



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #02

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

08/08/2025

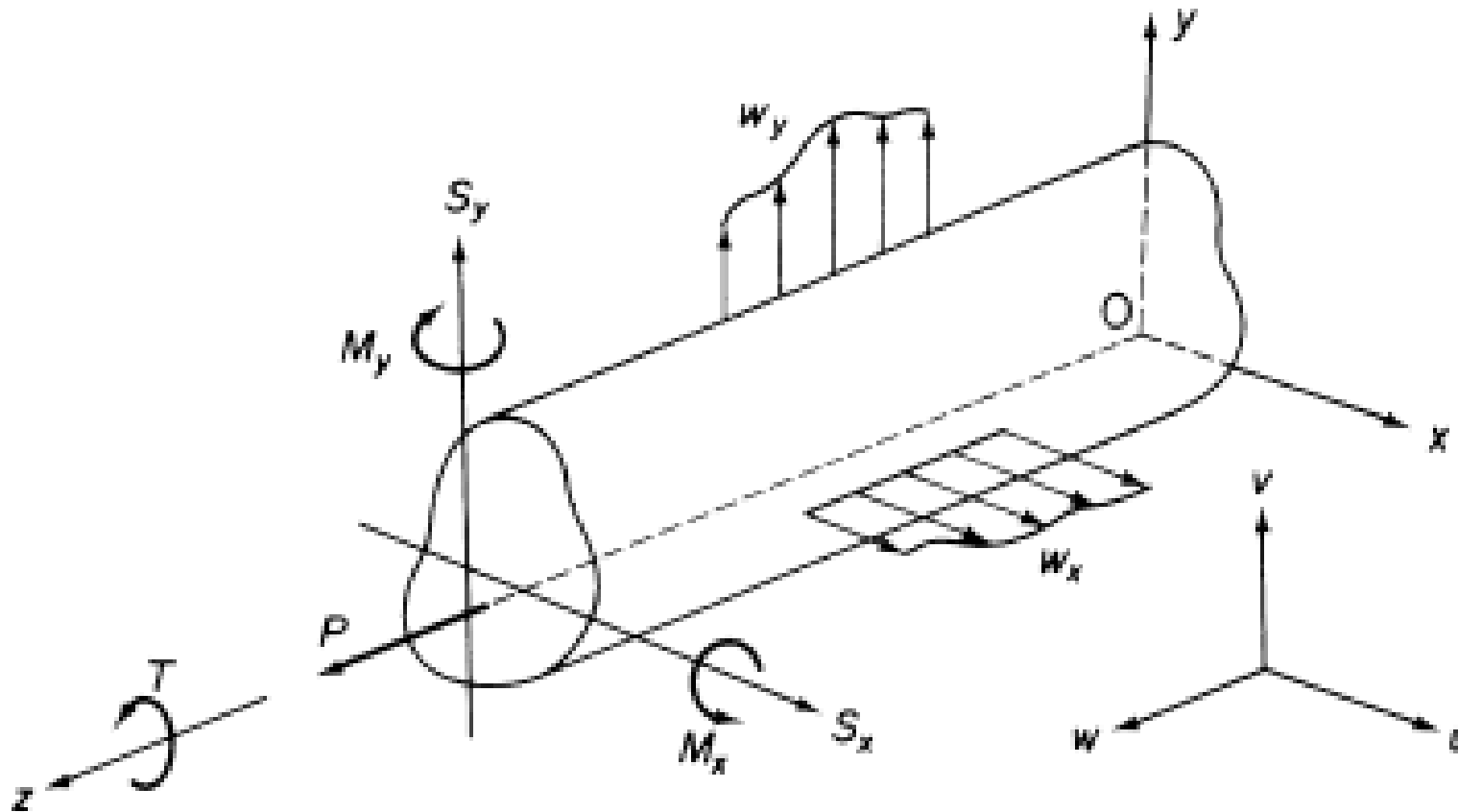


Flexão Assimétrica

1. Esforços solicitantes em vigas: notação e convenção de sinais
2. Equações para a flexão assimétrica (tensões)
3. Posição da linha neutra
4. Equações diferenciais de equilíbrio
5. Equações para a flexão assimétrica (deflexões)
6. Exemplo de aplicação



1. Esforços solicitantes em vigas: notação e convenção de sinais





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Onde:

$Oxyz$: sistema arbitrário de eixos, porém considerando que o eixo Oz é paralelo ao eixo longitudinal da viga e que os eixos Ox e Oy sejam paralelos às seções transversais;

M_x = momento fletor em torno do eixo Ox (positivo se causar tensões de tração no 1º quadrante, conforme indicado na figura);

M_y = momento fletor em torno do eixo Oy (positivo se causar tensões de tração no 1º quadrante, conforme indicado na figura);

T = momento de torção (positivo se o vetor estiver saindo da S.T., como indicado na figura);

S_x = força cortante na direção do eixo Ox (mesma convenção de sinais usada para as tensões de cisalhamento);

S_y = força cortante na direção do eixo Oy (mesma convenção de sinais usada para as tensões de cisalhamento);

P = força normal atuante na seção transversal (positiva se provocar tensões de tração);

w_x, w_y = forças distribuídas por unidade de comprimento (correspondendo às forças distribuídas devidas ao arrasto e à sustentação);

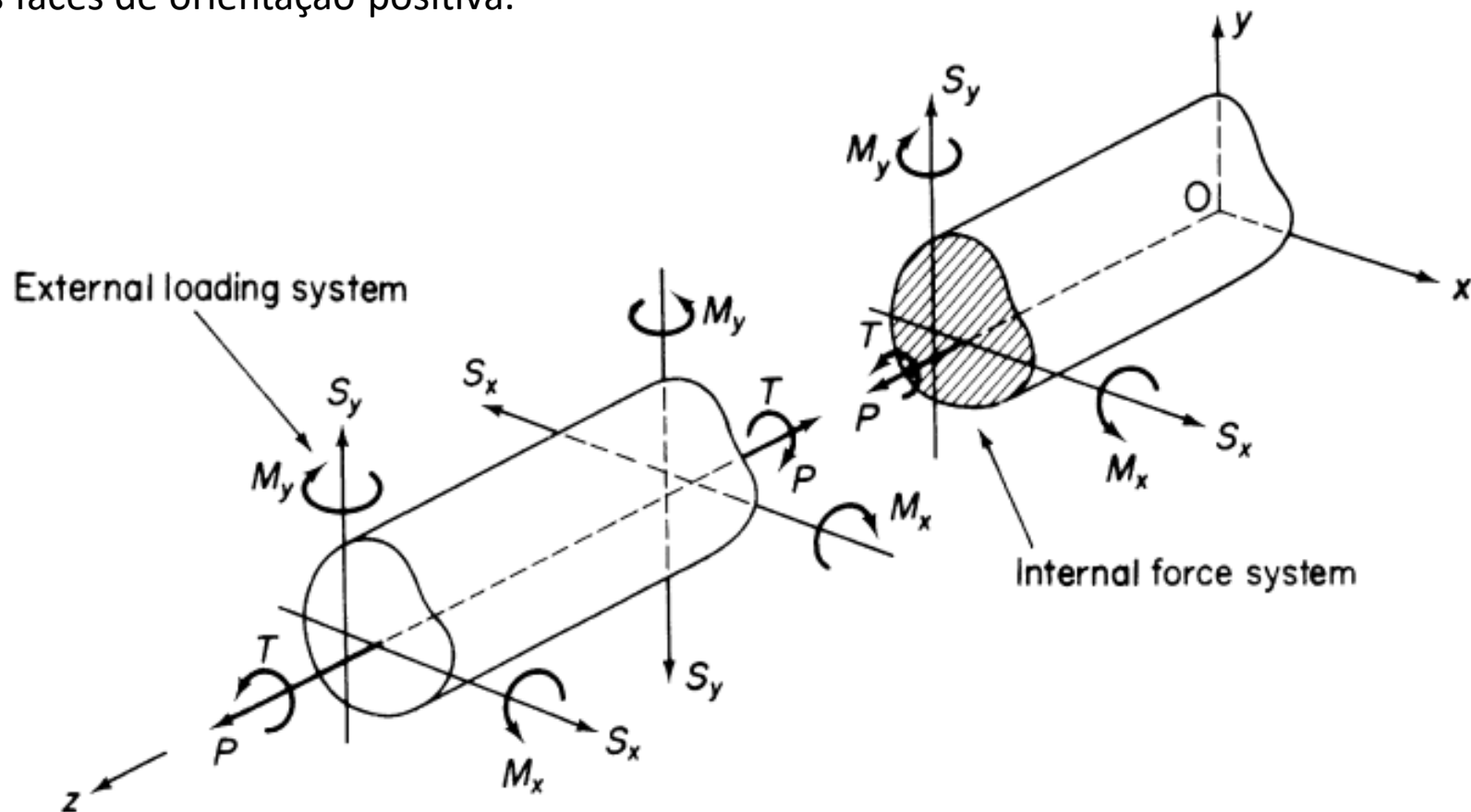
u, v, w = componentes de deslocamento segundo os três eixos coordenados.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para os esforços solicitantes (esforços internos):

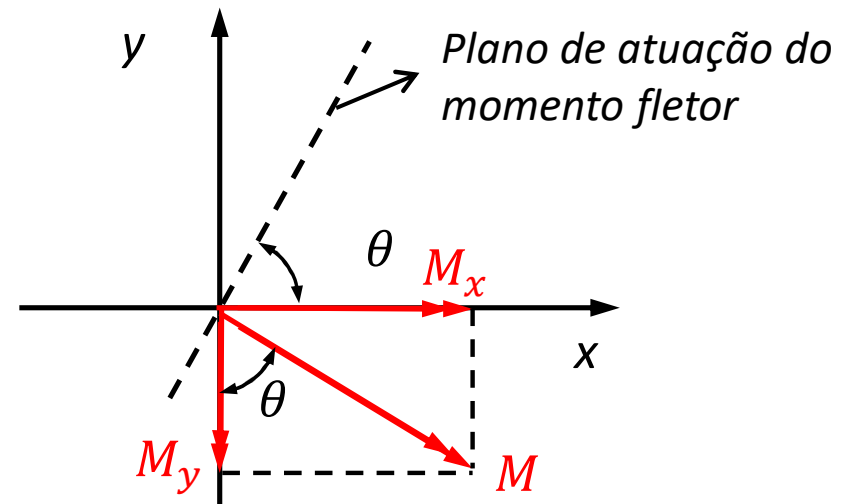
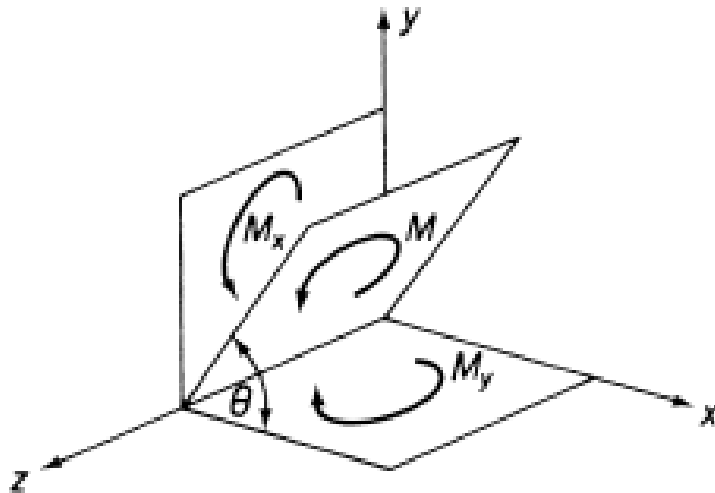
- Nas faces de orientação positiva: emprega-se a mesma convenção de sinais vista para os esforços externos;
- Nas faces de orientação negativa: esforços positivos têm sentidos contrários aos assinalados nas faces de orientação positiva.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Componentes do Momento Fletor:



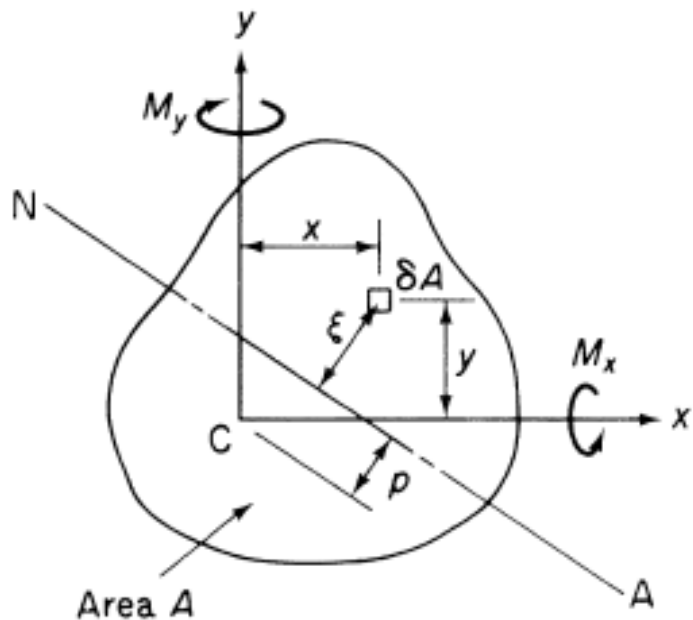
$$M_x = M \sin \theta$$

$$M_y = M \cos \theta$$



2. Equações para a flexão assimétrica (tensões)

Consideremos uma viga com seção transversal arbitrária sob ação de momentos flettores M_x e M_y que fletam a viga em torno de um dado eixo que terá, portanto, tensões de flexão nulas (linha neutra da seção). Vamos admitir que o sistema de eixos empregado tenha sua origem no centroide da seção transversal e que a linha neutra esteja a uma certa distância p do centroide.



Considerando que o material da viga seja homogêneo, isotrópico e tenha comportamento linear-elástico, a tensão normal σ_z será dada por:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z$$

Da hipótese de Euler-Bernoulli, podemos escrever:

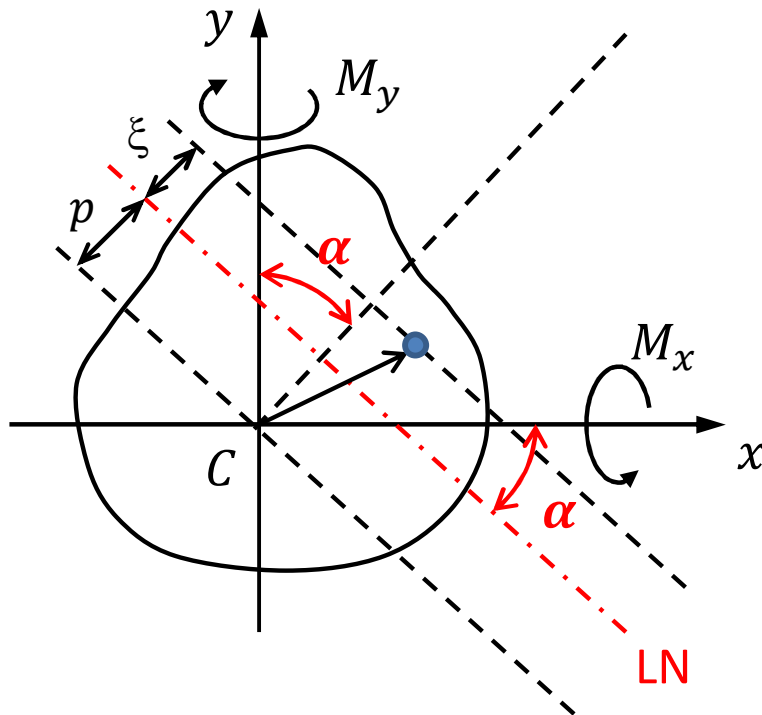
$$\varepsilon_z = \kappa \xi$$

Logo:

$$\sigma_z = E \kappa \xi$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Considerando que não haja força normal agindo na seção transversal, teremos:

$$\iint \sigma_z dA = 0$$

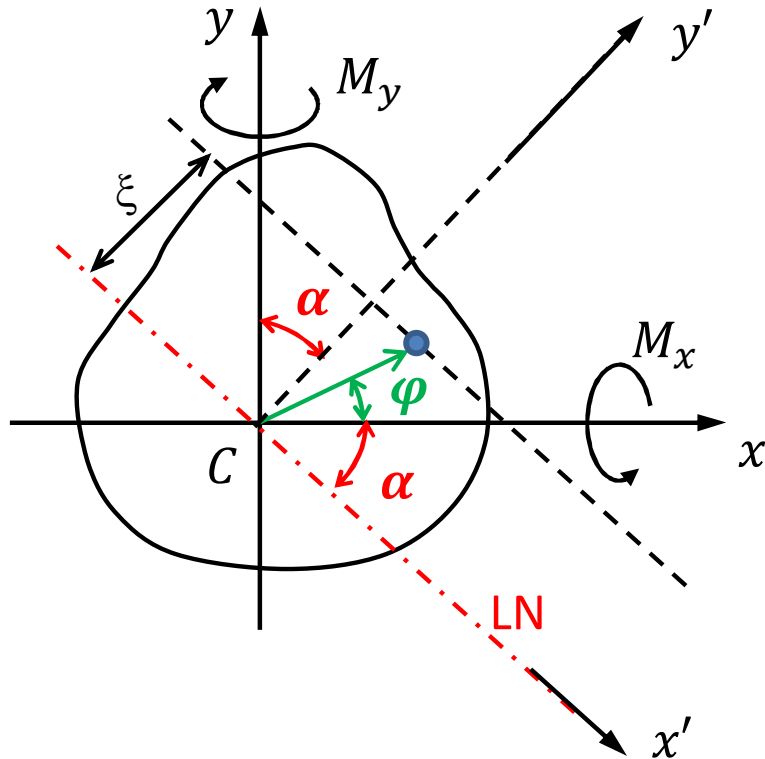
$$E\kappa \iint \xi dA = 0$$

$$\iint \xi dA = 0$$

Conclui-se, portanto, que a linha neutra deve passar, obrigatoriamente, pelo centroide da seção transversal, que foi tomado como a origem do sistema de coordenadas. Assim, para $p = 0$, virá:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = (r\cos\varphi)\vec{e}_x + (r\sin\varphi)\vec{e}_y$$

$$\vec{r} = r\cos(\varphi + \alpha)\vec{e}_{x'} + r\sin(\varphi + \alpha)\vec{e}_{y'}$$

$$\vec{r} = (r\cos\varphi\cos\alpha - r\sin\varphi\sin\alpha)\vec{e}_{x'} + \\ + (r\sin\varphi\cos\alpha + r\cos\varphi\sin\alpha)\vec{e}_{y'}$$

$$\vec{r} = (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\vec{e}_{x'} + \underbrace{(y\cos\alpha + x\sin\alpha)\vec{e}_{y'}}_{= \xi}$$

Logo, se $\xi = x\sin\alpha + y\cos\alpha$, então:

$$\sigma_z = E\kappa\xi = E\kappa(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

As componentes M_x e M_y do momento fletor ficam assim definidas:

$$M_x = \iint_A \sigma_z y dA = E\kappa \iint_A (xy \operatorname{sen} \alpha + y^2 \operatorname{cos} \alpha) dA = E\kappa \left[\operatorname{sen} \alpha \iint_A xy dA + \operatorname{cos} \alpha \iint_A y^2 dA \right]$$

$$M_y = \iint_A \sigma_z x dA = E\kappa \iint_A (x^2 \operatorname{sen} \alpha + xy \operatorname{cos} \alpha) dA = E\kappa \left[\operatorname{sen} \alpha \iint_A x^2 dA + \operatorname{cos} \alpha \iint_A xy dA \right]$$

Mas, lembrando que:

$$I_{xx} = \iint_A y^2 dA \quad I_{yy} = \iint_A x^2 dA \quad I_{xy} = \iint_A xy dA$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Teremos: $M_x = E\kappa[I_{xx}\cos\alpha + I_{xy}\sin\alpha]$

$$M_y = E\kappa[I_{xy}\cos\alpha + I_{yy}\sin\alpha]$$

Ou, na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = E\kappa \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix}$$

Retornando à expressão de σ_z :

$$\sigma_z = E\kappa\xi = E\kappa(x\sin\alpha + y\cos\alpha) = \{y \quad x\}E\kappa \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} = \{y \quad x\} \left(\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\sigma_z = \frac{\{y \ x\}}{(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \left(\begin{bmatrix} I_{yy} & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{\{y \ x\}}{(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \begin{Bmatrix} M_x I_{yy} - M_y I_{xy} \\ -M_x I_{xy} + M_y I_{xx} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_z = \frac{(M_y I_{xx} - M_x I_{xy})}{(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} x + \frac{(M_x I_{yy} - M_y I_{xy})}{(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} y$$

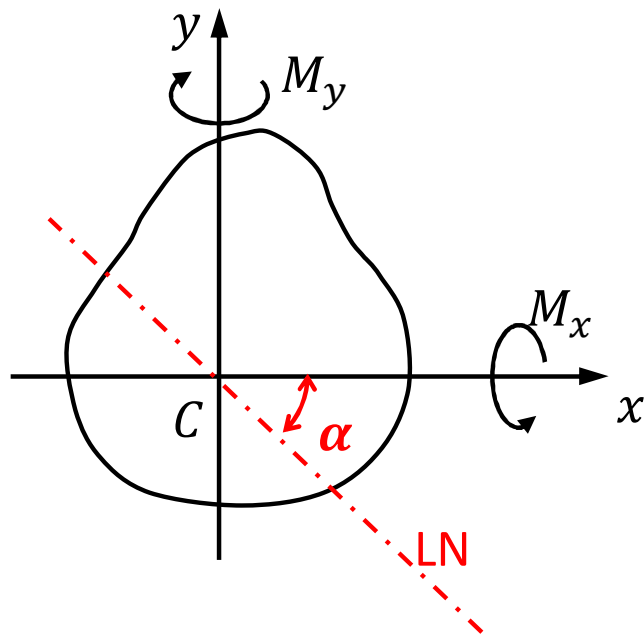
Note que, no caso particular em que $I_{xy} = 0$, a equação acima leva a:

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I_{yy}} x + \frac{M_x}{I_{xx}} y$$



3. Posição da linha neutra

Para encontrar a posição da linha neutra na seção transversal, basta impor que:



$$\sigma_z = \frac{(M_y I_{xx} - M_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} x + \frac{(M_x I_{yy} - M_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} y = 0$$

$$y_{LN} = \frac{(M_x I_{xy} - M_y I_{xx})}{(M_x I_{yy} - M_y I_{xy})} x_{LN}$$

E, como $\tan \alpha = -y_{LN}/x_{LN}$, teremos:

$$\tan \alpha = \frac{(M_y I_{xx} - M_x I_{xy})}{(M_x I_{yy} - M_y I_{xy})}$$

Vemos, do exposto, que a posição da linha neutra depende, de modo geral, tanto do carregamento quanto das propriedades geométricas seccionais.



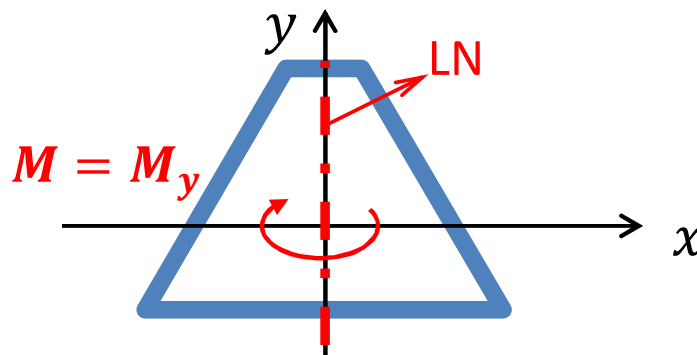
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Retomando as relações entre o momento fletor resultante e suas componentes M_x e M_y (vide slide #6) e substituindo-as na expressão anterior, obtemos:

$$\tan \alpha = \frac{(M_y I_{xx} - M_x I_{xy})}{(M_x I_{yy} - M_y I_{xy})} \quad \begin{matrix} M_x = M \sin \theta \\ M_y = M \cos \theta \end{matrix} \quad \tan \alpha = \frac{(I_{xx} \cos \theta - I_{xy} \sin \theta)}{(I_{yy} \sin \theta - I_{xy} \cos \theta)}$$

Conclui-se, portanto, que o plano de atuação do momento fletor não é, em geral, ortogonal à linha neutra! De fato, apenas em condições bem específicas isso ocorre, como:

1) Quando $\theta = 0$ e $I_{xy} = 0$: $\tan \alpha \rightarrow \infty$, ou seja: $\alpha = \pi/2$

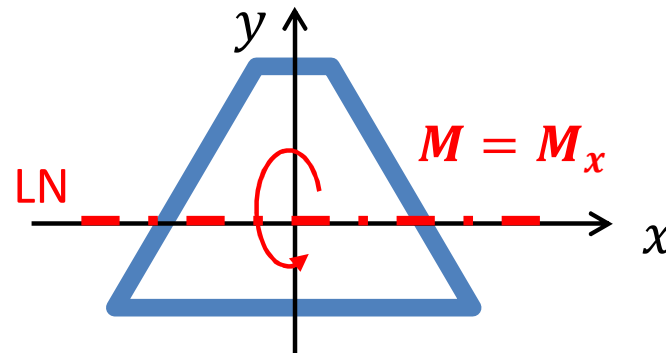


linha neutra: $x_{LN} = 0$



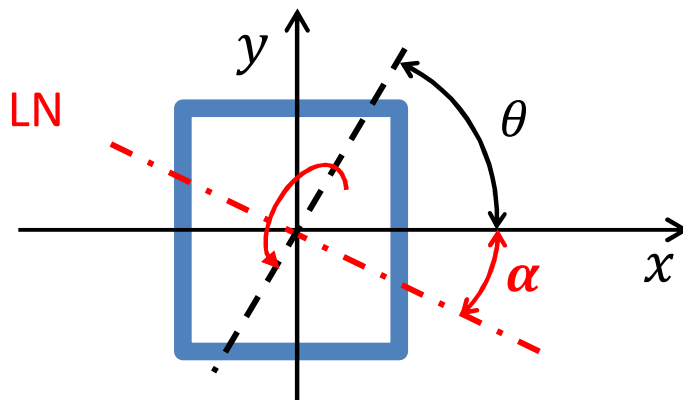
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2) Quando $\theta = \pi/2$ e $I_{xy} = 0$: $\tan\alpha = 0$, ou seja: $\alpha = 0$



linha neutra: $y_{LN} = 0$

3) Quando $I_{xy} = 0$ e $I_{xx} = I_{yy}$: $\tan\alpha \cdot \tan\theta = 1$, ou seja: $\alpha + \theta = \pi/2$.

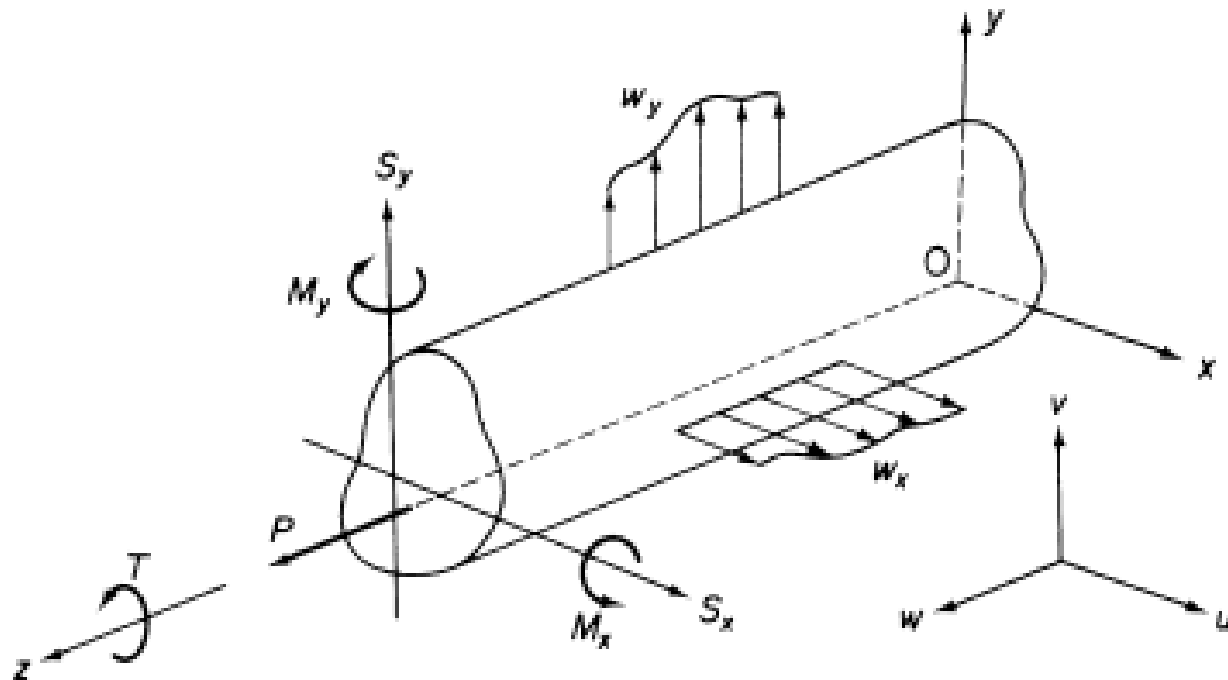


linha neutra:

$$y_{LN} = -\frac{M_y}{M_x} x_{LN} \Leftrightarrow y_{LN} = -\frac{1}{\tan\theta} x_{LN}$$



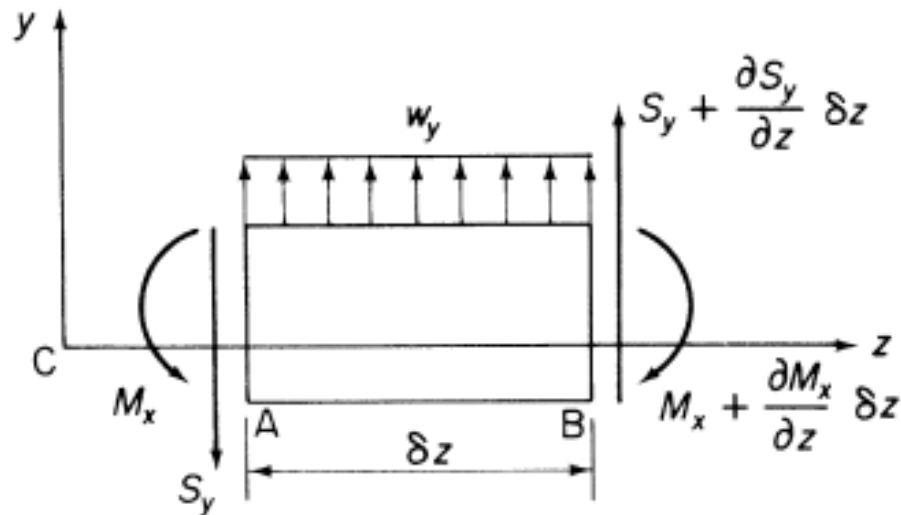
4. Equações diferenciais de equilíbrio





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Equilíbrio de forças e de momentos segundo o plano vertical Oyz para um elemento infinitesimal de comprimento dz :



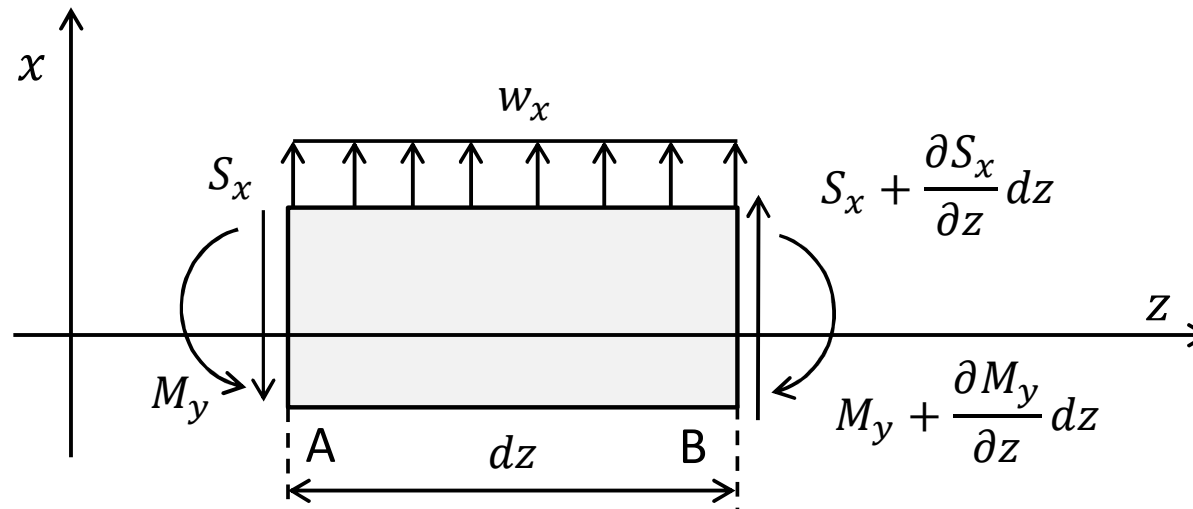
$$\left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial z} dz \right) - S_y + w_y dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_y = -\frac{\partial S_y}{\partial z}}$$

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial z} dz \right) - M_x - S_y dz + w_y \frac{(dz)^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_y = \frac{\partial M_x}{\partial z}}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Analogamente, impondo o equilíbrio de forças e de momentos segundo o plano horizontal Oxz para um elemento infinitesimal de comprimento dz :



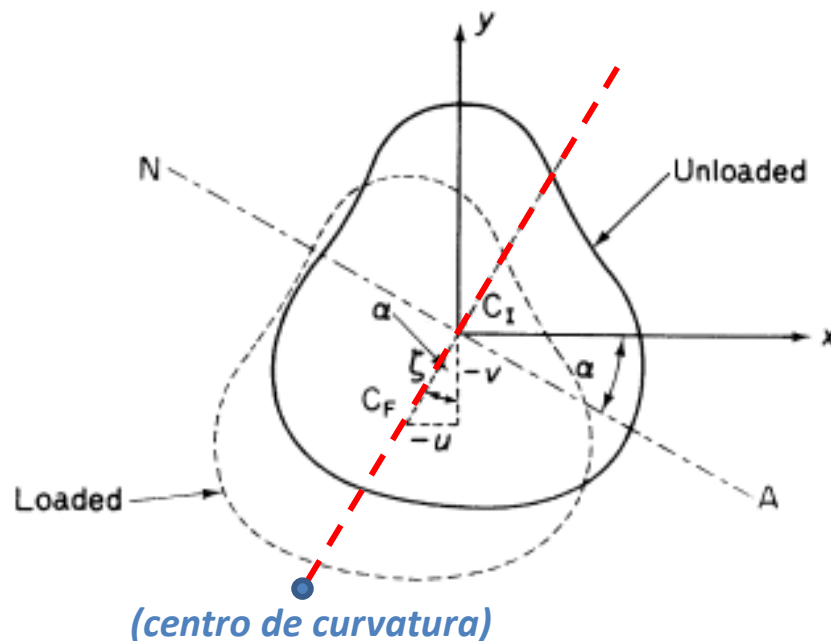
$$\left(S_x + \frac{\partial S_x}{\partial z} dz \right) - S_x + w_x dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_x = -\frac{\partial S_x}{\partial z}}$$

$$-\left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial z} dz \right) + M_y + S_x dz - w_x \frac{(dz)^2}{2} = \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_x = \frac{\partial M_y}{\partial z}}$$



5. Equações para a flexão assimétrica (deflexões)

Pelo estudo anterior, vimos que uma viga sob ação de momentos fletores M_x e M_y flete em torno da linha neutra, cuja inclinação (α) em relação a eixos que passam pelo centroide da S.T. pode ser determinada conforme a equação apresentada no slide #13. Consideremos que a deflexão do centroide de uma dada S.T. da viga na direção perpendicular à linha neutra da S.T. seja ζ (vide figura abaixo), com componentes $-u$ (na direção do eixo Cx) e $-v$ (na direção do eixo Cy).



Da figura:

$$-v = \zeta \cos \alpha$$

$$-u = \zeta \sin \alpha$$

Ou seja:

$$\begin{Bmatrix} v \\ u \end{Bmatrix} = -\zeta \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Se considerarmos que a inclinação da linha neutra seja constante (ou seja, não varie ao longo do comprimento da viga), os centros de curvatura (para diferentes posições dos centroides das seções transversais) ficarão sempre no mesmo plano^(*). Neste caso, pode-se empregar a seguinte expressão para obtermos a curvatura do eixo central:

$$\kappa \cong \frac{d^2\zeta}{dz^2}$$

Logo, derivando duas vezes as componentes de deslocamento (u e v) do eixo central com relação à coordenada z , virá:

$$\begin{Bmatrix} d^2v/dz^2 \\ d^2u/dz^2 \end{Bmatrix} = -\frac{d^2\zeta}{dz^2} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} = -\kappa \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix}$$

Porém, recuperando a relação vista no slide #11;

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = E\kappa \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \kappa \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix}$$

(*) A reta pontilhada na cor vermelha no slide anterior mostra o traço deste plano.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim:

$$\begin{Bmatrix} d^2v/dz^2 \\ d^2u/dz^2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{E} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \quad \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \begin{Bmatrix} d^2v/dz^2 \\ d^2u/dz^2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \begin{bmatrix} I_{yy} & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \quad \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{(M_x I_{xy} - M_y I_{xx})}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \\ \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{(M_y I_{xy} - M_x I_{yy})}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \end{array} \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para o caso particular em que a viga possui seção transversal com pelo menos um eixo de simetria, teremos $I_{xy} = 0$ e, neste caso, as relações vistas assumem as seguintes formas simplificadas (vistas nos cursos introdutórios de Mecânica dos Sólidos):

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{M_y}{EI_{yy}} \qquad \frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_{xx}}$$

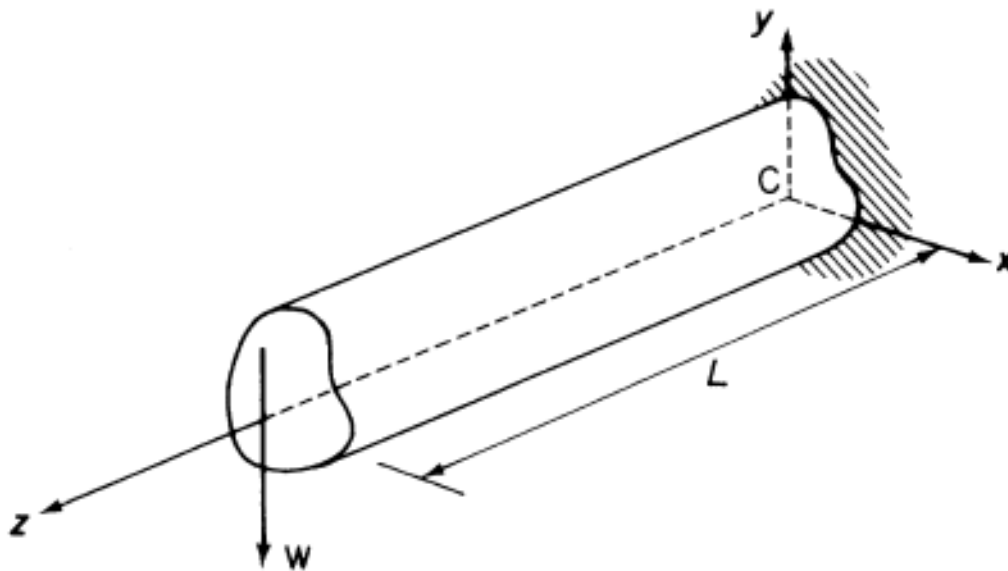
Realizando as integrações sucessivas das relações obtidas, e aplicando as condições de contorno em cada caso, é possível obter o campo de deslocamentos do eixo central da viga.



6. Exemplo de aplicação

Example 16.12

Determine the horizontal and vertical components of the tip deflection of the cantilever shown in Fig. 16.24. The second moments of area of its unsymmetrical section are I_{xx} , I_{yy} , and I_{xy} .



Formulário:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{(M_x I_{xy} - M_y I_{xx})}{E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)}$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{(M_y I_{xy} - M_x I_{yy})}{E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Os momentos fletores neste caso são dados por:

$$M_x = W(L - z) \qquad M_y = 0$$

As expressões para $u''(z)$ e para $v''(z)$ ficam então:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{WI_{xy}}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}(L - z)$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{WI_{xy}}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\left(Lz - \frac{z^2}{2} + A_1\right)$$

$$u(z) = \frac{WI_{xy}}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\left(\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} + A_1z + A_2\right)$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{-WI_{yy}}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}(L - z)$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{-WI_{yy}}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\left(Lz - \frac{z^2}{2} + B_1\right)$$

$$v(z) = \frac{-WI_{yy}}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\left(\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} + B_1z + B_2\right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Condições de contorno:

$$u'(0) = 0 \quad \longrightarrow \quad A_1 = 0$$

$$u(0) = 0 \quad \longrightarrow \quad A_2 = 0$$

$$u(z) = \frac{WI_{xy}}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \left(\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right)$$

$$u(L) = \frac{WI_{xy}L^3}{3E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}$$

$$v'(0) = 0 \quad \longrightarrow \quad B_1 = 0$$

$$v(0) = 0 \quad \longrightarrow \quad B_2 = 0$$

$$v(z) = \frac{-WI_{yy}}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \left(\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right)$$

$$v(L) = \frac{-WI_{yy}L^3}{3E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}$$

E o deslocamento resultante é dado, em módulo, por:

$$\zeta(L) = \sqrt{u^2(L) + v^2(L)} = \frac{WL^3}{3E} \frac{\sqrt{I_{xy}^2 + I_{yy}^2}}{(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

Nota: Observe que para o carregamento dado teremos $\theta = \pi/2 = cte$ (vide figura abaixo) e portanto:

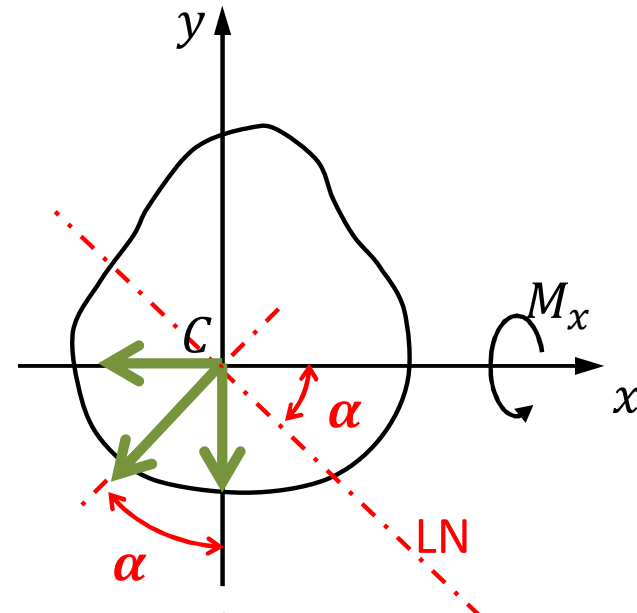
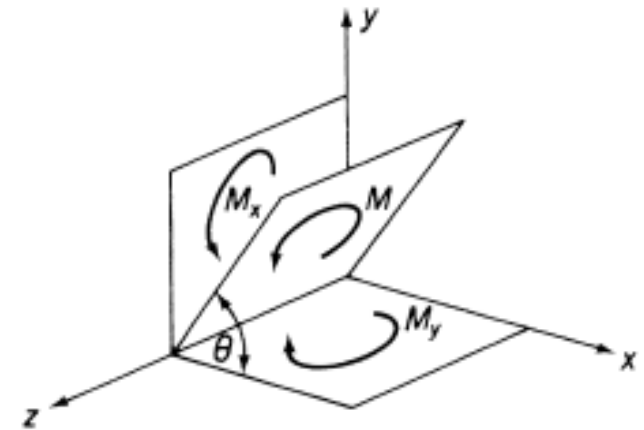
$$\tan \alpha = \frac{(I_{xx} \cos \theta - I_{xy} \sin \theta)}{(I_{yy} \sin \theta - I_{xy} \cos \theta)} = -\frac{I_{xy}}{I_{yy}}$$

Ou seja: a inclinação da linha neutra é constante e, desta forma, as fórmulas indicadas nos slides #20 e #21 podem ser aplicadas sem problema.

Considerando por exemplo $I_{xy} < 0$ e $I_{xx}I_{yy} > I_{xy}^2$, teremos:

$$\tan \alpha = -\frac{I_{xy}}{I_{yy}} > 0$$

$$\left[\begin{array}{l} u(L) = \frac{WI_{xy}L^3}{3E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} < 0 \\ v(L) = \frac{-WI_{yy}L^3}{3E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} < 0 \\ \frac{u(L)}{v(L)} = -\frac{I_{xy}}{I_{yy}} = \tan \alpha > 0 \end{array} \right.$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ainda, para o caso particular em que pelo menos um dos eixos é um eixo de simetria da seção teremos $I_{xy} = 0$ e, neste caso:

$$u(L) = \frac{WI_{xy}L^3}{3E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} = 0 \qquad v(L) = -\frac{WI_{yy}L^3}{3E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} = -\frac{WL^3}{3EI_{xx}}$$

$$\zeta(L) = \sqrt{u^2(L) + v^2(L)} = \frac{WL^3}{3EI_{xx}}$$

...resgatando resultados já conhecidos da Mecânica dos Sólidos.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

[1] Megson, T. H. G. *Aircraft Structures for Engineering Students*. 6th ed., Butterworth-Heinemann, 2016. Cap.16: Bending of open and closed thin-walled beams.

16.1 – Symmetrical bending (p.484-492)

16.2 – Unsymmetrical bending (p.492-499)

16.3 – Deflections due to bending (p.499-514)

16.4 – Calculation of section properties (p.514-522)

16.5 – Applicability of bending theory (p.523)