



PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II – P3 – 03/12/2025

Duração: 120 minutos

É permitido apenas o uso de calculadoras simples (quatro operações + raiz quadrada)

Não é permitido o uso de calculadoras científicas, celulares, relógios ou outros

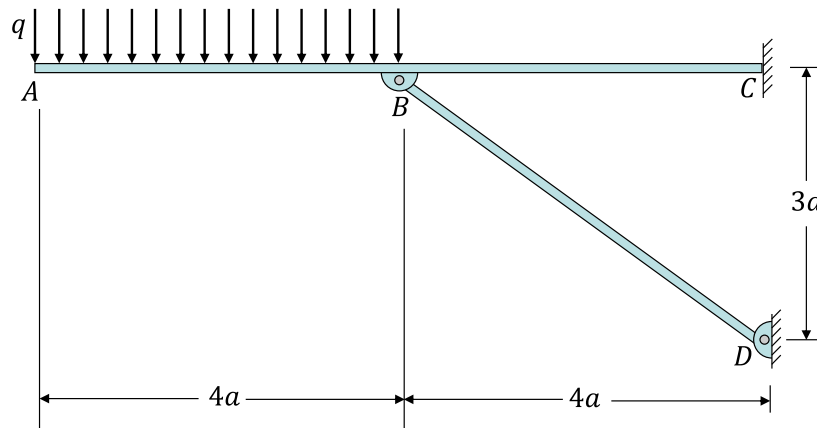
equipamentos eletrônicos.

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

1ª Questão (3,0 pontos)

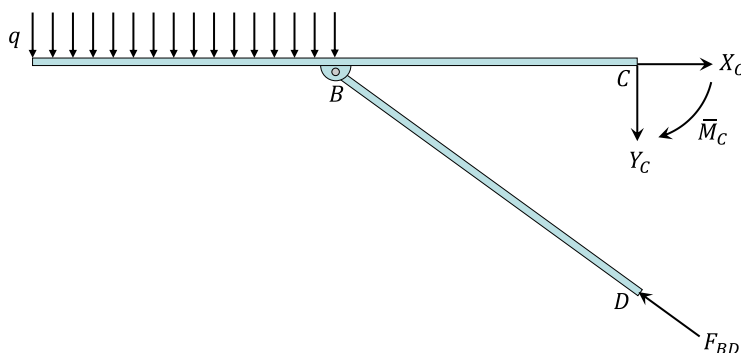
A estrutura da figura é formada por duas barras com rigidez flexional EI . A barra AC está livre em A e engastada em C . A barra BD está articulada em B e em D . Ao trecho AB foi aplicada uma força uniformemente distribuída, vertical, de intensidade q . Pede-se determinar o maior valor de q para não haver flambagem na estrutura.

Nota: despreze o efeito das forças normais e cortantes na energia complementar.



Resolução:

DCL



Equilíbrio: (vamos fazer $L = 4a$ para simplificar e depois substituímos o valor)

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow X_C - \frac{4}{5} F_{BD} = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow \frac{3}{5} F_{BD} - Y_C - qL = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow \frac{qL^2}{2} - Y_C L - \bar{M}_C = 0$$

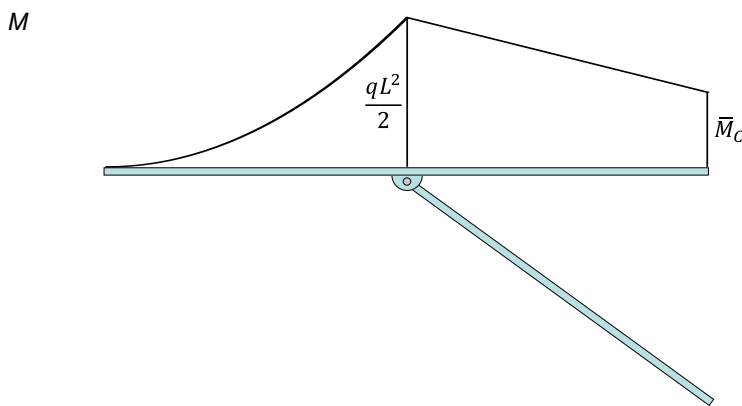
(1,0 pts)



Há quatro incógnitas (X_C , Y_C , $\bar{M}_C$ e F_{BD}) e apenas três equações, então a estrutura é hiperestática com 1 grau de hiperestaticidade. Adotando Y_C como incógnita hiperestática, pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial Y_C} = 0$$

Como só vai interessar a Energia Complementar devida à flexão, façamos o diagrama de momentos fletores, desenhando o momento no lado tracionado de cada barra:



Note que o momento fletor no trecho AB não depende de Y_C , portanto:

$$\frac{\partial U^*}{\partial Y_C} = \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC}(x) \frac{\partial M_{BC}}{\partial Y_C} dx$$

mas, orientando x da direita para a esquerda:

$$M_{BC} = \bar{M}_C + Y_C x = \frac{qL^2}{2} + Y_C(x - L)$$

(Note que foi necessário substituir o valor de $\bar{M}_C$ para ficar com uma única incógnita hiperestática na expressão do momento fletor)

Assim,

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial Y_C} = x - L$$

Portanto:

$$\int_0^L \left(\frac{qL^2}{2} + Y_C(x - L) \right) (x - L) dx = 0 \Rightarrow Y_C = \frac{3}{4} qL = 3qa$$



Substituindo esse valor na equação de equilíbrio na direção vertical:

$$F_{BD} = \frac{35}{12} qL = \frac{35}{3} qa$$

(1,0 pts)

A barra BD é uma barra biarticulada, portanto a sua carga crítica é:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(5a)^2}$$

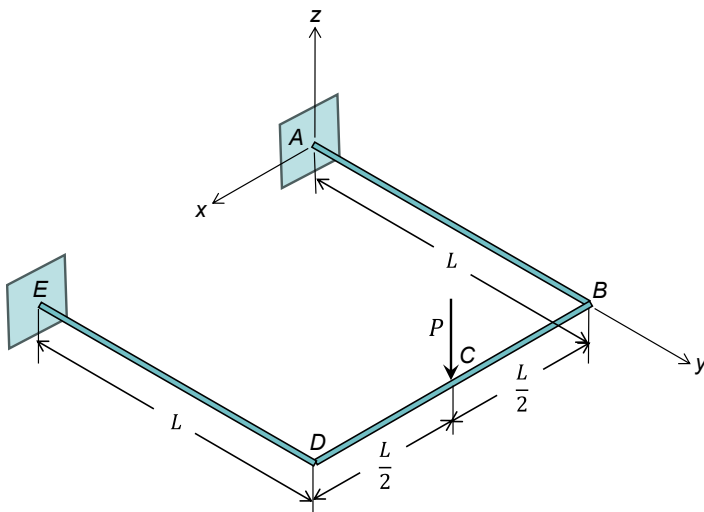
Para obter o valor de q limite, basta igualar essa carga crítica à força na barra BD :

$$\frac{\pi^2 EI}{25 a^2} = \frac{35}{3} q_{cr} a \Rightarrow q_{cr} = \frac{3\pi^2 EI}{875 a^3}$$

(1,0 pts)



2ª Questão (3,5 pontos)



A barra horizontal $ABCDE$ da figura é formada por um arame de rigidez flexional EI , dobrado em ângulos de 90° . As suas extremidades A e E estão engastadas. Em C está aplicada uma força vertical de magnitude P . Pede-se determinar as reações vinculares, apresentando os resultados em um DCL com os valores e os sentidos corretos.

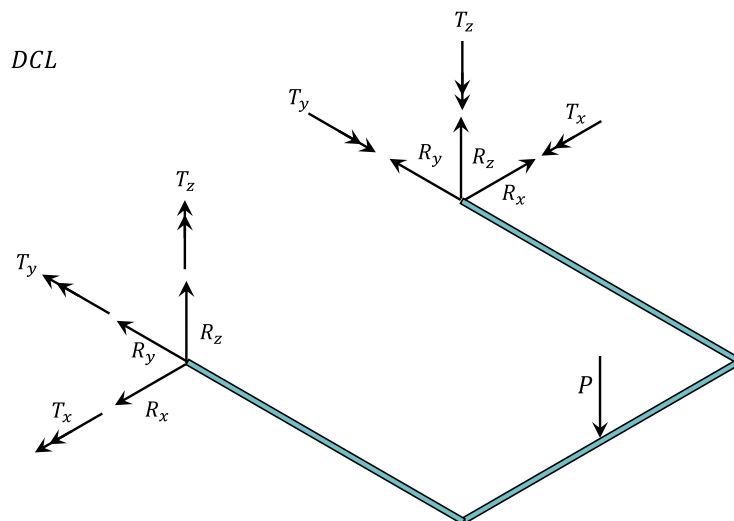
Dado:

$$GI_P = \frac{4}{5}EI$$

Nota: despreze o efeito das forças cortantes na energia complementar.

Resolução:

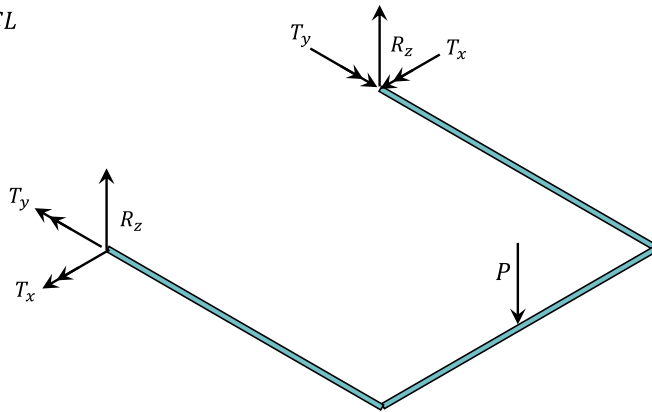
A estrutura é simétrica em relação ao plano vertical que passa por C e é perpendicular ao eixo x . O carregamento é simétrico em relação ao mesmo plano. Então as reações também serão simétricas em relação a esse plano e podemos fazer o DCL considerando essa simetria:



Mas as reações vinculares só aparecem em resposta aos esforços externos. A força P só vai causar forças reativas na direção de z e momentos reativos nas direções x e y . Dessa forma, podemos eliminar várias das reações, obtendo um novo diagrama de corpo livre, só com as reações não nulas:



DCL



Equações de Equilíbrio:

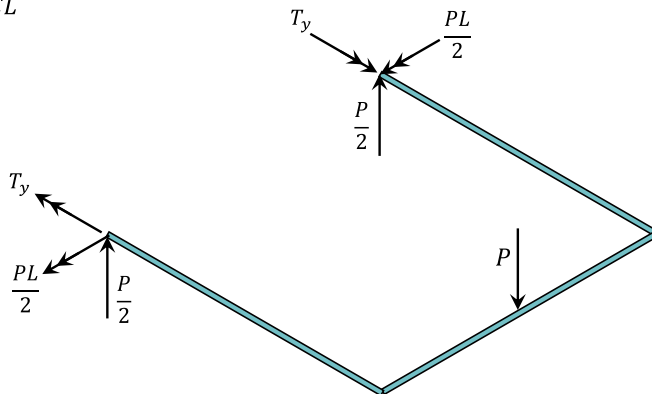
$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow R_z = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma M_{Ax} = 0 \Rightarrow T_x = \frac{PL}{2}$$

$$\Sigma M_{Ay} = 0 \Rightarrow -T_y + T_y + \frac{P}{2}L - P\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Não temos mais nenhuma equação e sobra uma incógnita (T_y). Portanto a estrutura é hiperestática com grau de hiperestaticidade igual a um. Ficamos com o seguinte *DCL*:

DCL



(1,0 pts)

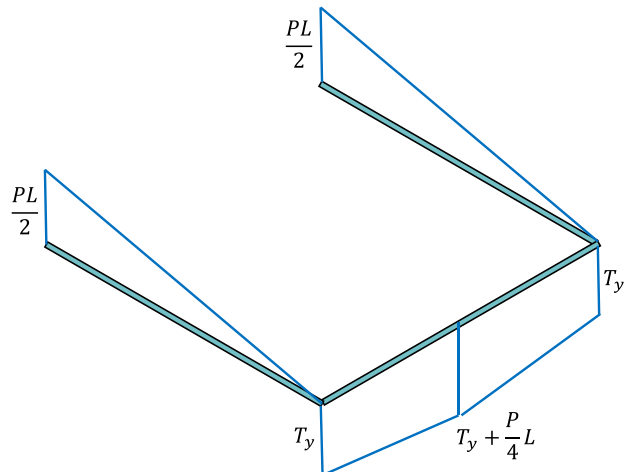
Para calcular T_y usamos o Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial T_y} = 0$$

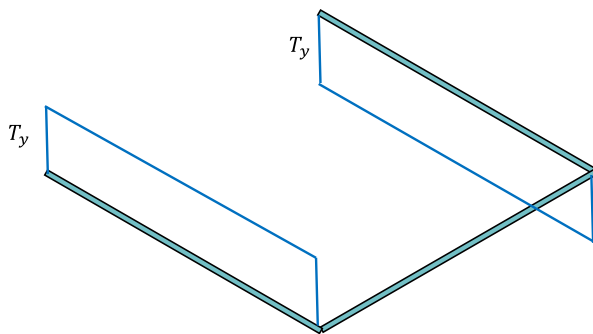
A energia complementar será a soma da energia de flexão com a de torção. Para calculá-las vamos, primeiro, fazer os diagramas de momento fletor e momento de torção:



M



T



(1,0 pto)

Então:

$$\frac{\partial U^*}{\partial T_y} = \frac{2}{EI} \int_0^{L/2} M_{BC}(x) \frac{\partial M_{BC}}{\partial T_y} dx + \frac{2}{GI_P} \int_0^L T_{AB}(x) \frac{\partial T_{AB}}{\partial T_y} dx = 0$$

$$M_{BC} = T_y + \frac{P}{2}x$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial T_y} = 1$$

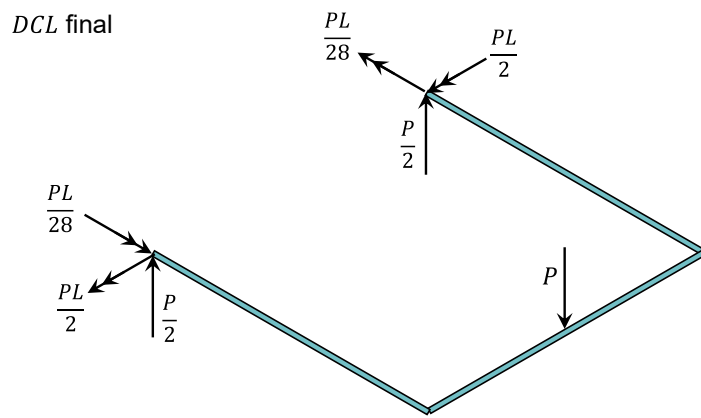
$$T_{AB} = T_y$$

$$\frac{\partial T_{AB}}{\partial T_y} = 1$$

$$\frac{2}{EI} \int_0^{L/2} \left(T_y + \frac{P}{2}x \right) dx + \frac{5}{2EI} \int_0^L T_y dx = 0 \Rightarrow T_y = -\frac{1}{28}PL$$



Então, o *DCL* final fica:



(1,5 pts)

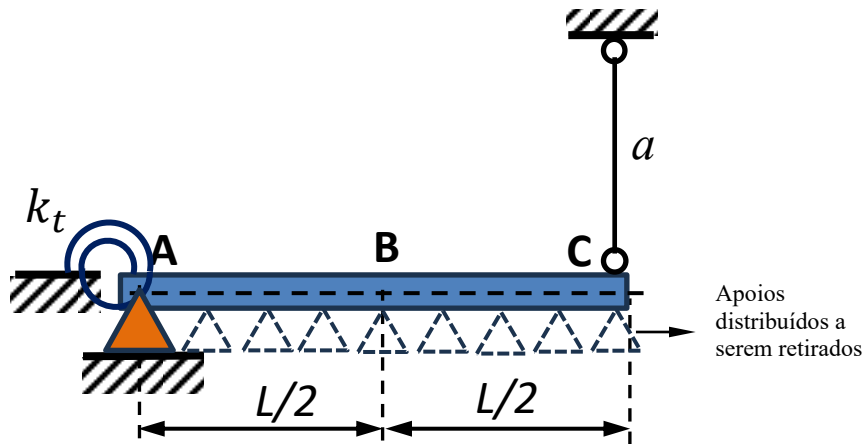


3ª Questão (3,5 pontos)

O sistema estrutural indicado na figura abaixo é formado pela barra ABC, de comprimento total L e rigidez flexional EI , conectada na extremidade C ao cabo de rigidez axial $(EA)_c$ e comprimento a , e na extremidade A à mola de torção com comportamento linear e constante k_t . Considere que, na configuração inicial (não-deformada) do sistema, o eixo central da barra ABC esteja completamente reto e que tanto o cabo quanto a mola não exercem esforços sobre a viga (ex: por conta de “apoios distribuídos” colocados sob a viga ABC que impedem a deformação devida ao carregamento a ser aplicado). Considerando que, na configuração deformada, estes “apoios distribuídos”, indicados com linhas tracejadas, sejam completamente removidos e que sobre o sistema atue um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q ao longo de toda a viga, determine na configuração final:

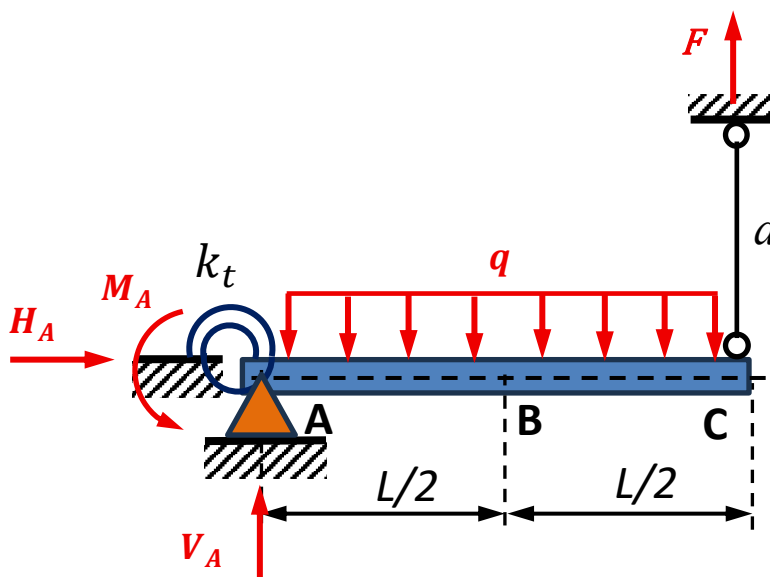
- o diagrama de corpo livre final (com os sentidos corretos e as magnitudes das reações de apoio em A e em C, expressas em valores numéricos);
- o deslocamento vertical no ponto médio da viga (em B).

Dados: $EI = 8000 \text{ Nm}^2$, $L = 2 \text{ m}$, $(EA)_c/a = 3EI/L^3$, $k_t = 3EI/L$, $q = 240 \text{ N/m}$



Resolução:

- A figura abaixo ilustra o diagrama de corpo livre após a retirada dos apoios distribuídos:



Temos 4 reações de apoio e apenas 3 equações de equilíbrio estático, resultando um grau de hiperestaticidade $g = 1$. Escolhendo a força no cabo (F) como incógnita hiperestática do problema, temos, pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:



$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial F}(U_v^* + U_c^* + U_m^*) = 0$$

A energia complementar na viga é devida praticamente aos esforços de flexão. Logo:

$$\frac{\partial U_v^*}{\partial F} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} ds$$

A energia complementar no cabo é devida à força normal de tração ($N = F$). Logo:

$$\frac{\partial U_c^*}{\partial F} = \int_0^a \frac{N}{(EA)_c} \frac{\partial N}{\partial F} ds = \int_0^a \frac{F}{(EA)_c} (1) ds = \frac{Fa}{(EA)_c}$$

E, para a mola de torção, teremos:

$$\frac{\partial U_m^*}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{M_A^2}{2k_t} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial M_A} \left(\frac{M_A^2}{2k_t} \right) \right] \frac{\partial M_A}{\partial F} = \frac{M_A}{k_t} \frac{\partial M_A}{\partial F}$$

O momento fletor em uma seção genérica da viga fica dado por:

$$M(s) = Fs - \frac{qs^2}{2}, \quad 0 \leq s \leq L$$

E da equação de equilíbrio de momentos em relação ao polo A, temos:

$$M_A + FL = \frac{qL^2}{2} \Leftrightarrow M_A = \frac{qL^2}{2} - FL$$

Assim resulta:

$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{EI} \int_0^L \left(Fs - \frac{qs^2}{2} \right) (s) ds + \frac{Fa}{(EA)_c} + \frac{1}{k_t} \left(\frac{qL^2}{2} - FL \right) (-L) = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{FL^3}{3} - \frac{qL^4}{8} \right) + \frac{Fa}{(EA)_c} - \frac{qL^3}{2k_t} + \frac{FL^2}{k_t} = 0$$

$$F \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{a}{(EA)_c} + \frac{L^2}{k_t} \right) = q \left(\frac{L^4}{8EI} + \frac{L^3}{2k_t} \right)$$

$$F \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{L^3}{3EI} + \frac{L^3}{3EI} \right) = q \left(\frac{L^4}{8EI} + \frac{L^4}{6EI} \right) = \frac{7qL^4}{24EI}$$

Logo:

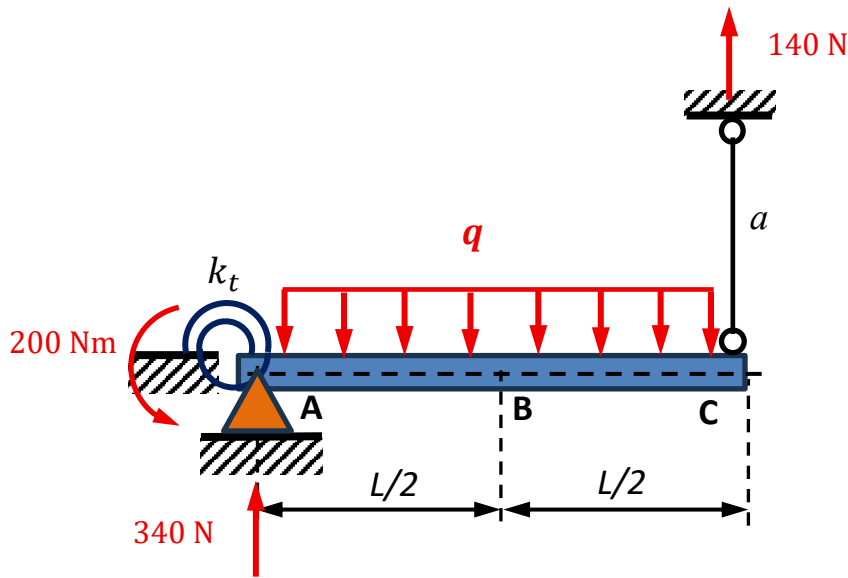
$$\frac{FL^3}{EI} = \frac{7qL^4}{24EI} \Leftrightarrow F = \frac{7}{24} qL = 140 \text{ N}$$

E as reações de apoio em A ficam dadas por:

$$V_A = qL - F \Leftrightarrow V_A = \frac{17}{24} qL = 340 \text{ N}$$

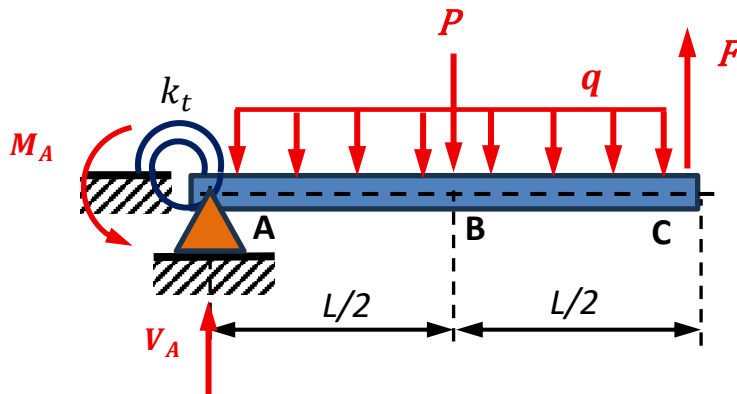
$$M_A = \frac{qL^2}{2} - FL \Leftrightarrow M_A = \frac{5qL^2}{24} = 200 \text{ Nm}$$

Diagrama de corpo livre final:



(2,0 pts)

b) Para obter o deslocamento vertical em B, basta consideramos a viga ABC sob ação do carregamento uniformemente distribuído (q) e da força no cabo (F), além de um esforço fictício (P), aplicado em B para a aplicação do Teorema de Crotti-Engesser:



$$\delta_{v,B} = \frac{\partial}{\partial P} (U_v^* + U_m^*) = \frac{\partial U_v^*}{\partial P} + \frac{\partial U_m^*}{\partial P}$$

Pelas equações de equilíbrio, temos:

$$V_A = P + qL - F$$

E

$$M_A = \frac{PL}{2} + \frac{qL^2}{2} - FL$$

Resulta, assim:

$$\delta_{v,B} = \int_0^{L/2} \frac{M_{CB}}{EI} \frac{\partial M_{CB}}{\partial P} ds + \int_0^{L/2} \frac{M_{BA}}{EI} \frac{\partial M_{BA}}{\partial P} ds + \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{M_A^2}{2k_t} \right)$$

Porém, no trecho CB:



$$M_{CB} = Fs - \frac{qs^2}{2}, \quad 0 \leq s \leq \frac{L}{2}, \quad e \quad \frac{\partial M_{CB}}{\partial P} = 0$$

E, no trecho BA:

$$M_{BA} = F\left(\frac{L}{2} + s\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{L}{2} + s\right)^2 - Ps, \quad 0 \leq s \leq \frac{L}{2}, \quad e \quad \frac{\partial M_{CB}}{\partial P} = -s$$

Voltando à expressão para o cálculo de $\delta_{v,B}$ e lembrando que P é um esforço fictício:

$$\begin{aligned}\delta_{v,B} &= \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left[F\left(\frac{L}{2} + s\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{L}{2} + s\right)^2 \right] (-s) ds + \frac{M_A}{k_t} \frac{\partial M_A}{\partial P} \\ \delta_{v,B} &= \frac{1}{EI} \left[-F\left(\frac{L^3}{16} + \frac{L^3}{24}\right) + \frac{q}{2}\left(\frac{L^4}{32} + \frac{L^4}{24} + \frac{L^4}{64}\right) \right] + \frac{1}{k_t} \left(\frac{qL^2}{2} - FL \right) \left(\frac{L}{2} \right) \\ \delta_{v,B} &= q \left(\frac{17L^4}{384EI} + \frac{L^3}{4k_t} \right) - F \left(\frac{5L^3}{48EI} + \frac{L^2}{2k_t} \right) \\ \delta_{v,B} &= q \left(\frac{17L^4}{384EI} + \frac{L^4}{12EI} \right) - F \left(\frac{5L^3}{48EI} + \frac{L^3}{6EI} \right) \\ \delta_{v,B} &= \frac{49qL^4}{384EI} - \frac{13FL^3}{48EI}\end{aligned}$$

E, como $F = 7qL/24$, temos, por fim:

$$\delta_{v,B} = \left(\frac{49}{384} - \frac{13}{48} \times \frac{7}{24} \right) \frac{qL^4}{EI} \Leftrightarrow \delta_{v,B} = \frac{7}{144} \frac{qL^4}{EI} \cong 0,0486 \frac{qL^4}{EI}$$

Numericamente:

$$\delta_{v,B} = \left(\frac{7}{144} \times \frac{240 \times (2)^4}{8000} \right) m \cong 23,3 \text{ mm}$$

(1,5 pts)



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

(Folha Adicional)