}{3} \cong 3,06151 r^3 t \end{aligned} \right.$$

Logo:
$$q_0 \cong 0,307989 \frac{S_y}{r}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Uma vez obtido o fluxo q_0 (o qual está relacionado, obrigatoriamente, com a condição de que a força transversal está aplicada no centro de cisalhamento), basta impor a igualdade de momentos (da força externa e das forças internas). Tomando o ponto O como polo, teremos:

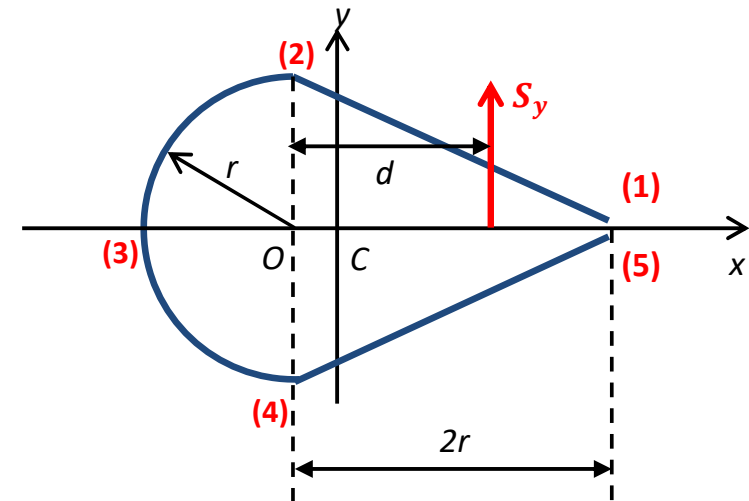
$$S_y \cdot d = 2A_m q_0 + \oint q_b(s) p(s) ds$$

No caso:

$$A_m = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{2r \cdot 2r}{2} \cong 3,570796r^2 \quad (\text{área interna à linha de meia espessura})$$

$$q_{b,12}(s) \cong -0,073038 \frac{S_y s^2}{r^3}, \quad 0 \leq s \leq r\sqrt{5} \quad (\text{fluxo no trecho 1-2})$$

$$q_{b,24}(s) \cong -0,3651906 \frac{S_y}{r} - 0,326636 \frac{S_y \cdot \sin(\alpha)}{r}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi \quad (\text{fluxo no trecho 2-4})$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$q_0 \cong 0,307989 \frac{S_y}{r} \quad (\text{fluxo de cisalhamento na posição do corte})$$

$$p_{12} = 2r \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} r \quad (\text{distância da linha de ação do fluxo } q_{b,12}(s) \text{ ao polo } O)$$

$$p_{24} = r \quad (\text{distância da linha de ação do fluxo } q_{b,24}(\alpha) \text{ ao polo } O)$$

Resulta, assim:

$$\oint q_b(s)p(s)ds = \textcolor{red}{2} \int_0^{r\sqrt{5}} q_{b,12}(s)p_{12}ds + \int_0^{\pi} q_{b,24}p_{24}(\textcolor{red}{r}d\alpha) \cong -2,287474S_yr$$

$$\text{E, portanto:} \quad d = \frac{1}{S_y} \left[2A_m q_0 + \oint q_b(s)p(s)ds \right] \cong -0,08794 \cdot r$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

[1] Megson, T. H. G. *Aircraft Structures for Engineering Students*. 6th ed., Butterworth-Heinemann, 2016. Cap.17: Shear of beams.

17.1 – General stress, strain and displacement relationships for open and single-cell closed section thin-walled beams (p.537-541)

17.2 – Shear of open section beams (p.541-550)

17.3 – Shear of closed section beams (p.550-559)

Problems (p.559-568)

[2] Gere, J.M., Goodno, B.J. *Mecânica dos Materiais*. 7a ed. Cengage Learning, 2010. Cap.3: Torção. Seção 3.10: Tubos de parede fina.