



PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II – P2 – 22/10/2025

Duração: 120 minutos

É permitido apenas o uso de calculadoras simples (quatro operações + raiz quadrada)

Não é permitido o uso de calculadoras científicas, celulares, relógios ou outros

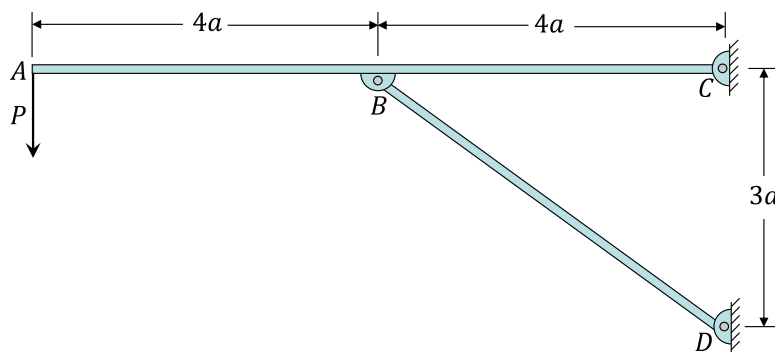
equipamentos eletrônicos.

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

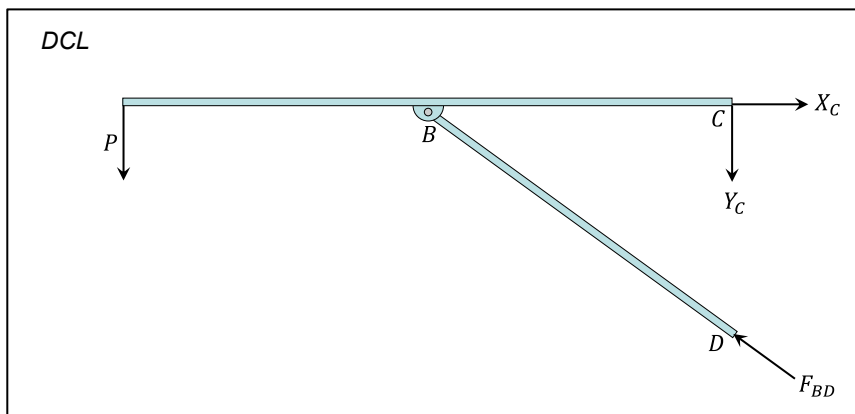
1ª Questão (3,0 pontos)

A estrutura da figura é formada por duas barras de seção circular com diâmetro $d = a/10$ e material com módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson $\nu = 1/4$. A barra AC está livre em A e articulada em C . A barra BD está articulada em B e em D . Ao ponto A foi aplicada uma força vertical de intensidade P . Calcule:

- a energia complementar devida às forças normais;
- a energia complementar devida às forças cortantes (é dado o fator de forma para uma seção circular cheia $f = 10/9$);
- a energia complementar devida aos momentos fletores;
- o deslocamento vertical sofrido pelo ponto A



Resolução:



Equilíbrio:

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow X_C = \frac{4}{5} F_{BD}$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow P + Y_C = \frac{3}{5} F_{BD}$$

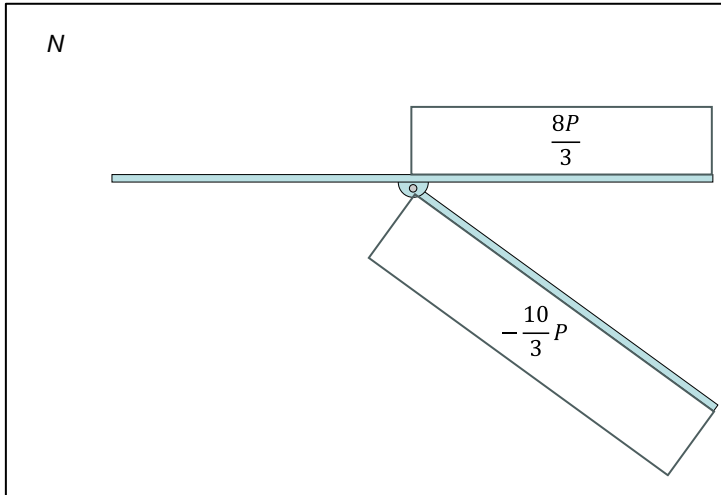
$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow Y_C = P$$

$$\Rightarrow F_{BD} = \frac{10}{3} P \Rightarrow X_C = \frac{8}{3} P$$

(0,6 pts)



a)

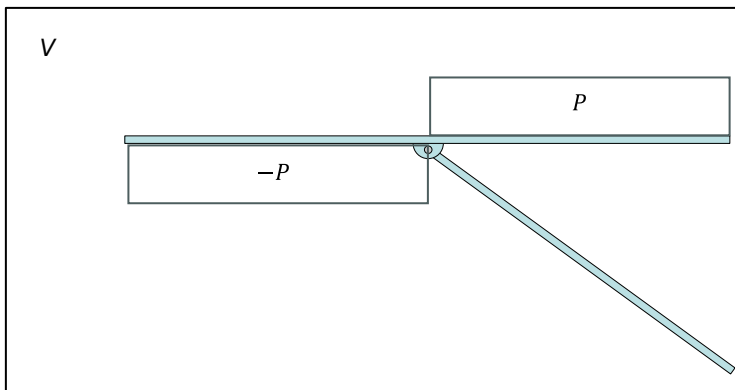


$$U_N^* = U_{N,AC}^* + U_{N,BD}^* = \frac{N_{BC}^2 L_{BC}}{2EA} + \frac{N_{BD}^2 L_{BD}}{2EA} = \frac{2}{E\pi d^2} \left(\left(\frac{8P}{3} \right)^2 4a + \left(-\frac{10}{3}P \right)^2 5a \right)$$

$$\Rightarrow U_N^* = 168 \frac{P^2 a}{E\pi d^2} = 16800 \frac{P^2}{E\pi a} = 1,68 \cdot 10^4 \frac{P^2}{E\pi a}$$

(0,6 pts)

b)



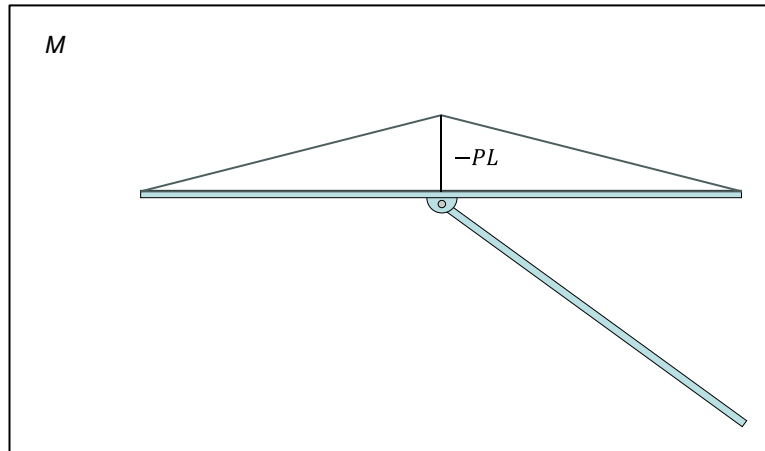
$$U_V^* = U_{V,AB}^* + U_{V,BC}^* = 2U_{V,AB}^* = 2f \frac{V_{AB}^2 L_{AB}}{2GA} = \frac{160}{9} \frac{P^2 a}{G\pi d^2}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2E}{5} \Rightarrow U_V^* = \frac{400}{9} \frac{P^2 a}{E\pi d^2} = \frac{40000}{9} \frac{P^2}{E\pi a} = 4,44 \cdot 10^3 \frac{P^2}{E\pi a}$$

(0,6 pts)



c)



$$U_M^* = U_{M,AB}^* + U_{M,BC}^* = 2 U_{M,AB}^* = \frac{1}{EI} \int_0^{4a} (-Px)^2 dx = \frac{64P^2 a^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow U_M^* = \frac{64P^2 a^3}{3E\pi \frac{d^4}{64}} = \frac{4096}{3} \frac{P^2 a^3}{E\pi d^4} = \frac{40960000}{3} \frac{P^2}{E\pi a} = 1,37 \cdot 10^7 \frac{P^2}{E\pi a}$$

(0,6 pts)

d)

Pelo princípio do trabalho e da energia:

$$U = W$$

Para material de comportamento elástico linear

$$U = U^*$$

O trabalho realizado por P é

$$W = \frac{1}{2} P \delta_A$$

Como

$$U^* = U_N^* + U_V^* + U_M^* = 1,37 \cdot 10^7 \frac{P^2}{E\pi a}$$

Então:

$$\frac{1}{2} P \delta_A = 1,37 \cdot 10^7 \frac{P^2}{E\pi a} \Rightarrow \delta_A = 2,74 \cdot 10^7 \frac{P}{E\pi a}$$

(0,6 pts)

Desprezando a contribuição das forças cortantes:

$$\frac{1}{2} P \delta_A = 1,37 \cdot 10^7 \frac{P^2}{E\pi a} \Rightarrow \delta_A = 2,74 \cdot 10^7 \frac{P}{E\pi a}$$

Desprezando, também a contribuição das forças normais:

$$\frac{1}{2} P \delta_A = 1,37 \cdot 10^7 \frac{P^2}{E\pi a} \Rightarrow \delta_A = 2,74 \cdot 10^7 \frac{P}{E\pi a}$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

(Note que

$$\frac{U_V^*}{U_M^*} \sim 0,00032$$

e que

$$\frac{U_N^*}{U_M^*} \sim 0,00122$$

)

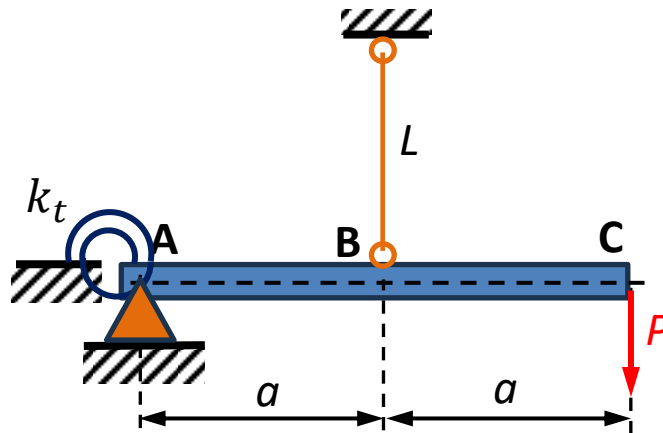


2ª Questão (3,0 pontos)

A estrutura indicada na figura é formada pela barra rígida (indeformável) ABC, de comprimento total $2a$, que está ligada a um cabo de rigidez axial $(EA)_c$ e comprimento L no ponto intermediário da barra (em B) e a uma mola de torção (com comportamento linear) cuja constante é k_t . Considere que seja aplicada uma força vertical de intensidade P na extremidade livre da barra ABC. Determine:

- a) a rotação da barra ABC, em graus;
- b) as quantidades de energia absorvidas pelo cabo e pela mola de torção após a aplicação plena da carga (valores numéricos).

Dados: $(EA)_c = 1200 \text{ kN}$, $a = 1,0 \text{ m}$, $L = 2,0 \text{ m}$, $k_t = 400 \text{ kNm/rad}$, $P = 5 \text{ kN}$



Resolução:

a) Denominando δ o deslocamento vertical da seção C da barra ABC, conclui-se que o deslocamento vertical da seção B será $\delta/2$ e que a rotação da viga ABC será $\theta = \delta/2a$ (dentro da hipótese de linearidade geométrica). Assim, a energia de deformação do cabo após a aplicação plena da carga será:

$$U_c = \iiint_V \frac{E\varepsilon^2}{2} dV = \int_0^L \frac{(EA)_c \varepsilon^2}{2} dx = \frac{(EA)_c L}{2} \left(\frac{\delta}{2L} \right)^2 = \frac{(EA)_c}{8L} \delta^2$$

(0,5 pts)

E a energia de deformação da mola, após a aplicação plena da carga, será:

$$U_M = \frac{k_t \theta^2}{2} = \frac{k_t \delta^2}{8a^2}$$

(0,5 pts)

Pelo Princípio do Trabalho e da Energia (sendo o sistema conservativo e com comportamento elástico-linear), teremos:

$$W = U = U_c + U_M \Leftrightarrow \frac{P\delta}{2} = \frac{(EA)_c}{8L} \delta^2 + \frac{k_t \delta^2}{8a^2}$$

Ou seja:

$$P = \left[\frac{(EA)_c}{4L} + \frac{k_t}{4a^2} \right] \delta \Leftrightarrow P = \left[\frac{(EA)_c a^2 + k_t L}{4La^2} \right] \delta$$

Logo:

$$\theta = \frac{\delta}{2a} \Leftrightarrow \theta = \frac{2PLa}{(EA)_c a^2 + k_t L}$$

(0,5 pts)



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Substituindo os valores numéricos, obtemos:

$$\theta = 0,01 \text{ rad} \cong 0,57^\circ$$

(0,5 pto)

b) Resultam dos cálculos anteriores:

$$\delta = 2a\theta = 0,02 \text{ m}$$

Logo:

$$U_C = \frac{(EA)_c}{8L} \delta^2 = \frac{1200 \times 10^3}{8 \times 2} \times (0,02)^2 = 30 \text{ J}$$

(0,5 pto)

E

$$U_M = \frac{k_t \theta^2}{2} = \frac{400 \times 10^3}{2} \times (0,01)^2 = 20 \text{ J}$$

(0,5 pto)



3ª Questão (4,0 pontos)

O sistema estrutural indicado abaixo é formado pelas barras AB, BC e CD, cujos eixos centrais são paralelos aos eixos x , y e z , respectivamente. Considere que as barras são de aço e possuem seção circular de diâmetro d (seção cheia) e que são aplicados dois binários à estrutura: um aplicado ao ponto D (extremidade livre) e outro aplicado ao ponto C, dados respectivamente por:

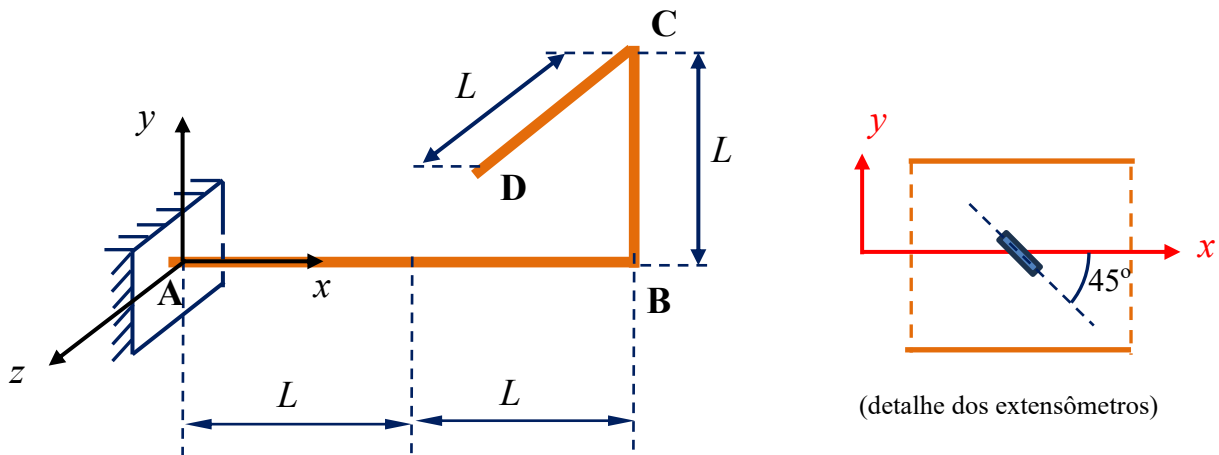
$$\vec{M}_D = (0, -1, 3)M_0 \quad \text{e} \quad \vec{M}_C = (2, 0, 1)M_0$$

A fim de determinar o valor de M_0 (valor de referência), é colado um único extensômetro no ponto de coordenadas $P = (L, 0, d/2)$, antes da aplicação dos carregamentos, de modo que sua grade forma um ângulo $|\theta| = 45^\circ$ entre os eixos x e y (vide detalhe na figura à direita).

Considerando que a leitura registrada pelo extensômetro seja $\varepsilon_\theta = 100\mu$, determine:

- O valor do momento de referência M_0 ;
- O coeficiente de segurança com relação ao início de escoamento neste ponto em particular, pelo critério de Tresca;

Dados: $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_e = 400 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$ (propriedades do material), $L = 1000 \text{ mm}$, $d = 25 \text{ mm}$

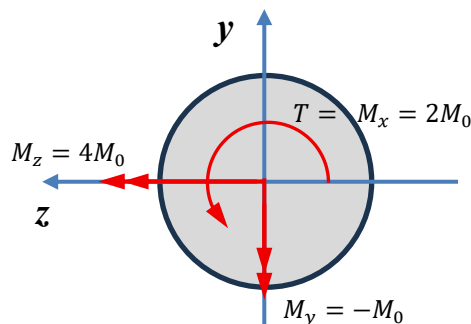


Resolução:

- Na seção transversal em que foi colado o extensômetro temos um momento resultante dado por:

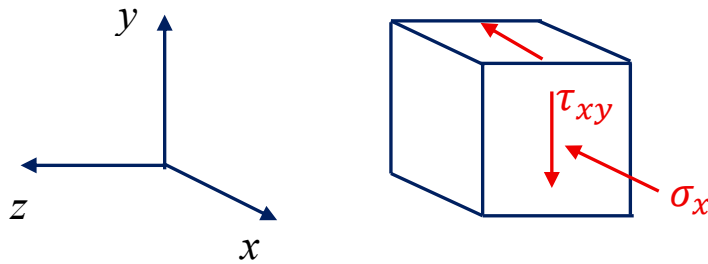
$$\vec{M}_R = \vec{M}_D + \vec{M}_C = (2, -1, 4)M_0$$

Esforços solicitantes na seção transversal:



(0,5 pts)

Assim, no ponto de coordenadas $P = (L, 0, d/2)$, teremos o seguinte estado tensional:



Sendo:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z = -\frac{M_0}{(\pi d^4/64)} \cdot \frac{d}{2} = -\frac{32 M_0}{\pi d^3}$$

(0,5 pto)

$$\tau_{xy} = -\frac{T}{I_p} \rho = -\frac{2M_0}{(\pi d^4/32)} \cdot \frac{d}{2} = -\frac{32 M_0}{\pi d^3}$$

(0,5 pto)

Pela Lei de Hooke, o estado de deformações na vizinhança do ponto P é dado por:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{32 M_0}{\pi E d^3}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{32\nu M_0}{\pi E d^3}$$

$$\gamma_{xy} = 2(1 + \nu) \frac{\tau_{xy}}{E} = -(1 + \nu) \frac{64 M_0}{\pi E d^3}$$

O tensor das deformações no ponto será, portanto, dado por:

$$[E]_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -(1 + \nu) & 0 \\ -(1 + \nu) & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} \frac{32 M_0}{\pi E d^3}$$

E o alongamento lido pelo extensômetro será:

$$\varepsilon = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\} = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta$$

Logo:

$$\varepsilon = [-\cos^2 \theta - 2(1 + \nu) \sin \theta \cos \theta + \nu \sin^2 \theta] \frac{32 M_0}{\pi E d^3}$$

Para $\theta = -45^\circ$, teremos:

$$\varepsilon = \left[-\frac{1}{2} + (1 + \nu) + \frac{\nu}{2} \right] \frac{32 M_0}{\pi E d^3} = (1 + 3\nu) \frac{16 M_0}{\pi E d^3}$$

(1,0 pto)

O que leva a:

$$M_0 = \frac{\pi E d^3 \varepsilon}{16(1 + 3\nu)} \cong 32,29 \text{ Nm}$$

(0,5 pto)



b). Cálculo das tensões principais no ponto:

$$\det([T] - \sigma[I]) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = 0$$

Levando a:

$$-\sigma(\sigma^2 - \sigma_x \sigma - \tau_{xy}^2) = 0$$

Cujas raízes são:

$$\sigma = 0, \quad \sigma = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

E, como:

$$\sigma_x = -\frac{32 M_0}{\pi d^3} \cong -21,05 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{32 M_0}{\pi d^3} \cong -21,05 \text{ MPa}$$

Virá:

$$\sigma_1 \cong 13,01 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 \cong -34,06 \text{ MPa}$$

(0,5 pts)

Assim, pelo critério de Tresca, o coeficiente de segurança com relação ao início de escoamento neste ponto será:

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{400}{13,01 + 34,06} \cong 8,5$$

(0,5 pts)



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

(Folha Adicional)