



PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II – PSub – 10/12/2025

Duração: 120 minutos

É permitido apenas o uso de calculadoras simples (quatro operações + raiz quadrada)

Não é permitido o uso de calculadoras científicas, celulares, relógios ou outros

equipamentos eletrônicos.

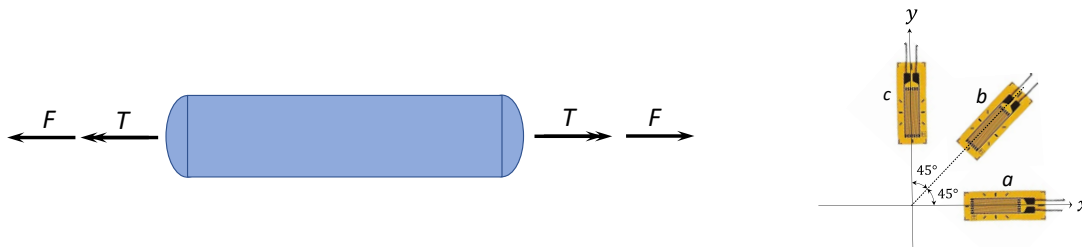
Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

1ª Questão (3,0 pontos)

À superfície de um tanque cilíndrico, inicialmente descarregado, é colada uma roseta orientada a 45° . Em seguida o tanque é pressurizado com uma pressão $p = 5 \text{ MPa}$ e é carregado por torques T e forças de tração F conforme a figura. O tanque tem raio médio $r = 40 \text{ mm}$ e espessura de parede $t = 2 \text{ mm}$. Após a aplicação das cargas as leituras dos extensômetros são $\varepsilon_a = 700\mu$, $\varepsilon_b = 800\mu$ e $\varepsilon_c = 250\mu$. Sabendo que o tanque é feito de aço, com módulo de elasticidade $E = 210 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,27$, pede-se determinar

- a) o valor do torque T ;
- b) o valor da força de tração F ;

Nota: usar a fórmula do momento polar de inércia para um tubo de parede fina ($I_p = 2\pi r^3 t$)



Resolução:

Para a roseta a 45° :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = 700\mu$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_c = 250\mu$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 650\mu$$

- a) dos esforços aplicados, só o torque causa distorção

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{Tr}{GI_p} \Rightarrow T = \frac{GI_p}{r} (2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c))$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 82,7 \text{ GPa}$$

$$I_p = 2\pi r^3 t = 804 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow T = 1080 \text{ Nm}$$

(1,5 pts)



- b) A tensão normal σ_y na parede do vaso é causada pela pressão (tensão longitudinal e pela força de tração, enquanto a tensão normal σ_y só é causada pela pressão (tensão circunferencial):

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{pr}{2t}$$

$$\sigma_y = \frac{pr}{t}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{E} \left[\frac{F}{A} + (1 - 2\nu) \frac{pr}{2t} \right]$$

$$\Rightarrow F = A \left[E \varepsilon_x - (1 - 2\nu) \frac{pr}{2t} \right]$$

$$\Rightarrow F = 2\pi r t \left[E \varepsilon_x - (1 - 2\nu) \frac{pr}{2t} \right] = 62,3 \text{ kN}$$

(1,5 ptos)

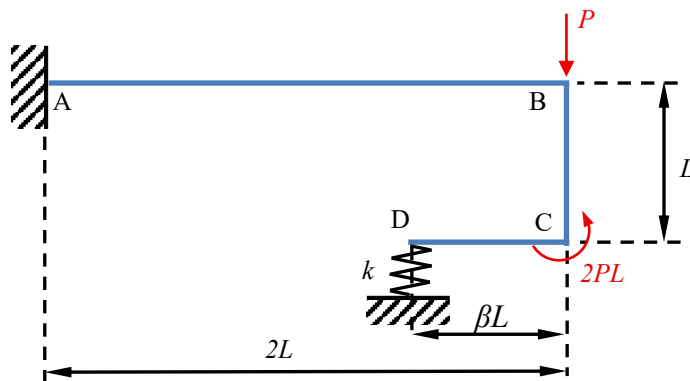


2ª Questão (4,0 pontos)

A figura abaixo mostra um sistema estrutural formado pelas barras AB, BC e CD (todas de mesma rigidez flexional EI) e pela mola de comportamento linear, e constante $k = 2EI/L^3$, acoplada à extremidade D. Os comprimentos das barras estão assinalados na figura. Para o carregamento indicado na figura, determine:

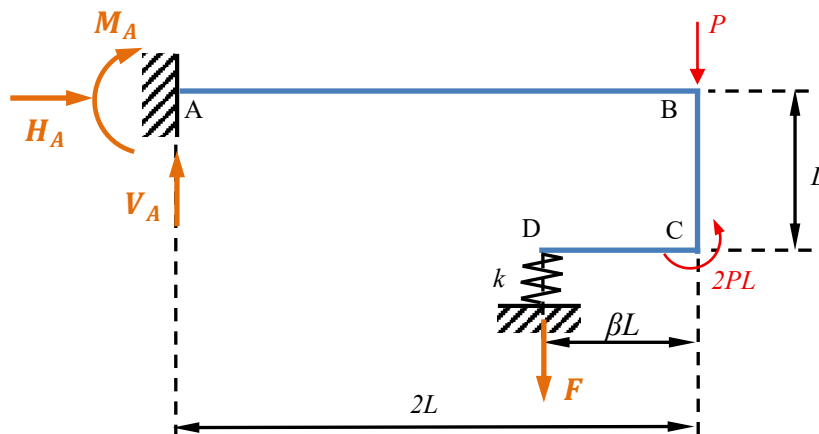
- se existe algum valor para o adimensional β (que regula o comprimento da barra CD) para o qual a mola não exerce força sobre a viga após a aplicação do carregamento indicado. Se existir, indique este valor;
- o deslocamento vertical do ponto B para o caso particular em que $\beta = 1$ (expresse o resultado em função dos parâmetros P, L e EI);

Obs: Despreze em seus cálculos as parcelas da energia complementar devidas às forças normais e forças cortantes nas vigas AB, BC e CD.



Resolução:

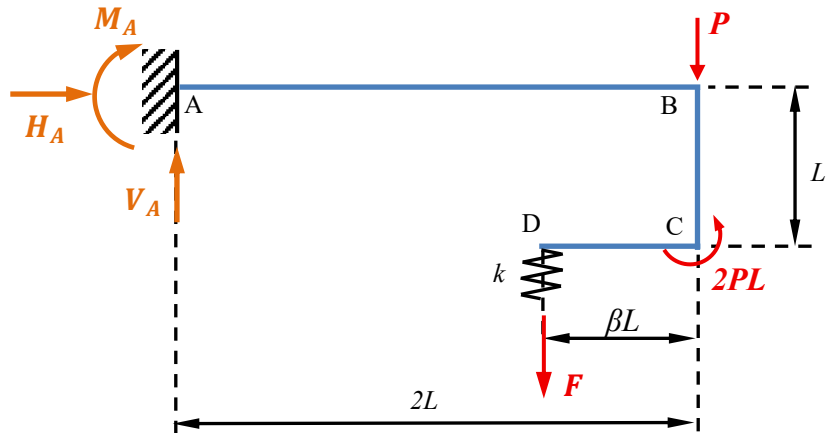
- A figura abaixo mostra o D.C.L. do sistema:



O grau de hiperstaticidade do sistema é:

$$g = 4 - 3 = 1$$

Escolhendo a força F como incógnita hiperestática, teremos a seguinte Estrutura Isostática Fundamental:



Assim, pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{F^2}{2k} + \sum \int_0^{L_i} \frac{M_i^2}{2EI} ds \right) = \frac{F}{k} + \sum \int_0^{L_i} \frac{M_i}{EI} \frac{\partial M_i}{\partial F} ds = 0$$

Resulta:

$$\frac{F}{k} + \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\beta L} (Fs)(s) ds + \int_0^L (F\beta L + 2PL)(\beta L) ds + \int_0^{2L} [(F\beta L + 2PL) - (F + P)s](\beta L - s) ds \right] = 0$$

$$\frac{FL^3}{2EI} + \frac{F\beta^3 L^3}{3EI} + \frac{F\beta^2 L^3}{EI} + \frac{2P\beta L^3}{EI} + \frac{(F\beta + 2P)2\beta L^3}{EI} - \frac{(F\beta + 2P)2L^3}{EI} - \frac{(F + P)2\beta L^3}{EI} + \frac{(F + P)8L^3}{3EI} = 0$$

$$\frac{F}{2} + \frac{F\beta^3}{3} + F\beta^2 + 2P\beta + (F\beta + 2P)2\beta - 2(F\beta + 2P) - 2\beta(F + P) + \frac{8(F + P)}{3} = 0$$

$$F \left[\frac{\beta^3}{3} + 3\beta^2 - 4\beta + \frac{19}{6} \right] + 4P \left[\beta - \frac{1}{3} \right] = 0$$

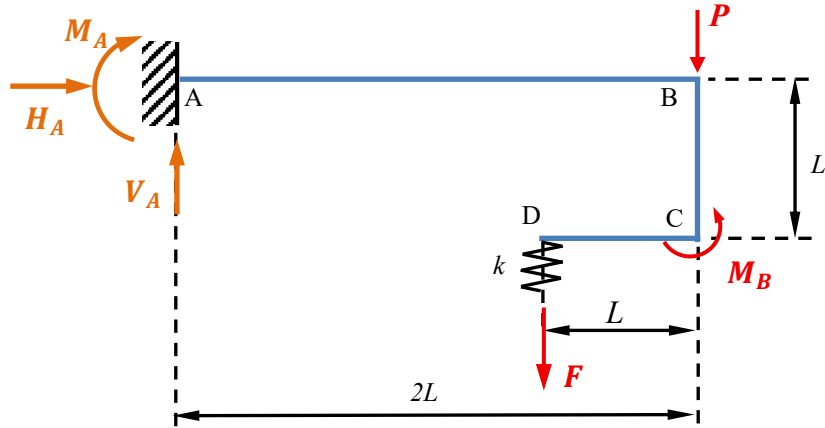
$$F = - \frac{8P(3\beta - 1)}{2\beta^3 + 18\beta^2 - 24\beta + 19}$$

Assim, para $\beta = 1/3$, a força na mola é nula (dentro da hipótese de linearidade geométrica, é claro).

(2,0 pts)



b) O cálculo do deslocamento vertical em B pode ser feito pela aplicação direta do Teorema de Crotti-Engesser. Porém, os esforços aplicados sobre a E.I.F. devem ser considerados independentes. Desta forma, tomando $\beta = 1$, renomeando o momento aplicado em B por M_B e considerando os esforços F , M_B e P independentes entre si, virá:



$$\delta_{v,B} = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{F^2}{2k} + \sum_0^{L_i} \int \frac{M_i^2}{2EI} ds \right) = \frac{1}{EI} \int_0^{2L} [FL + M_B - (P + F)s](-s) ds$$

$$\delta_{v,B} = \frac{1}{EI} \left[-2FL^3 - 2M_B L^2 + (P + F) \frac{8L^3}{3} \right]$$

Em particular, para $\beta = 1$ virá do item anterior:

$$F = -\frac{16}{15}P$$

Então, para $M_B = 2PL$ e $F = -16P/15$, virá:

$$\delta_{v,B} = \frac{PL^3}{EI} \left[\frac{32}{15} - 4 - \frac{8}{45} \right] = -\frac{92}{45} \frac{PL^3}{EI} \cong -2,044 \frac{PL^3}{EI}$$

O sinal negativo indica que o deslocamento vertical será para cima (no sentido contrário ao do esforço P).

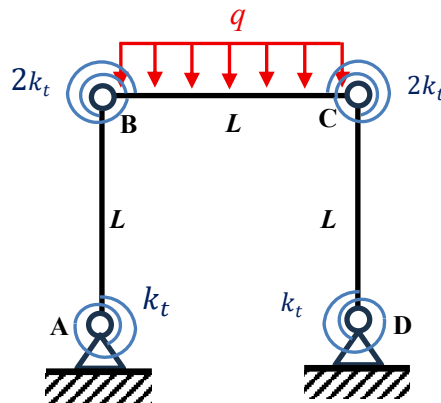
(2,0 pts)



3ª Questão (3,0 pontos)

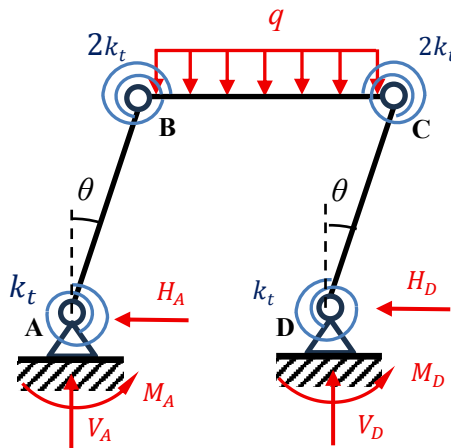
O pórtico da figura abaixo é formado por barras rígidas (indeformáveis), todas de mesmo comprimento (L), e com articulações ideais nas extremidades das três barras. O movimento de corpo rígido é impedido pelo uso de molas de torção (lineares) em todas as extremidades. Nas extremidades A e D, as molas de torção possuem constante k_t ; e, nas extremidades B e C, as molas de torção possuem constante $2k_t$. Sobre a barra horizontal BC é aplicado um carregamento uniformemente distribuído de magnitude q . Considerando apenas a possibilidade de deslocamentos no plano da figura, pede-se:

- O valor crítico do carregamento distribuído (q_{cr}) que causa instabilidade do sistema;
- Uma estimativa do ângulo de rotação das colunas para o caso em que $q/q_{cr} = 1,05$.



Resolução:

- A figura abaixo ilustra a estrutura na configuração deformada (configuração não trivial) e as reações vinculares em A e em D:



Equações de equilíbrio global:

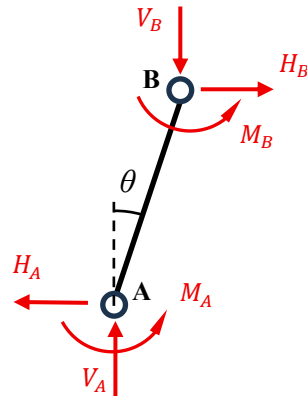
$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A + H_D = 0 \quad \text{Eq. (1)}$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_A + V_D = qL \quad \text{Eq. (2)}$$

$$\sum M_{polo A} = 0 \Leftrightarrow M_A + M_D + V_D L = qL \left(\frac{L}{2} + L \sin \theta \right) \quad \text{Eq. (3)}$$



Equações de equilíbrio (barra AB):

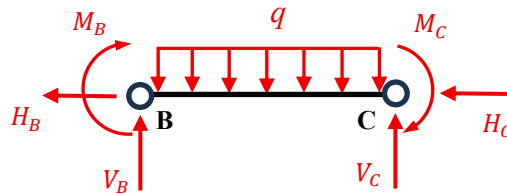


$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A = H_B \quad \text{Eq. (4)}$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_A = V_B \quad \text{Eq. (5)}$$

$$\sum M_{polo A} = 0 \Leftrightarrow M_A + M_B = H_B L \cos \theta + V_B L \sin \theta \quad \text{Eq. (6)}$$

Equações de equilíbrio (barra BC):



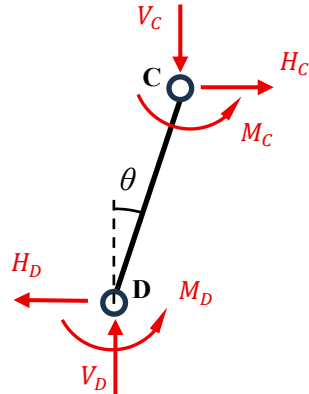
$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_B + H_C = 0 \quad \text{Eq. (7)}$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_B + V_C = qL \quad \text{Eq. (8)}$$

$$\sum M_{polo B} = 0 \Leftrightarrow M_B + M_C + \frac{qL^2}{2} = V_C L \quad \text{Eq. (9)}$$



Equações de equilíbrio (barra CD):



$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_C = H_D \quad \text{Eq. (10)}$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_C = V_D \quad \text{Eq. (11)}$$

$$\sum M_{polo D} = 0 \Leftrightarrow M_C + M_D = H_C L \cos \theta + V_C L \sin \theta \quad \text{Eq. (12)}$$

Considerando, agora, que os momentos nas molas são dados por:

$$M_A = M_D = k_t \theta \quad e \quad M_B = M_C = 2k_t \theta \quad \text{Eq. (13)}$$

Teremos:

Das Eqs.(3)-(13):

$$V_D = \frac{qL}{2} (1 + 2 \sin \theta) - \frac{2k_t}{L} \theta \quad \text{Eq. (14)}$$

Das Eqs (9)-(13):

$$V_C = \frac{4k_t}{L} \theta + \frac{qL}{2} \quad \text{Eq. (15)}$$

Das Eqs.(11)-(14)-(15):

$$\frac{qL}{2} (1 + 2 \sin \theta) - \frac{2k_t}{L} \theta = \frac{4k_t}{L} \theta + \frac{qL}{2} \quad \text{Eq. (16)}$$

Simplificando a Eq.(16), teremos a equação governante (não linearizada):

$$qL^2 \sin \theta - 6k_t \theta = 0 \quad \text{Eq. (17)}$$

Linearizando a equação governante, resulta:

$$(qL^2 - 6k_t) \theta = 0 \quad \text{Eq. (18)}$$

Que leva à carga crítica do sistema:

$$q_{cr} = \frac{6k_t}{L^2}$$

(2,0 ptos)



b). Para obter uma estimativa do ângulo de rotação, podemos considerar os dois primeiros termos da série de Taylor da função $\sin\theta$, em torno de $\theta = 0$:

$$f(\theta) = \sin\theta \cong f(0) + f'(0) \cdot \theta + f''(0) \frac{\theta^2}{2} + f'''(0) \frac{\theta^3}{6}$$

Ou seja:

$$f(\theta) = \sin\theta \cong \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

De forma que a equação governante fica rescrita na forma:

$$qL^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) - 6k_t \theta = 0$$

Ou:

$$\left[qL^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right) - 6k_t \right] \theta = 0$$

De onde temos as soluções:

$$\theta = 0 \text{ (solução trivial, sem interesse)}$$

Ou:

$$qL^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right) - 6k_t = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\theta^2}{6} = \frac{6k_t}{qL^2} = \frac{q_{cr}}{q}$$

Resolvendo para θ :

$$|\theta| = \sqrt{6 \left(1 - \frac{q_{cr}}{q} \right)}$$

Logo, para $q/q_{cr} = 1,05$, virá:

$$|\theta| = \sqrt{6 \left(1 - \frac{1}{1,05} \right)} \cong 0,5345 \text{ rad} \cong 30,6^\circ$$

(1,0 pto)



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

(Folha Adicional)