



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #03

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

14/08/2025



Tensões cisalhantes em vigas [1-17]

1. Introdução e hipóteses
2. Equações diferenciais de equilíbrio em vigas de parede fina (com S.T. aberta ou fechada) [1-17.1]
3. Cisalhamento em vigas de parede fina com S.T. aberta [1-17.2]
4. Centro de cisalhamento em vigas de parede fina com S.T. aberta [1-17.2.1]
5. Exemplo de aplicação



1. Introdução e hipóteses

Nesta aula vamos determinar a distribuição de tensões de cisalhamento em vigas de seção transversal aberta ou fechada (neste último caso formando uma única célula). Nos dois casos aventados, considera-se que a viga é formada por chapas de pequena espessura se comparada às dimensões da seção transversal, o que é típico de estruturas aeronáuticas. Os carregamentos associados às tensões cisalhantes que serão calculadas são:

- Nas vigas de S.T. aberta: apenas as forças cortantes agindo na seção;
- Nas vigas de S.T. fechada (unicelulares): tanto as forças cortantes quanto o momento de torção agindo na seção.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

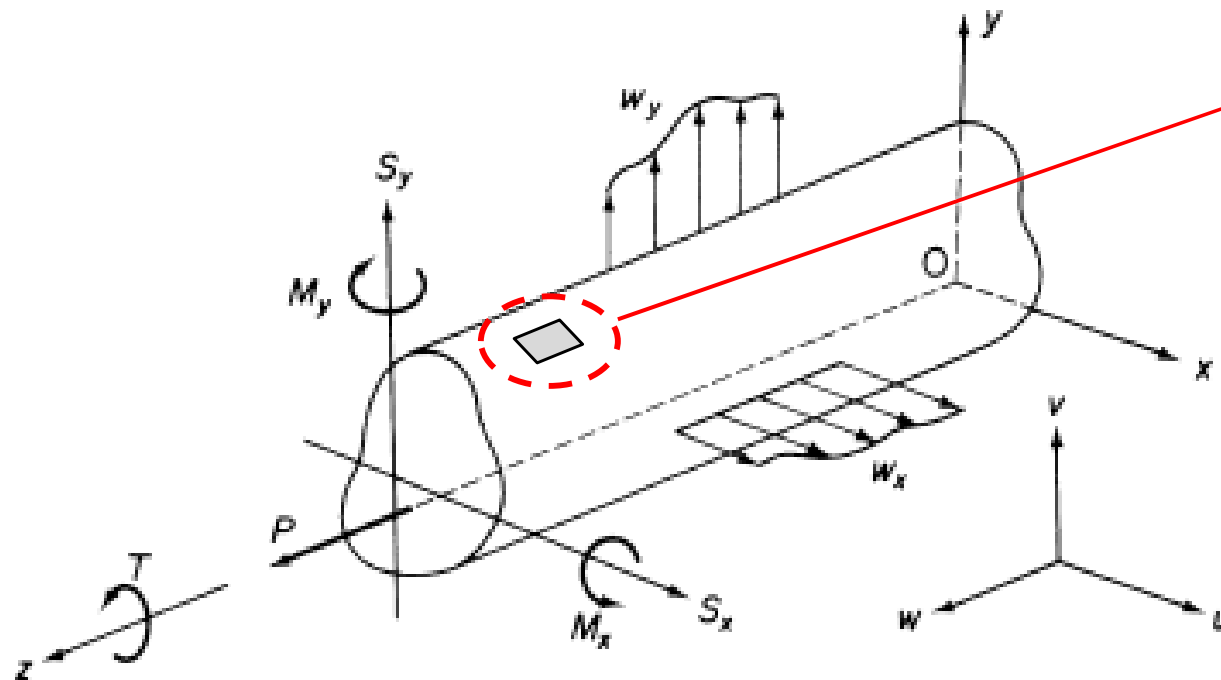
Hipóteses:

- Viga possui parede fina;
- S.T. é uniforme (não varia ao longo do comprimento);
- Tensões cisalhantes são uniformes ao longo da espessura da parede^(*) e tangentes ao contorno da S.T.;
- Tensões normais são uniformes ao longo da espessura da parede;
- Efeitos de vínculos axiais são desprezíveis (empenamento livre da S.T.);
- Material homogêneo, isótropo e com comportamento elástico-linear.

() Para que tal hipótese seja aplicável, as linhas de ação das forças transversais devem passar, obrigatoriamente, pelo centro de cisalhamento da seção transversal (se a seção for aberta). No caso de seções transversais fechadas, não existe esta obrigatoriedade.*



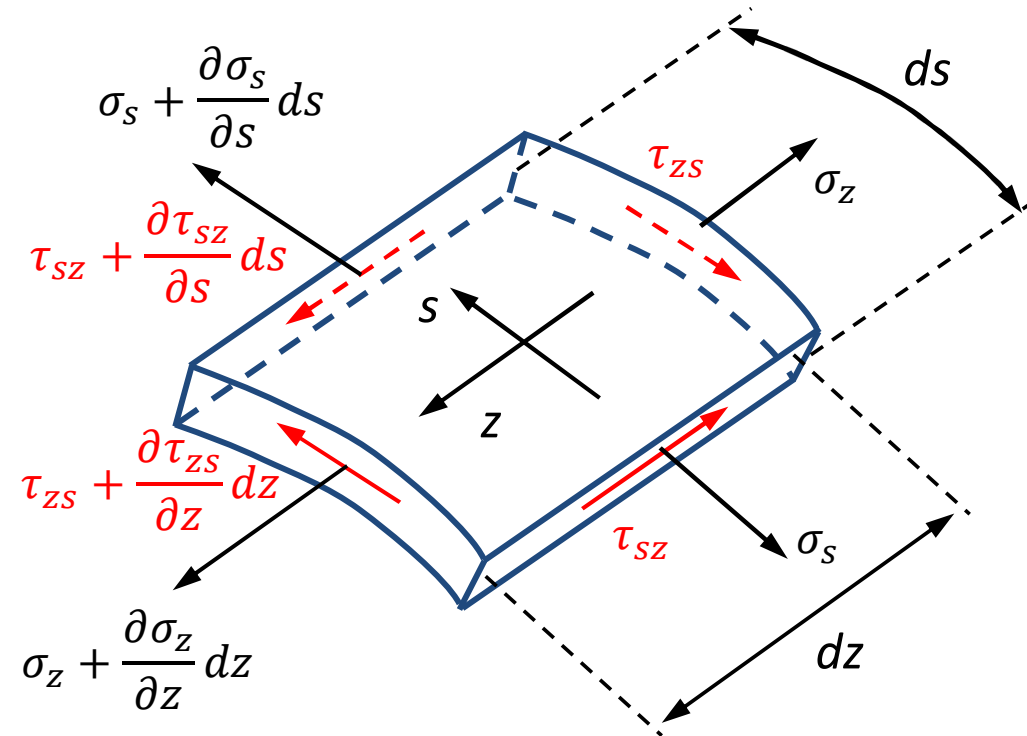
2. Equações diferenciais de equilíbrio em vigas de parede fina (com S.T. aberta ou fechada)



Elemento infinitesimal a ser analisado, com dois lados paralelos ao eixo central C_z (distantes ds entre si) e dois lados paralelos a seções transversais adjacentes (distantes dx entre si).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



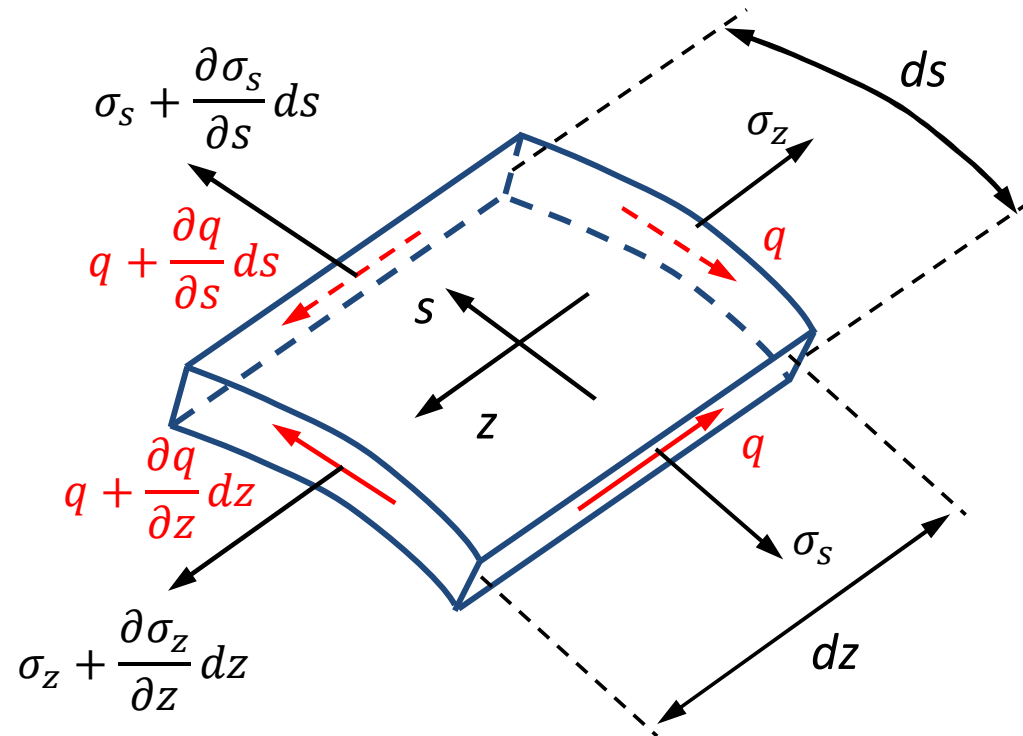
Lembrando que, pela simetria do tensor das tensões, $\tau_{sz} = \tau_{zs} = \tau$ e definindo o fluxo de cisalhamento como:

$$q = \tau \cdot t$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

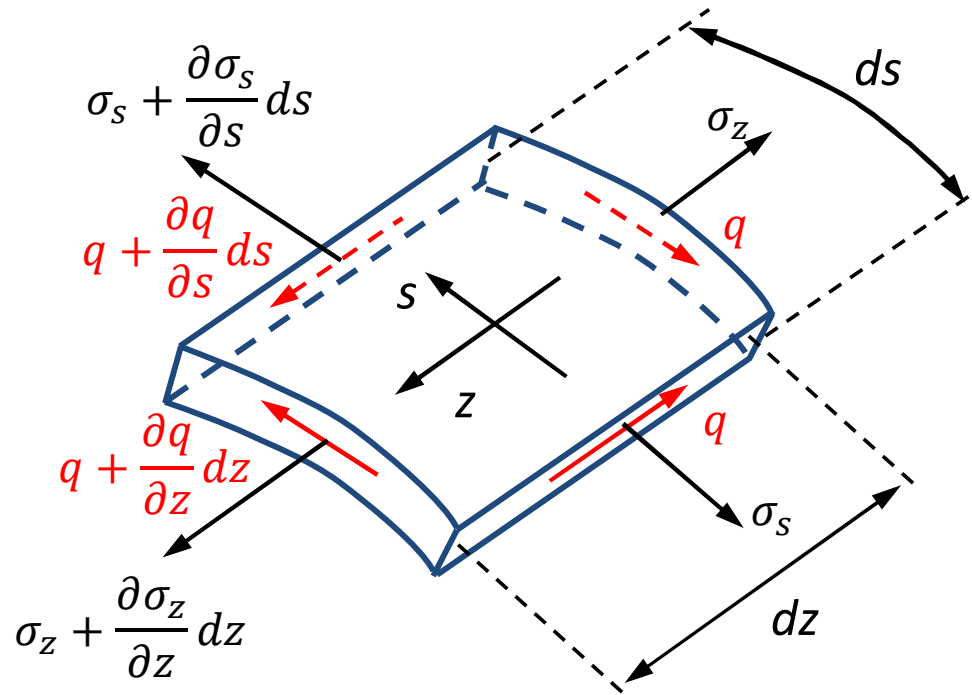
Teremos, de forma equivalente ao diagrama anterior:



Desprezando agora as possíveis variações de espessura ao longo dos comprimentos infinitesimais ds e dz e desprezando também as forças distribuídas no volume (no elemento infinitesimal de dimensões $ds \times dz \times t$), teremos ao impor o equilíbrio de forças na direção longitudinal (ou seja, segundo o eixo z):



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) t ds - (\sigma_z) t ds + \left(q + \frac{\partial q}{\partial s} ds \right) dz - (q) dz = 0$$

Fazendo as simplificações, dividindo cada parcela pelo produto $ds \cdot dz$, e levando ao limite para $ds \rightarrow 0$ e para $dz \rightarrow 0$, virá:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} t + \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$



3. Cisalhamento em vigas de parede fina com S.T. aberta

Retomando a equação vista na seção anterior:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} t + \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

Admitindo que a distribuição de tensões normais decorrentes da flexão simples possa ser representada de forma aceitável pela teoria simples de viga, temos (vide Aula #2):

$$\sigma_z = \frac{(M_y I_{xx} - M_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} x + \frac{(M_x I_{yy} - M_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} y$$

Assim, para vigas com seções transversais uniformes:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{((\partial M_y / \partial z) I_{xx} - (\partial M_x / \partial z) I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} x + \frac{((\partial M_x / \partial z) I_{yy} - (\partial M_y / \partial z) I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} y$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Mas das equações diferenciais de equilíbrio da viga (vide Aula #2, slides #17 e #18):

$$S_x = \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad \text{e} \quad S_y = \frac{\partial M_x}{\partial z}$$

Substituindo as relações acima na expressão de $\partial \sigma_z / \partial z$ resulta:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} x + \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} y$$

Logo:

$$\frac{\partial q}{\partial s} = - \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} t_x - \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} t_y$$

Integrando a equação acima ao longo da coordenada curvilínea s a partir de uma origem conveniente, teremos:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\int_0^s \frac{\partial q}{\partial s} ds = - \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s tx ds - \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s ty ds$$

Em particular, para vigas de seção transversal aberta, é conveniente escolher como origem da coordenada curvilínea s uma de suas extremidades (de modo a obtermos $q(0) = q_0 = 0$). Assim, o fluxo de cisalhamento fica dado por:

$$q(s) = - \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s tx ds - \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s ty ds$$

É importante ressaltar, novamente, que tal fluxo de cisalhamento (com tensões de cisalhamento constantes ao longo da espessura da parede) só é possível se as linhas de ação das forças transversais passarem, obrigatoriamente, pelo centro de cisalhamento da seção transversal (lembrando que, neste caso, a S.T. é aberta).



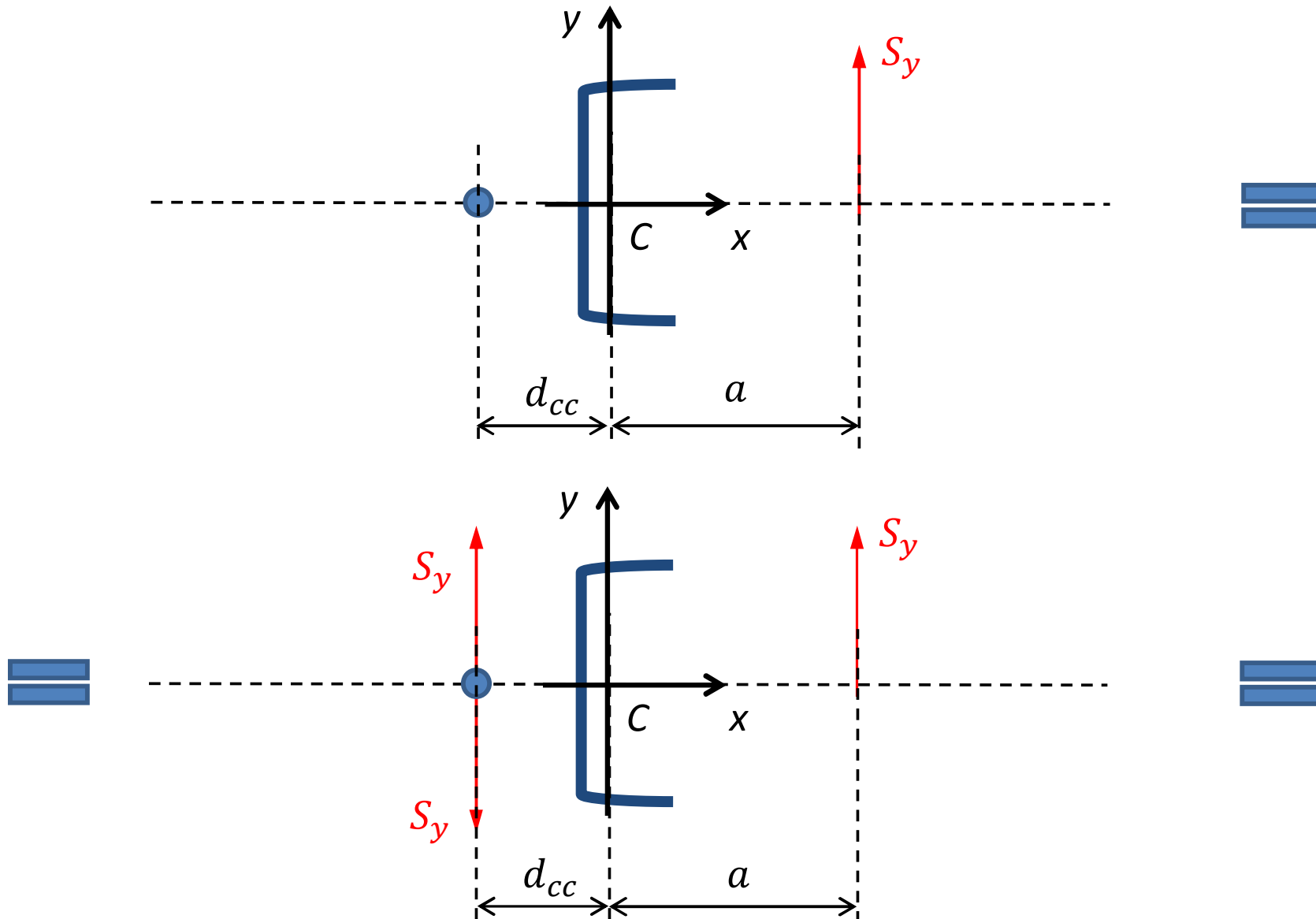
4. Centro de cisalhamento em vigas de parede fina com S.T. aberta

Por definição, o centro de cisalhamento da seção transversal de uma viga de seção transversal uniforme é o ponto geométrico em que, se forem aplicadas forças transversais cujas linhas de ação passam por esse ponto, não haverá torção da seção (em outras palavras, a viga irá fletir sem torcer).

Naturalmente, na maior parte dos casos, é impossível garantir que as linhas de ação das forças transversais passem sempre pelo centro de cisalhamento da seção transversal. Contudo, observando que qualquer sistema de forças transversais pode ser representado pela combinação de uma força transversal (aplicada no centro de cisalhamento da seção) e um torque, fica evidente a necessidade de conhecermos a localização do centro de cisalhamento para qualquer tipo de seção transversal, seja ela aberta ou fechada.

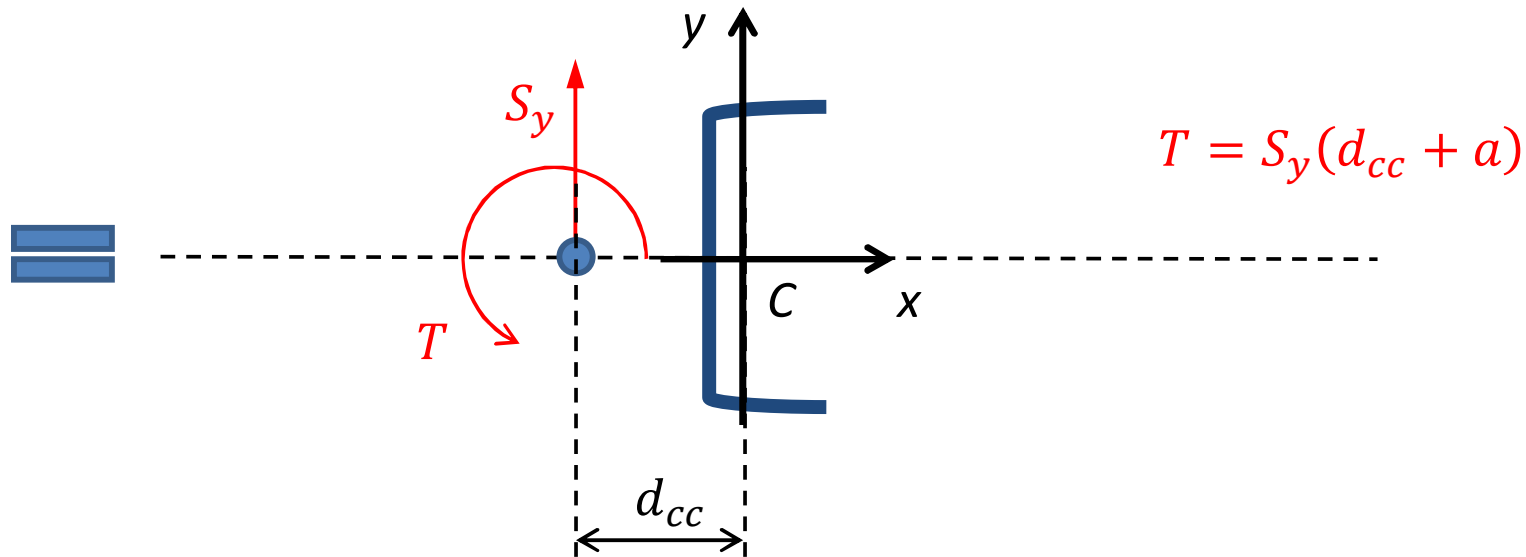


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

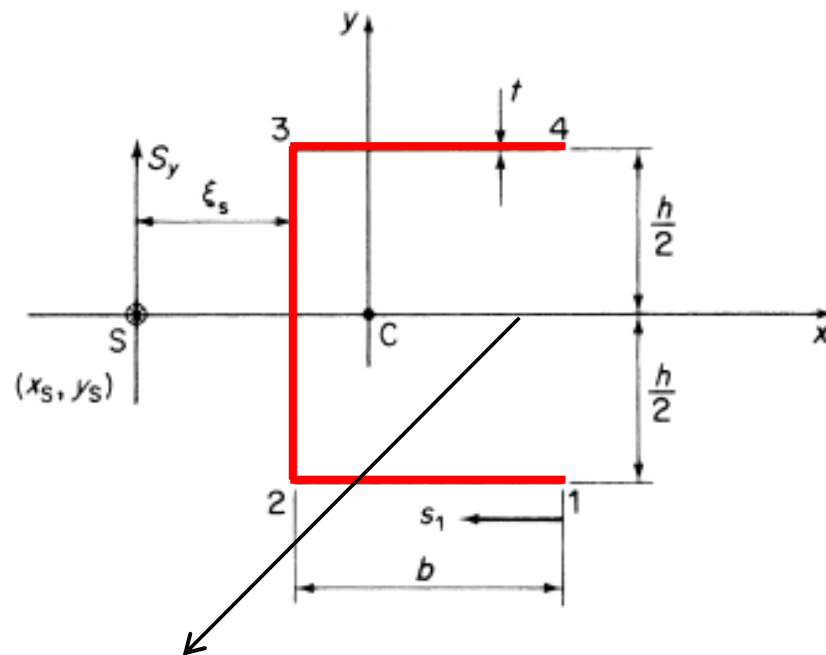


Neste caso, guardadas as hipóteses de linearidade (do material e geométrica), podemos aplicar o Princípio da Superposição para determinar as tensões decorrentes do carregamento transversal (aplicado sobre o centro de cisalhamento) e da torção pura.

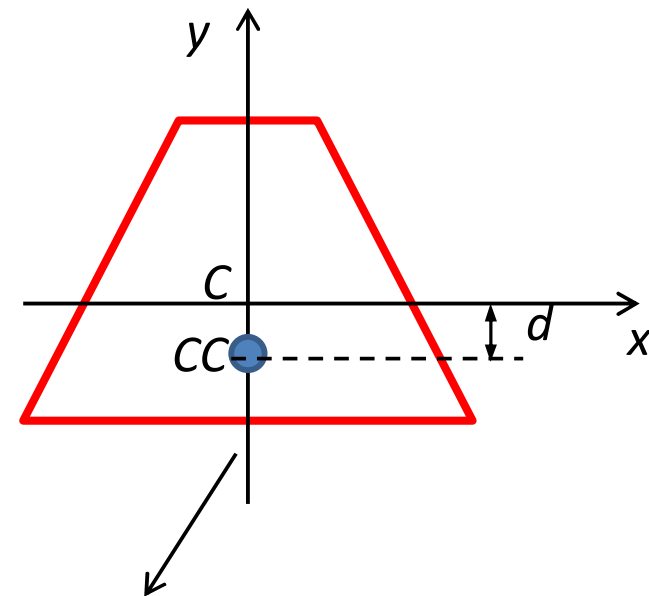


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Decorre da definição do centro de cisalhamento que, se a seção possuir um (ou mais) eixos de simetria, o centro de cisalhamento deverá estar, obrigatoriamente sobre tal (ou tais) eixo(s), como ilustram os exemplos abaixo:



(eixo x é um eixo de simetria)

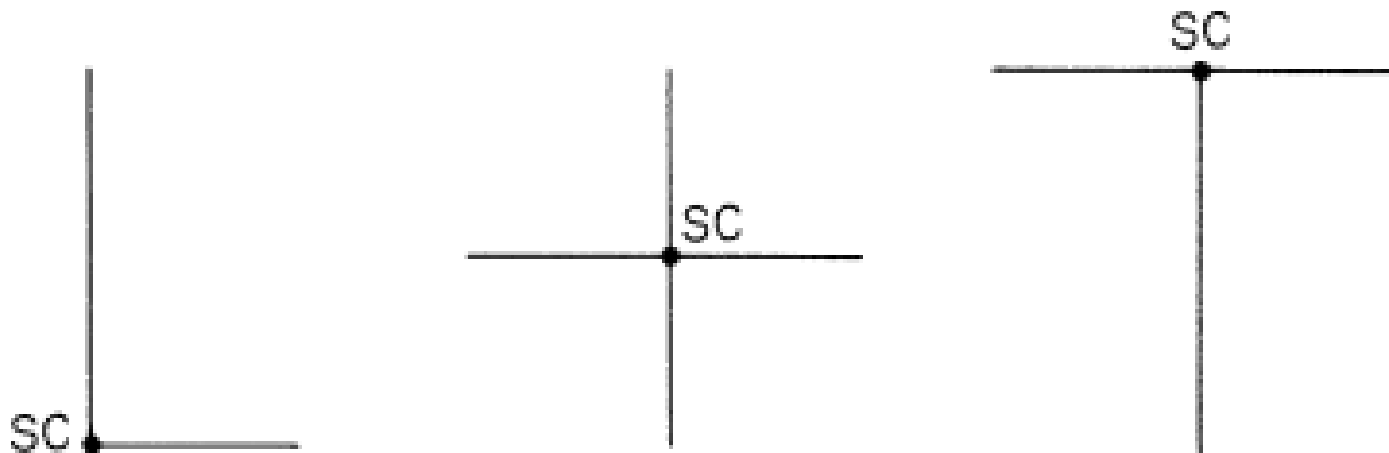


(eixo y é um eixo de simetria)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observamos também que, se a seção for cruciforme, ou na forma de L, o centro de cisalhamento estará situado no ponto de intersecção dos segmentos retos, como ilustram os exemplos abaixo:





Determinação da posição do centro de cisalhamento:

A posição do centro de cisalhamento é feita simplesmente impondo-se a igualdade dos momentos das forças (externas e internas) em relação a um eixo paralelo ao eixo longitudinal. O polo escolhido para a determinação dos momentos deve ser o que mais facilita os cálculos, dando-se preferência ao polo que leva a braços (das forças internas) simples de serem avaliados.

No caso em que inexitem eixos de simetria na seção, deve-se determinar as coordenadas do centro de cisalhamento em duas etapas:

1. Determina-se a posição x_{cc} aplicando-se apenas uma força transversal S_y (admitindo-se que sua linha de ação passa pelo centro de cisalhamento);
2. Determina-se a posição y_{cc} aplicando-se apenas uma força transversal S_x (admitindo-se que sua linha de ação passa pelo centro de cisalhamento).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

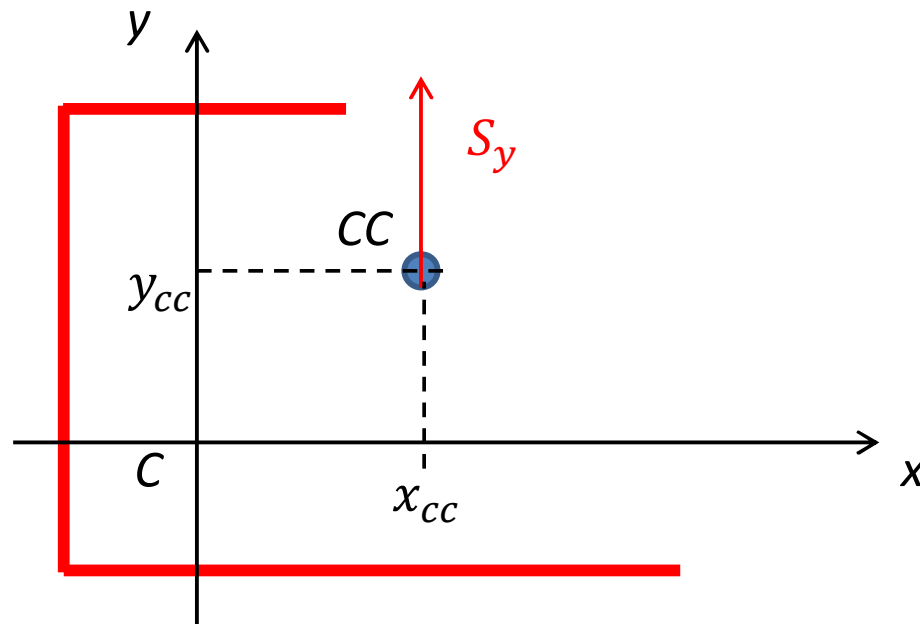


Fig.1: Determinação da posição x_{cc} do centro de cisalhamento



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

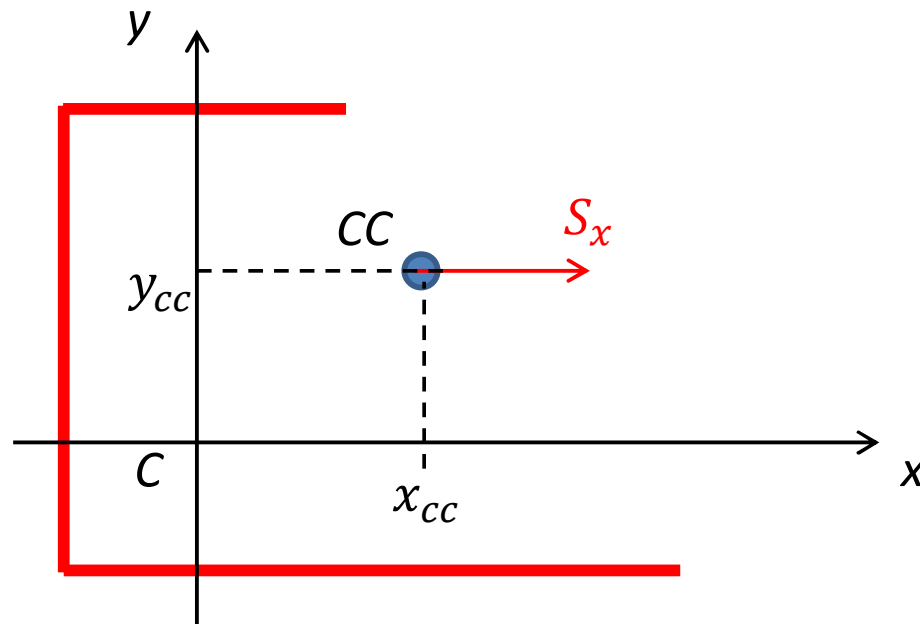


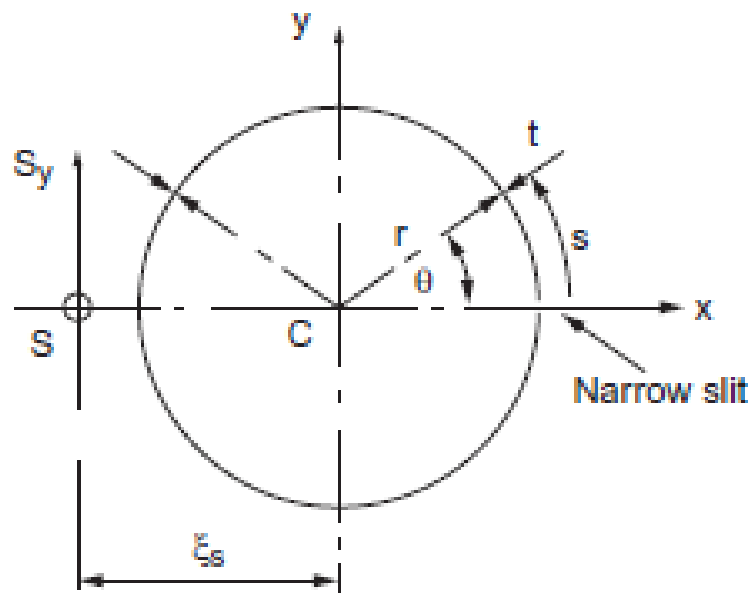
Fig.2: Determinação da posição y_{cc} do centro de cisalhamento.



5. Exemplo de aplicação

5.1) Determine a distribuição do fluxo de cisalhamento para a viga de parede fina e seção circular aberta indicada na figura abaixo, decorrente da aplicação de uma força transversal S_y aplicada no centro de cisalhamento da seção. Note que existe um corte longitudinal na posição definida pela coordenada angular $\theta = 0$.

Dados: S_y, r, t .





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Como a força transversal está aplicada (por hipótese) no centro de cisalhamento da seção aberta, o fluxo de cisalhamento é constante ao longo da parede da viga (não há torção do perfil). Assim, o fluxo fica dado por (vide slide #11):

$$q(s) = -\frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s t x ds - \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_0^s t y ds$$

Como $S_x = 0$ e os eixos x e y são eixos de simetria da seção (ou seja, $I_{xy} = 0$), resulta:

$$q(s) = -\frac{S_y}{I_{xx}} \int_0^s t y ds \quad \Leftrightarrow \quad q(\theta) = -\frac{S_y}{I_{xx}} \int_0^\theta t (r \sin \theta) r d\theta = \frac{S_y t r^2}{I_{xx}} \cos \theta \Big|_0^\theta$$

$$q(\theta) = \frac{S_y t r^2}{I_{xx}} (\cos \theta - 1)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como:
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_p}{2} = \frac{2\pi r^3 t}{2} = \pi r^3 t$$

Teremos:
$$q(\theta) = \frac{S_y}{\pi r} (\cos\theta - 1), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

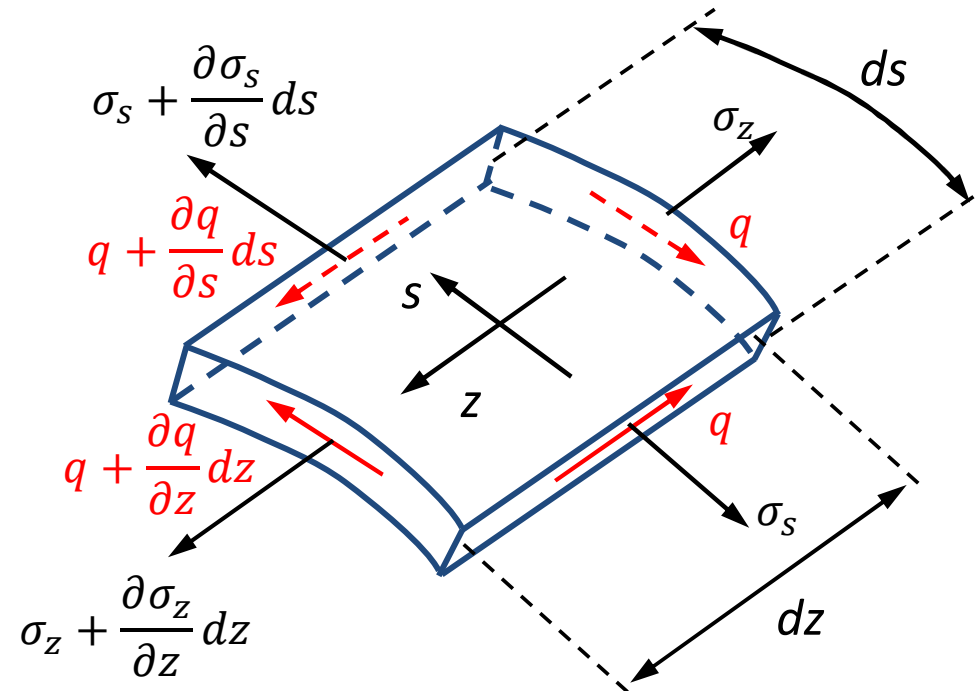
O fluxo de cisalhamento máximo (em valor absoluto) ocorre em $\theta = \pi$ e vale:

$$|q_{\text{máx}}| = \frac{2S_y}{\pi r}$$

Observamos, ainda, que o sinal do fluxo de cisalhamento resulta negativo para todos os valores de θ (com exceção feita para os valores extremos $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ para os quais o fluxo é nulo). O sinal negativo mostra que o sentido correto do fluxo de cisalhamento, nas faces de orientação positiva, é contrário ao sentido positivo considerado na convenção de sinais (vide slide seguinte), ocorrendo, portanto, no sentido horário nas faces de orientação positiva, e no sentido anti-horário nas faces de orientação negativa.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

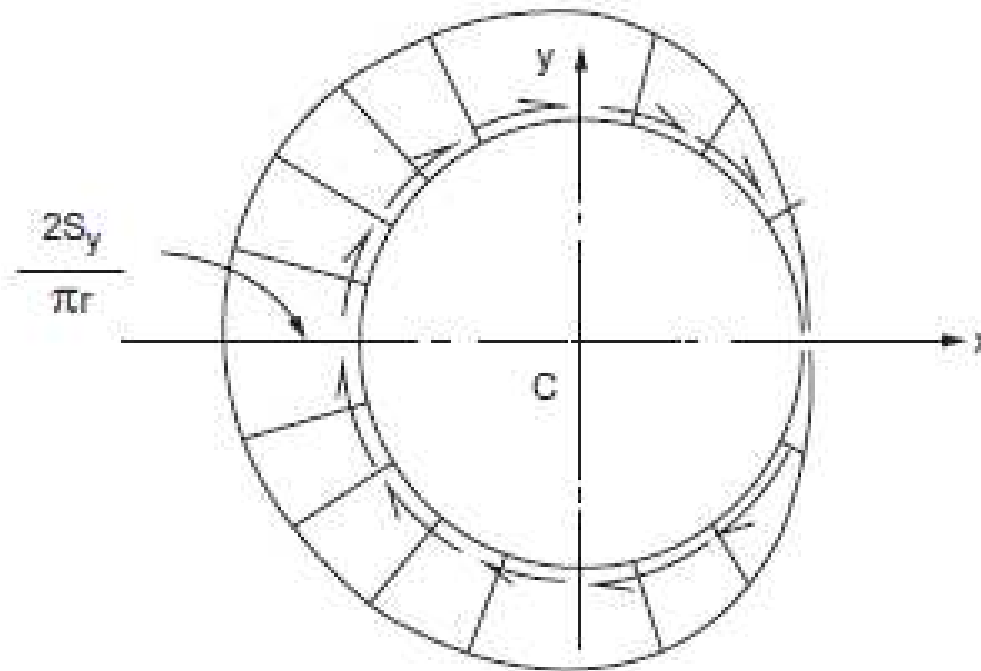


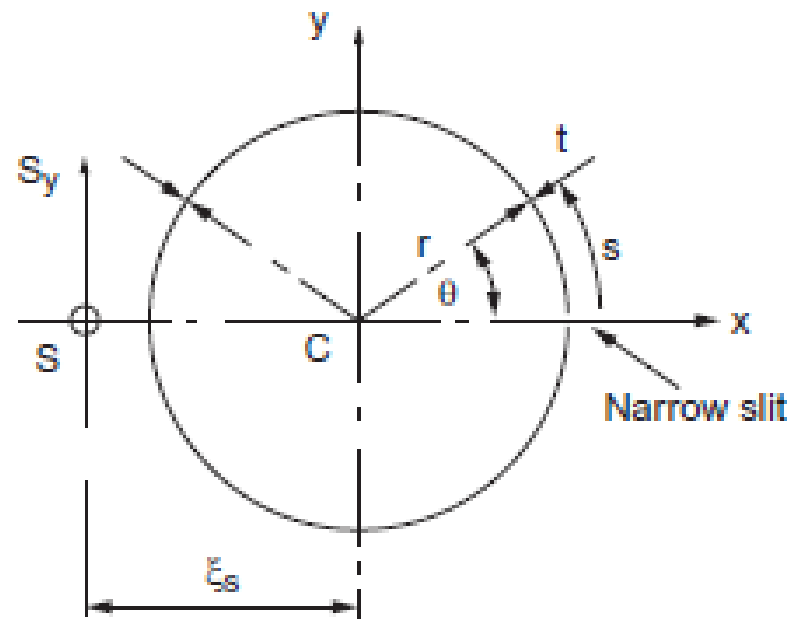
Fig.3: Distribuição do fluxo de cisalhamento e sentido do fluxo nas faces de orientação positiva.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

5.2) Determine a posição ξ_s do centro de cisalhamento da viga de parede fina e seção circular aberta indicada na figura abaixo. Note que existe um corte longitudinal na posição definida pela coordenada angular $\theta = 0$.

Dados: r, t .

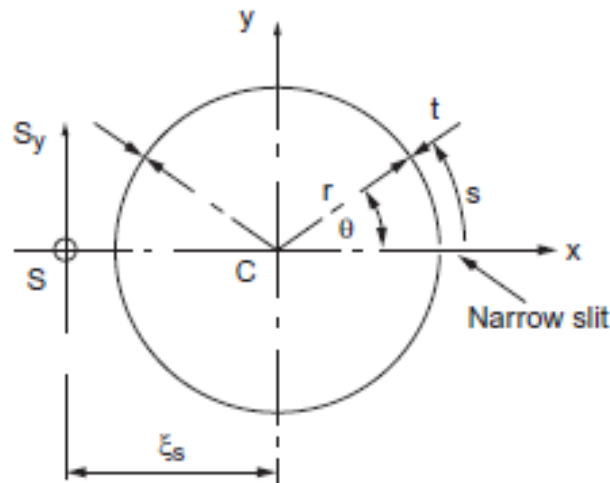




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Naturalmente o centro de cisalhamento deve estar situado, obrigatoriamente, sobre o eixo de simetria da seção (no caso, sobre o eixo Cx). Considerando que a linha de ação da força transversal S_y diste ξ_s do centroide C , teremos pela imposição do equilíbrio de momentos (em relação ao eixo longitudinal Cz), tomando C como pólo:



$$-S_y \xi_s = \int_0^L q(s) p(s) ds$$

Onde $p(s)$ corresponde ao braço das forças infinitesimais $q(s)ds$ para o cálculo do momento das forças internas em relação ao pólo escolhido. Neste caso:

$$q(\theta) = \frac{S_y}{\pi r} (\cos \theta - 1), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$p(s) = r$$

$$ds = r d\theta$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$-S_y \xi_s = \frac{S_y r^2}{\pi r} \int_0^{2\pi} (\cos \theta - 1) d\theta$$

$$-\xi_s = \frac{r}{\pi} (\sin \theta - \theta) \Big|_0^{2\pi}$$

$$-\xi_s = \frac{r}{\pi} (-2\pi)$$

$$\xi_s = 2r$$

O sinal positivo encontrado para ξ_s indica que o centro de cisalhamento se encontra, de fato, como estava indicado na figura (à esquerda da seção).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

[1] Megson, T. H. G. *Aircraft Structures for Engineering Students*. 6th ed., Butterworth-Heinemann, 2016. Cap.17: Shear of beams.

17.1 – General stress, strain and displacement relationships for open and single-cell closed section thin-walled beams (p.537-541)

17.2 – Shear of open section beams (p.541-550)

Problems (p.559-568)