



PME3211 – Mecânica dos Sólidos II – P1 – 10/09/2025

Duração: 100 minutos

É permitido apenas o uso de calculadoras simples (quatro operações + raiz quadrada)

Não é permitido o uso de calculadoras científicas, celulares, relógios ou outros

equipamentos eletrônicos.

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

1ª Questão (5,0 pontos)

A figura abaixo ilustra uma tubulação pressurizada (com tampos nas extremidades A e C) e engastada em A. O eixo central do trecho AB coincide com o eixo x do sistema de coordenadas $Axyz$, enquanto o eixo central do trecho BC é paralelo ao eixo y . Considere que, além da pressão interna, de magnitude $p = 1,0 \text{ MPa}$ (pressão manométrica), a tubulação está também submetida ao peso próprio (peso do material da tubulação) de valor $\omega = 500 \text{ N/m}$, não indicado na figura, e à ação do vento que produz um carregamento uniformemente distribuído, atuando na direção contrária ao eixo z , e de magnitude $q = 200 \text{ N/m}$ (vide figura). Pede-se:

a) Mostre que a máxima tensão de cisalhamento que age em uma dada seção transversal da tubulação, decorrente de uma única força cortante de magnitude V , é dada por:

$$|\tau_{m\acute{a}x}| = V/(\pi R_m t) \quad (0,5 \text{ pto})$$

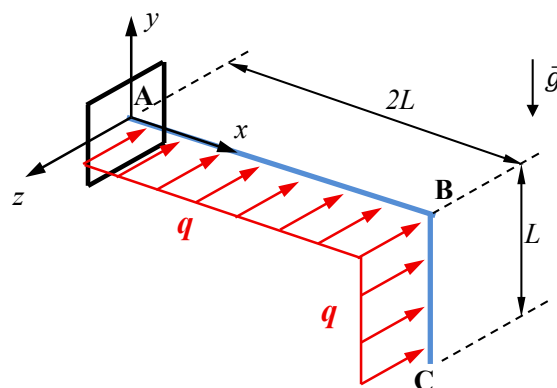
b) Determine todos os esforços solicitantes que agem na seção transversal A (junto ao engastamento), indicando seus sentidos corretos na face de orientação positiva e expressando-os tanto na forma literal quanto numérica (1,5 pto);

c) Determine o estado tensional no ponto de coordenadas $(0, R_m, 0)$ utilizando: i) um elemento infinitesimal de faces paralelas aos três planos coordenados (indique as tensões tanto na forma literal quanto numérica) e ii) o tensor das tensões (use apenas os valores numéricos das tensões); (1,5 pto)

d) Repita o item anterior para o ponto de coordenadas $(0,0, R_m)$; (1,5 pto)

Obs: Faça as simplificações necessárias considerando que a estrutura é de parede fina (ex: ao calcular as tensões nos diferentes pontos da estrutura, considere que a distância envolvida é simplesmente R_m , ao invés de utilizar, por exemplo, $R_m + t/2$).

Dados: $p = 1 \text{ MPa}$, $\omega = 500 \text{ N/m}$, $q = 200 \text{ N/m}$, $L = 2000 \text{ mm}$, $R_m = 200 \text{ mm}$, $t = 5 \text{ mm}$.



Respostas:

a) A distribuição das tensões de cisalhamento na seção transversal de vigas pode ser obtida, em alguns casos, com a fórmula de Jouravski (vide aula de PME-3210 a respeito):

$$\tau = \frac{VQ}{bI_z}$$

Onde:

V = força cortante atuante na seção transversal;

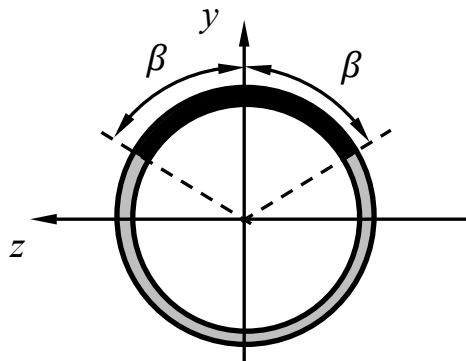


Q = primeiro momento de área para o cálculo da tensão de cisalhamento, envolvendo a parte da seção transversal compreendida entre a parte superior da seção até o ponto em que a tensão cisalhante está sendo calculada;

b = largura da seção (leia-se: largura onde atuam as tensões de cisalhamento na porção inferior da área considerada para o cálculo de Q);

I_z = segundo momento de área de toda a seção transversal onde age a força cortante.

Para o caso de uma seção transversal circular e de parede fina, podemos determinar a tensão de cisalhamento sem grande erros pela fórmula de Jouravski. Neste caso, a área para o cálculo de Q está indicada na figura abaixo (note que a integração é feita com base na hipótese de tubo de parede fina):

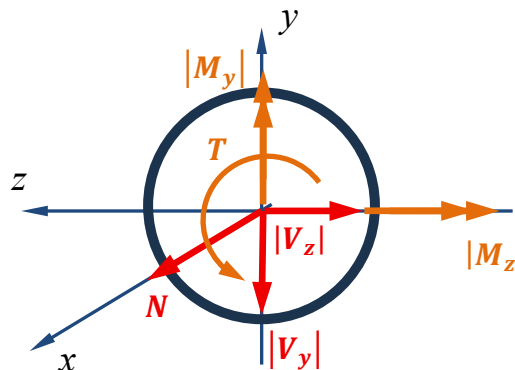


$$Q = \iint y dA = \int_{-\beta}^{\beta} ytR_m d\theta = \int_{-\beta}^{\beta} (R_m \cos\theta)tR_m d\theta = tR_m^2(\text{sen}\beta - \text{sen}(-\beta)) = 2tR_m^2 \text{sen}\beta$$

O valor máximo da tensão cisalhante, na seção transversal, ocorre portanto para $\beta = \pi/2$ e vale:

$$|\tau|_{\text{máx}} = \frac{V \cdot (2tR_m^2)}{b \cdot I_z} = \frac{V \cdot (2tR_m^2)}{(2t) \cdot (\pi R_m^3 t)} = \frac{V}{\pi R_m t}$$

b) Haverá três componentes de força e três componentes de momento na seção solicitada, conforme indicação na figura a seguir (esforços indicadas na face de orientação positiva):



Onde:

$$N = p\pi R_m^2 \Leftrightarrow N = 1,0 \frac{N}{\text{mm}^2} \times \pi(200 \text{ mm})^2 \cong 125664 \text{ N}$$

$$|V_y| = 3\omega L \Leftrightarrow |V_y| = 3 \times 500 \frac{N}{m} \times 2,0 \text{ m} = 3000 \text{ N}$$

$$|V_z| = 3qL \Leftrightarrow |V_z| = 3 \times 200 \frac{N}{m} \times 2,0 \text{ m} = 1200 \text{ N}$$

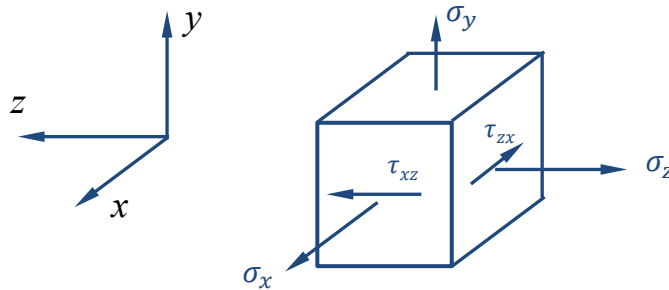


$$T = \frac{qL^2}{2} \Leftrightarrow T = \frac{1}{2} \times 200 \frac{N}{m} \times (2,0 \text{ m})^2 = 400 \text{ Nm}$$

$$|M_y| = qL \times 2L + 2qL \times L = 4qL^2 \Leftrightarrow |M_y| = 4 \times 200 \frac{N}{m} \times (2,0 \text{ m})^2 = 3200 \text{ Nm}$$

$$|M_z| = \omega L \times 2L + 2\omega L \times L = 4\omega L^2 \Leftrightarrow |M_z| = 4 \times 500 \frac{N}{m} \times (2,0 \text{ m})^2 = 8000 \text{ Nm}$$

c) Estado tensional no ponto de coordenadas $(0, R_m, 0)$:



Onde a tensão longitudinal σ_x é dada por:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{|M_z|}{I_z} R_m = \frac{pR_m^2}{2\pi R_m t} + \frac{4\omega L^2}{\pi R_m^3 t} R_m = \frac{pR_m}{2t} + \frac{4\omega}{\pi t} \left(\frac{L}{R_m}\right)^2$$

Numericamente:

$$\sigma_x = \frac{1,0 \text{ MPa}}{2} \left(\frac{200 \text{ mm}}{5 \text{ mm}}\right) + \frac{4 \times 0,50 \text{ N/mm}}{\pi \times 5 \text{ mm}} \left(\frac{2000}{200}\right)^2 \cong 32,73 \text{ MPa}$$

Já a tensão σ_z corresponde à tensão circunferencial no ponto, sendo dada por:

$$\sigma_z = \frac{pR_m}{t} = 1,0 \text{ MPa} \left(\frac{200 \text{ mm}}{5 \text{ mm}}\right) = 40 \text{ MPa}$$

As tensões cisalhantes $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ são uma combinação da tensão cisalhante devida ao torque com a tensão cisalhante devida à força cortante V_z , e ficam expressas por:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \cong \frac{T}{I_p} R_m - \frac{|V_z|}{\pi R_m t} = \frac{T}{2\pi R_m^2 t} - \frac{|V_z|}{\pi R_m t}$$

Numericamente:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \cong \frac{4 \times 10^5 \text{ Nmm}}{2\pi(200)^2 \times 5 \text{ mm}^3} - \frac{1200 \text{ N}}{\pi \times 200 \times 5 \text{ mm}^2} \cong 0,318 \text{ MPa} - 0,382 \text{ MPa} \cong -0,064 \text{ MPa}$$

(o sinal negativo indica que o sentido correto é oposto ao indicado na figura acima).

Quanto à tensão normal σ_y , esta corresponde à tensão radial no ponto (que varia de -1 MPa , para o ponto situado na superfície interna do vaso, até 0 MPa , para um ponto situado na superfície externa, ficando claro que tais valores correspondem às pressões manométricas). Como se trata de um vaso de parede fina, para o ponto situado à meia espessura da parede, podemos aproximar esta tensão radial pela média aritmética entre estas duas tensões, resultando:

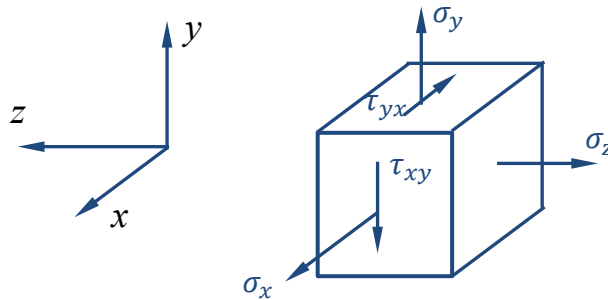
$$\sigma_y \cong -\frac{p}{2} = -0,5 \text{ MPa}$$



Assim, o tensor das tensões no ponto de coordenadas $(0, R_m, 0)$ fica dado aproximadamente por:

$$[T]_b \cong \begin{bmatrix} 32,73 & 0 & -0,064 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ -0,064 & 0 & 40 \end{bmatrix} \text{ (tensões em MPa)}$$

d) Estado tensional no ponto de coordenadas $(0,0, R_m)$:



Onde a tensão longitudinal σ_x é dada por:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{|M_y|}{I_y} R_m = \frac{p\pi R_m^2}{2\pi R_m t} + \frac{4qL^2}{\pi R_m^3 t} R_m = \frac{pR_m}{2t} + \frac{4q}{\pi t} \left(\frac{L}{R_m}\right)^2$$

Numericamente:

$$\sigma_x = \frac{1,0 \text{ MPa}}{2} \left(\frac{200 \text{ mm}}{5 \text{ mm}}\right) + \frac{4 \times 0,20 \text{ N/mm}}{\pi \times 5 \text{ mm}} \left(\frac{2000}{200}\right)^2 \cong 25,09 \text{ MPa}$$

Já a tensão σ_y passar a ser a tensão circunferencial no ponto, sendo dada por:

$$\sigma_y = \frac{pR_m}{t} = 1,0 \text{ MPa} \left(\frac{200 \text{ mm}}{5 \text{ mm}}\right) = 40 \text{ MPa}$$

As tensões cisalhantes $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ são uma combinação da tensão cisalhante devida ao torque com a tensão cisalhante devida à força cortante V_y , e ficam expressas em valor absoluto por:

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| = \frac{T}{I_p} R_m + \frac{|V_y|}{\pi R_m t} = \frac{T}{2\pi R_m^2 t} + \frac{|V_y|}{\pi R_m t}$$

Numericamente:

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| = \frac{4 \times 10^5 \text{ Nmm}}{2\pi(200)^2 \times 5 \text{ mm}^3} + \frac{3000 \text{ N}}{\pi \times 200 \times 5 \text{ mm}^2} \cong 0,318 \text{ MPa} + 0,955 \text{ MPa} \cong 1,27 \text{ MPa}$$

Quanto à tensão normal σ_z , esta passará a ser a tensão radial no ponto (que varia de -1 MPa, para o ponto situado na superfície interna do vaso, até 0 MPa, para um ponto situado na superfície externa, ficando claro que tais valores correspondem às pressões manométricas). Como se trata de um vaso de parede fina, para o ponto situado à meia espessura da parede, podemos aproximar esta tensão radial pela média aritmética entre estas duas tensões, resultando:

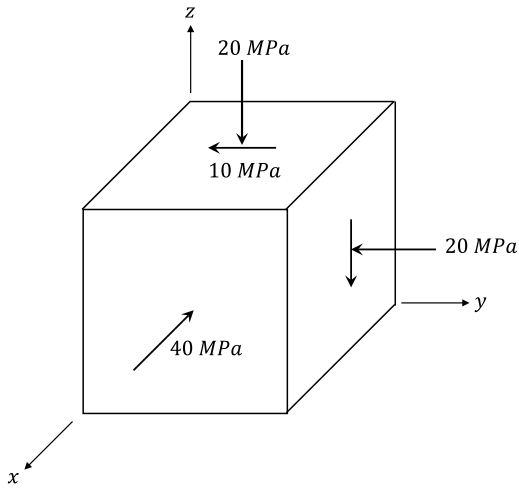
$$\sigma_z \cong -\frac{p}{2} = -0,5 \text{ MPa}$$

Assim, o tensor das tensões no ponto de coordenadas $(0, 0, R_m)$ fica dado aproximadamente por:

$$[T]_b \cong \begin{bmatrix} 25,09 & -1,27 & 0 \\ -1,27 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix} \text{ (tensões em MPa)}$$



2ª Questão (5,0 pontos)



O cubo orientado da figura representa o estado de tensões em um certo ponto P de uma estrutura. Pedem-se, para esse ponto:

- a matriz $[T]$ que representa o tensor das tensões;
- as tensões principais;
- as direções principais;
- os círculos de Mohr;
- a tensão de tração máxima;
- a tensão de compressão máxima;
- a tensão de cisalhamento máxima;
- as normais aos planos em que ocorrem as tensões de cisalhamento máximas;
- a normal ao plano em que:
 $\sigma = -20 \text{ MPa}$ e $\tau = 10 \text{ MPa}$
- a normal ao plano em que:
 $\sigma = -35 \text{ MPa}$ e $\tau = 5 \text{ MPa}$

Respostas:

a)

$$[T] = \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -10 \\ 0 & -10 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

(0,5 pts)

b)

$$\begin{cases} \sigma_1 = -10 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -30 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -40 \text{ MPa} \end{cases}$$

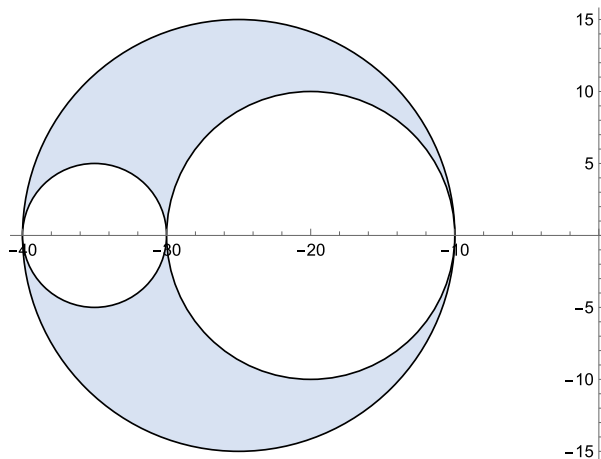
(0,5 pts)

c)

$$\vec{n}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,707 \\ 0,707 \end{Bmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,707 \\ 0,707 \end{Bmatrix} \quad \vec{n}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(0,5 pts)

d)



(0,5 pts)



e)

Pelo círculo de Mohr verifica-se que não haverá tensão de tração em nenhuma direção.

(0,5 pts)

f)

$$\sigma_{c,m\acute{a}x} = |\sigma_3| = 40 \text{ MPa}$$

(0,5 pts)

g)

$$\tau_{m\acute{a}x} = 15 \text{ MPa}$$

(0,5 pts)

h)

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{n}_1 \pm \vec{n}_3) = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,707 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{Bmatrix} \text{ e } \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,707 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

(0,5 pts)

i)

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{n}_1 \pm \vec{n}_2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ e } \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(0,5 pts)

j)

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{n}_2 \pm \vec{n}_3) = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,707 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{Bmatrix} \text{ e } \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,707 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

(0,5 pts)



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

(Folha Adicional)