



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #24

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

18/11/2025



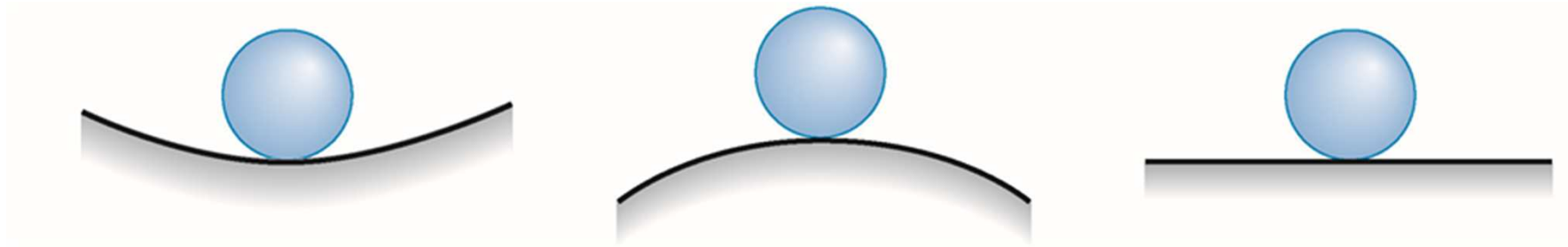
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Conceito de Estabilidade
2. Estabilidade Estrutural
3. Exemplos com Estruturas Idealizadas
4. Exercícios



1. Conceito de Estabilidade



Em linhas gerais, dizemos que um sistema é estável quando pequenas perturbações causam pequenos efeitos...

E que o sistema é instável quando pequenas perturbações causam grandes efeitos...



2. Estabilidade estrutural

Do ponto de vista da Mecânica dos Sólidos:

As “pequenas perturbações” podem ser entendidas como pequenas variações aos carregamentos aplicados às estruturas e os “grandes efeitos” são aumentos consideráveis nos esforços solicitantes internos (momentos fletores, momentos de torção, forças cortantes), nos deslocamentos transversais e nas deformações, que, em geral, podem fazer com que a estrutura deixe de cumprir seu papel (ou seja, suportar esforços e transmitir esforços, sem a ocorrência de falhas).



Exemplo 1:



Fig.1: Instabilidade estrutural de um tanque cilíndrico pela formação acidental de vácuo interno [1]



Exemplo 2:



Fig.2: Instabilidade estrutural da armadura de tração de um duto flexível [2] (à esquerda) e camadas de um duto flexível (à direita).



Exemplo 3:



Fig.3: Instabilidade estrutural em barras de uma torre treliçada [3]



Exemplo 4:



Fig.4: Falha de uma torre de transmissão por instabilidade estrutural pela ação do vento [4].



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo 5:

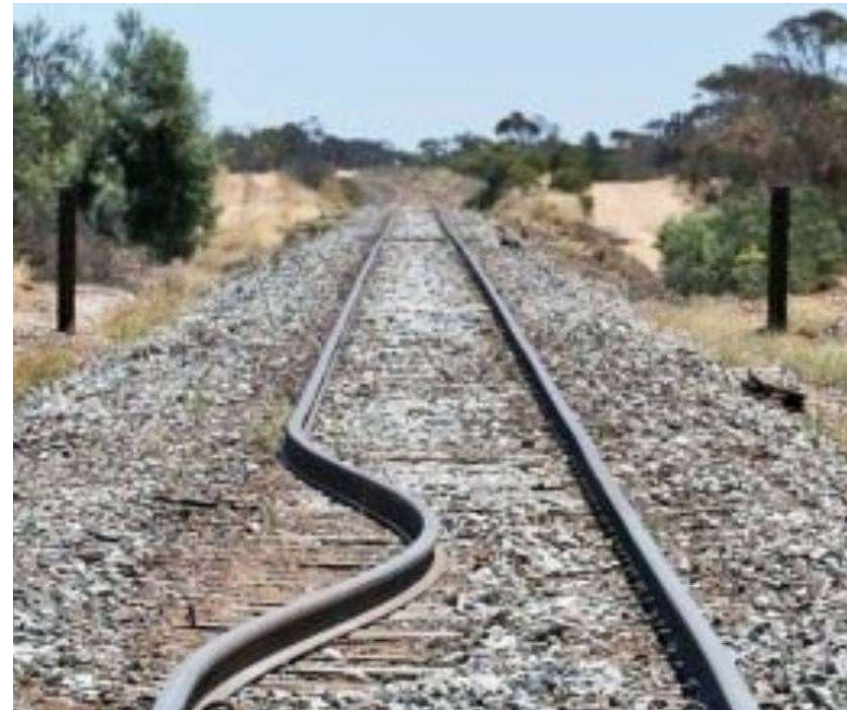


Fig.5: Instabilidade de trilhos de trem (*railway track buckling*) [5,6]



Exemplo 6:



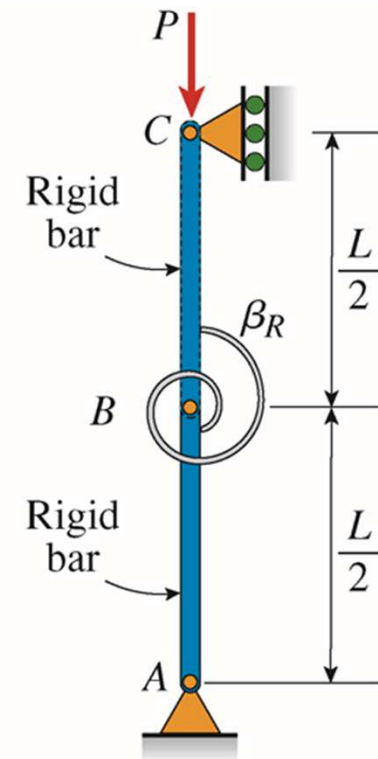
Fig.6: Instabilidade estrutural de dutos
(pipeline upheaval buckling, pipeline lateral buckling) [7].



3. Exemplos com estruturas idealizadas [8]

Para ilustrar alguns conceitos fundamentais de estabilidade estrutural, vamos analisar inicialmente uma estrutura idealizada, formada por duas barras rígidas (indeformáveis) AB e BC, de comprimento $L/2$ cada, articuladas em A (apoio fixo) e em C (apoio móvel) e unidas em B por um pino. Para evitar o movimento da estrutura como um mecanismo, uma mola de torção, de dimensões desprezíveis, e com comportamento linear⁽¹⁾, liga a extremidade superior da barra AB à extremidade inferior da barra BC. A constante de torção da mola é β_R .

(1) Isto significa que um momento é transmitido de uma viga para a outra por meio da mola de torção, sendo tal momento proporcional ao ângulo de rotação (φ) relativo formado pelos eixos centrais das duas barras: $M_B = \beta_r \varphi$, sendo $[\beta_R] = N.m$ (no S.I.).





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

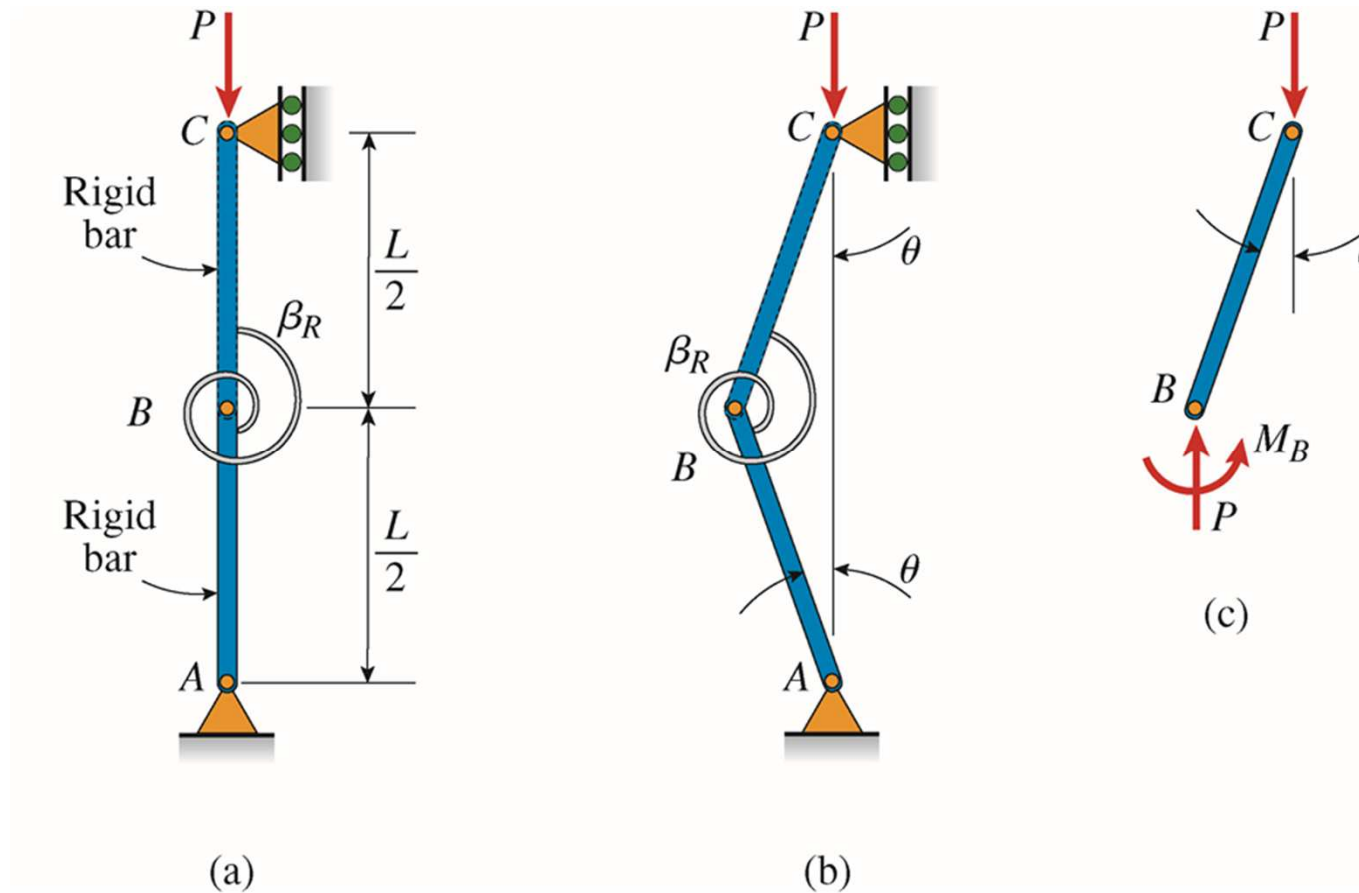
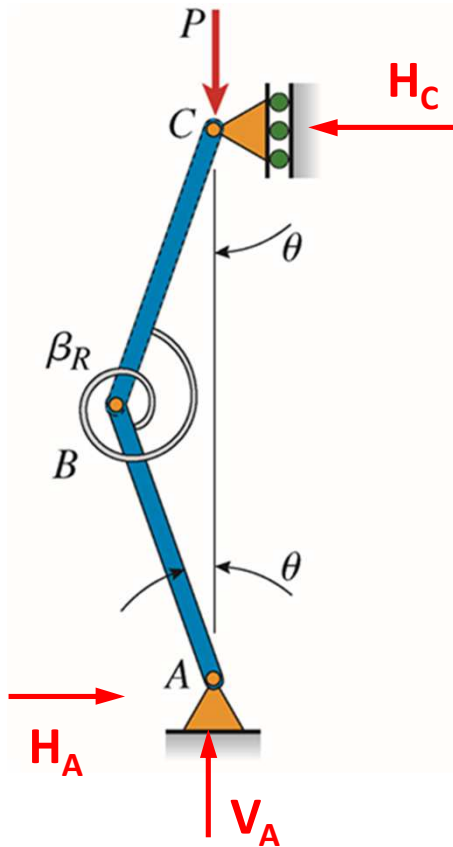


FIG. 11-2 Buckling of an idealized structure consisting of two rigid bars and a rotational spring



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Imposição das equações de equilíbrio (na configuração deformada):



$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A = H_C$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_A = P$$

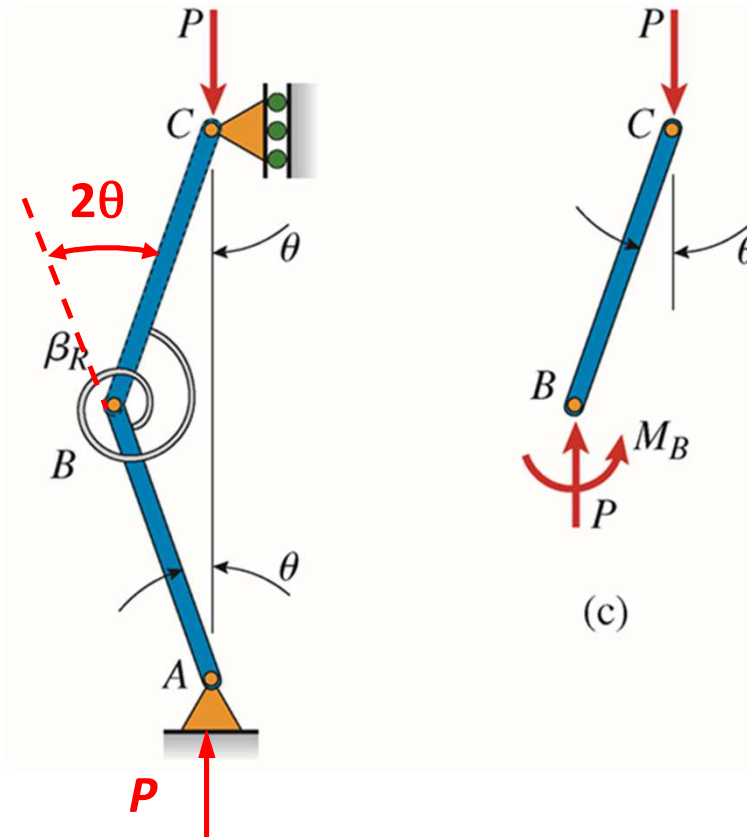
$$\sum M_{\text{pólo},A} = 0 \Leftrightarrow H_C L \cos \theta = 0$$

Logo: $H_A = H_C = 0, \quad V_A = P$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

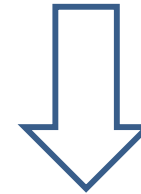
Equilíbrio da barra BC: $M_B = P \frac{L}{2} \operatorname{sen} \theta$



Por outro lado:

$$M_B = \beta_R(2\theta)$$

Logo: $P \frac{L}{2} \operatorname{sen} \theta = \beta_R(2\theta)$



Equação Governante
(não linear)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Formas de resolver a equação governante:

1. Pela linearização da equação:

No caso em tela, a única não linearidade é geométrica, já que o braço para o cálculo do binário formado pelas forças P leva ao aparecimento da função $\text{sen}\theta$. Linearizando a função $f(\theta) = \text{sen}\theta$, em torno da posição de equilíbrio (trivial) $\theta = 0$ (o que pressupõe a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas rotações na configuração deformada), teremos:

$$f(\theta) = \text{sen}\theta \cong f(0) + f'(0) \cdot \theta$$

$$f(\theta) = \text{sen}\theta \cong \theta$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$P \frac{L}{2} \sin \theta = 2\beta_R \theta$$



$$\left(P - \frac{4\beta_R}{L} \right) \theta = 0$$



Equação Governante (linearizada)

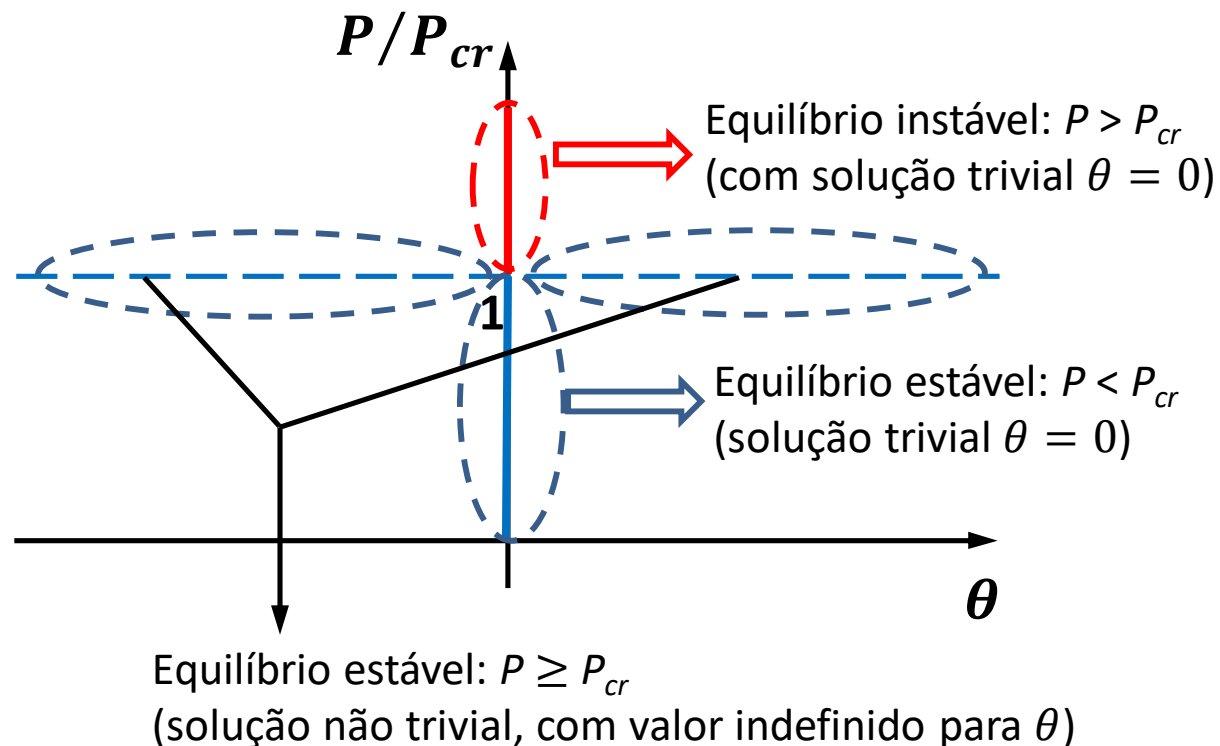
As soluções da equação governante linearizada são:

$$\left[\begin{array}{ll} \theta = 0 & \longrightarrow \text{Solução trivial (sempre presente, mas sem interesse)} \\ P = P_{cr} = \frac{4\beta_R}{L} & \longrightarrow \text{Solução não-trivial (carga crítica da estrutura)} \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Podemos representar o comportamento da estrutura por meio de um diagrama, onde ficam indicados os tipos de equilíbrio (estável ou instável):





2. Pela aproximação da função $f(\theta) = \text{sen}\theta$ com mais termos:

$$f(\theta) = \text{sen}\theta \cong f(0) + f'(0) \cdot \theta + f''(0) \cdot \frac{\theta^2}{2} + f'''(0) \cdot \frac{\theta^3}{3!} = \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

$$P \frac{L}{2} \text{sen}\theta = 2\beta_R \theta \quad \Rightarrow \quad P \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = \frac{4\beta_R}{L} \theta$$

As soluções da equação governante aproximada são:

$$\left[\begin{array}{l} \theta = 0 \longrightarrow \text{Solução trivial (sem interesse)} \\ P \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right) = \frac{4\beta_R}{L} \longrightarrow 1 - \frac{\theta^2}{6} = \frac{P_{cr}}{P} \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$1 - \frac{\theta^2}{6} = \frac{P_{cr}}{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta^2 = 6 \left(1 - \frac{P_{cr}}{P} \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \pm \sqrt{6 \left(1 - \frac{P_{cr}}{P} \right)}$$

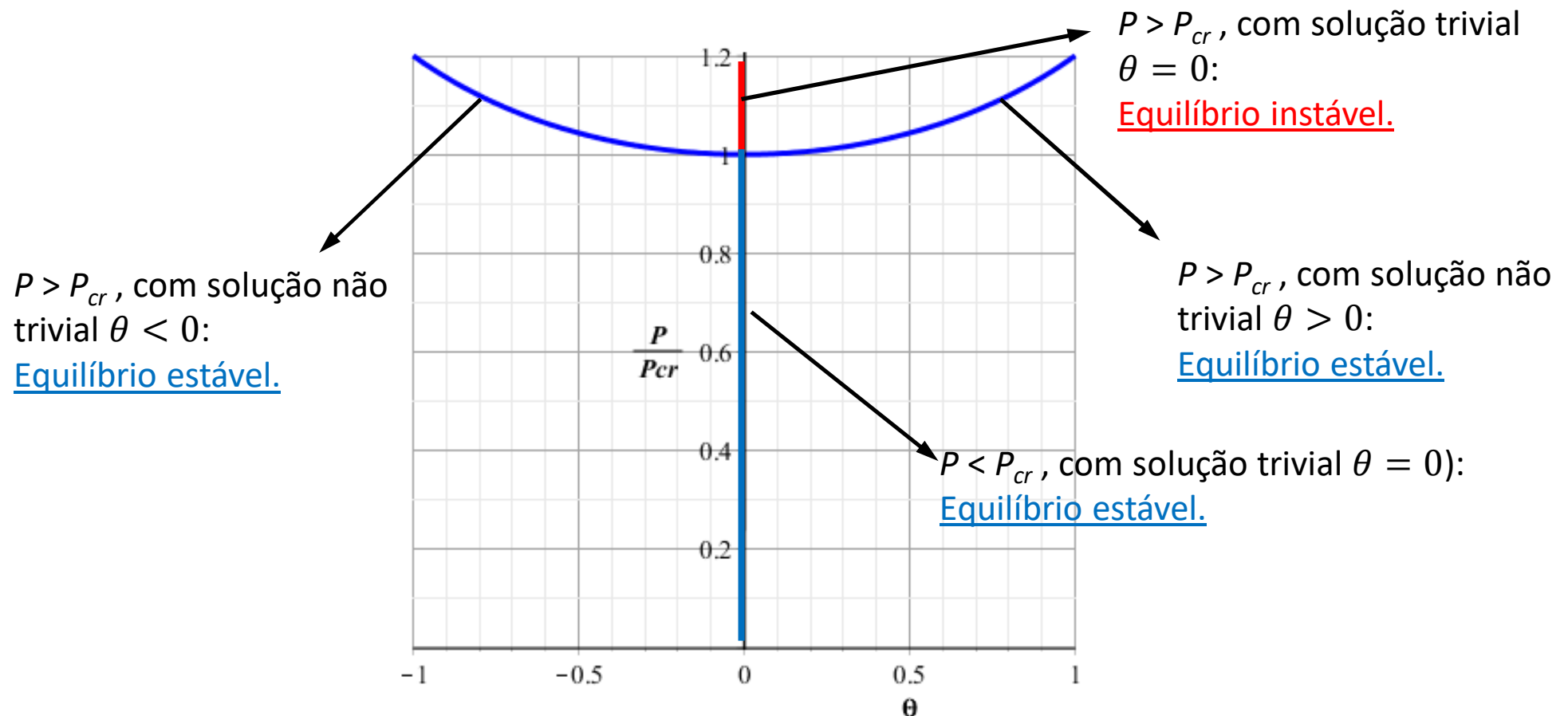
Conclusões:

1. Se $P < P_{cr} \Leftrightarrow P_{cr}/P > 1$, então: não há valores reais de θ (solução trivial é a única solução possível);
2. Se $P = P_{cr} \Leftrightarrow P_{cr}/P = 1$, então: $\theta = 0$ (solução trivial continua sendo a única solução possível);
3. Se $P > P_{cr} \Leftrightarrow P_{cr}/P < 1$, então: $\theta = \pm \sqrt{6(1 - P_{cr}/P)}$ (equilíbrio na configuração de referência (solução trivial) passa a ser instável; perturbações fazem com que o sistema busque outras configurações de equilíbrio).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

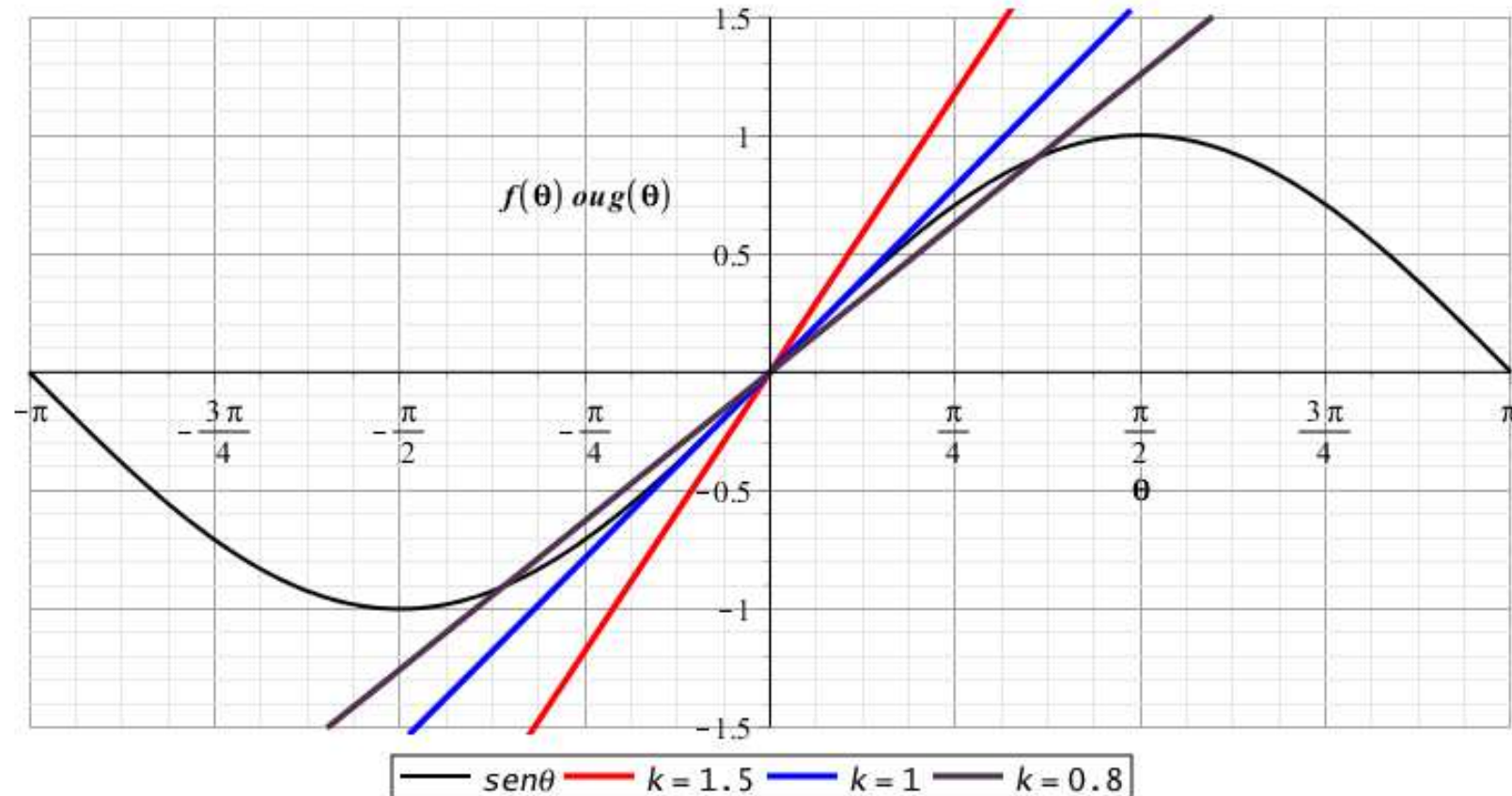
Agora o diagrama de equilíbrio fica melhor representado, pois, ao abrir mão da linearização, é possível determinar a relação entre carga e deslocamento (ou rotação) nos casos em que a carga excede a carga crítica (soluções não triviais):





3. Pela solução exata da equação governante não linear:

$$P \frac{L}{2} \operatorname{sen} \theta = 2 \beta_R \theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{4 \beta_R}{PL} \theta = \frac{P_{cr}}{P} \theta = k \theta$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observação:

Solução aproximada (2):
$$P \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = \frac{4\beta_R}{L} \theta \Leftrightarrow \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = \frac{P_{cr}}{P} \theta$$

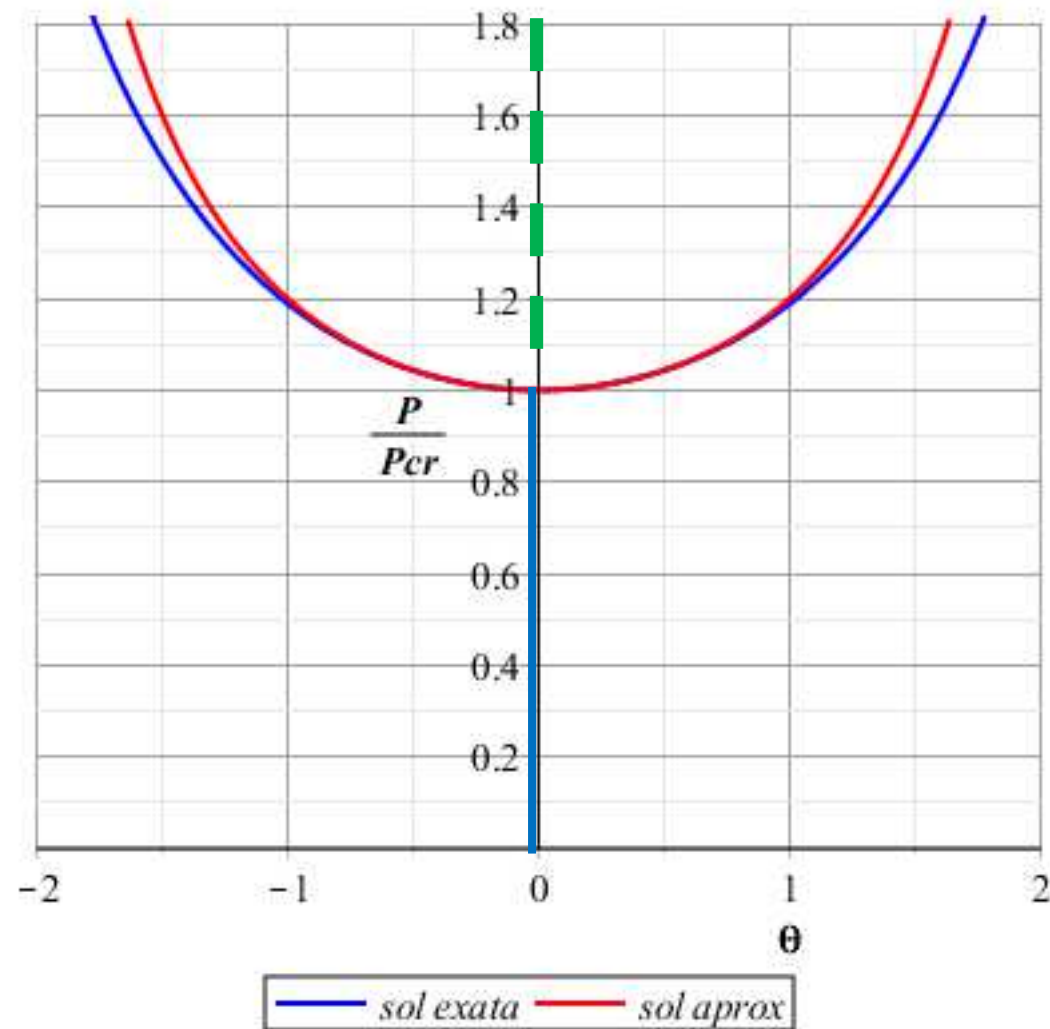
Desconsiderando a solução trivial ($\theta = 0$):
$$\frac{P}{P_{cr}} = \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right)^{-1}$$

Solução exata (3):
$$\text{sen} \theta = \frac{4\beta_R}{PL} \theta = \frac{P_{cr}}{P} \theta \Leftrightarrow \frac{P}{P_{cr}} = \frac{\theta}{\text{sen} \theta}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Comparação:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

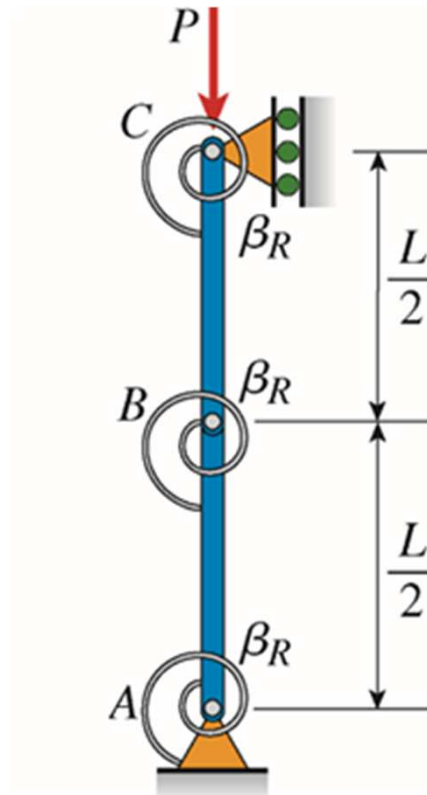
1. Para obter a carga crítica, é necessário impor o equilíbrio da estrutura **na configuração deformada** (o estudo na configuração inicial nunca permitirá determinar a carga crítica);
2. A equação governante deve, portanto, ser obtida considerando-se o equilíbrio na configuração deformada;
3. A determinação da carga crítica pode ser feita pela linearização da equação governante, mas neste caso não é possível determinar o deslocamento (ou rotação) final para uma dada carga superior à carga crítica;
4. A solução exata da equação governante ou sua aproximação (usando série de Taylor com mais termos) permite determinar o deslocamento (ou rotação) final para uma dada carga superior à carga crítica.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4. Exercícios

11.2-3. A figura mostra uma estrutura idealizada consistindo em duas barras rígidas, AB e BC, de comprimento $L/2$, vinculadas por pinos e molas torcionais lineares de constante β_R . Determine a carga crítica da estrutura. Resp.: $P_{cr} = 6 \beta_R / L$

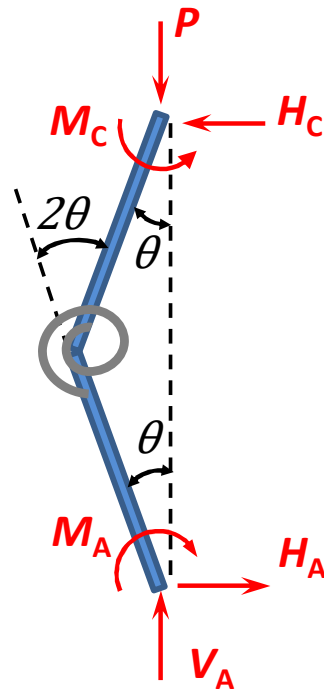
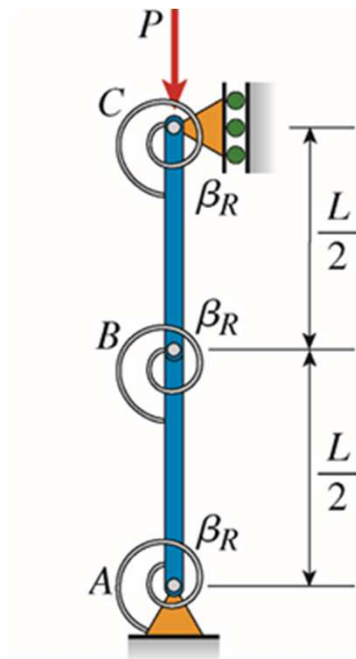




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

D.C.L. da estrutura na configuração deformada (admitindo-se que a flambagem tenha ocorrido):



Equações de equilíbrio:

$$H_A = H_C \quad (i)$$

$$V_A = P \quad (ii)$$

$$M_C + H_C L \cos \theta = M_A \quad (iii)$$

Equações Adicionais:

$$M_A = \beta_R \theta \quad (iv)$$

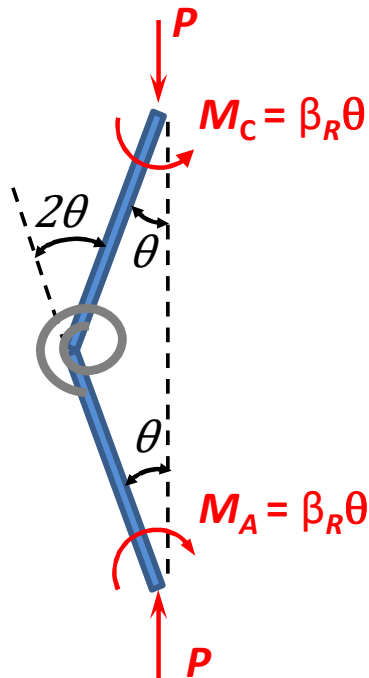
$$M_C = \beta_R \theta \quad (v)$$

De (iv), (v) em (iii) e (i): $H_C = 0 = H_A$

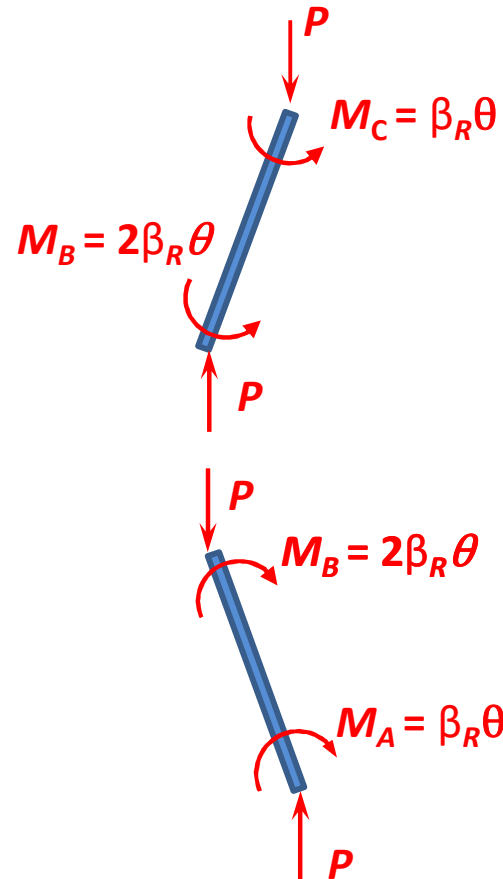


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

D.C.L. final:



D.C.L (barras AB e BC):



Equilíbrio:

$$M_C + M_B = P \frac{L}{2} \text{sen} \theta$$

$$3\beta_R \theta = P \frac{L}{2} \text{sen} \theta$$

Linearização:

$$3\beta_R \theta = P \frac{L}{2} \theta$$

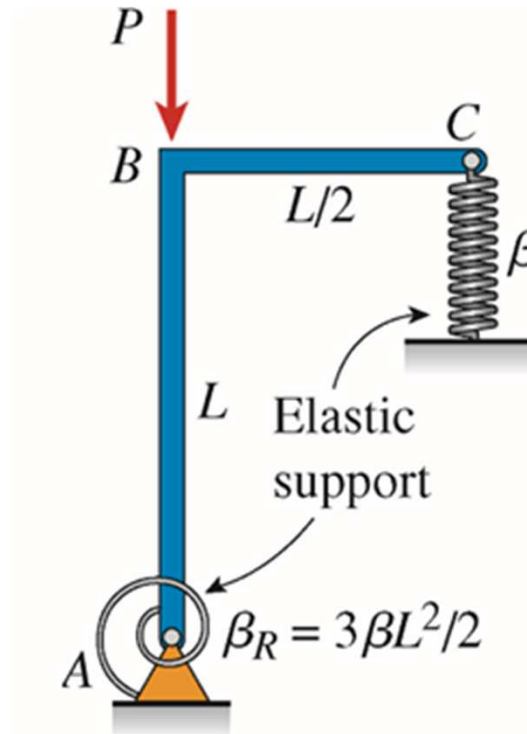
$$(6\beta_R - PL)\theta = 0$$

$$\theta = 0 \quad \text{ou} \quad P = P_{cr} = \frac{6\beta_R}{L}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

11.2-7. A figura mostra uma estrutura idealizada consistindo em uma estrutura rígida ABC em forma de L, apoiada por uma mola elástica linear (de constante β), em C, e vinculada a uma mola torcional linear de constante $\beta_R = 3\beta L^2/2$ em A. Determine a carga crítica da estrutura. Resp.: $P_{cr} = 7\beta L/4$

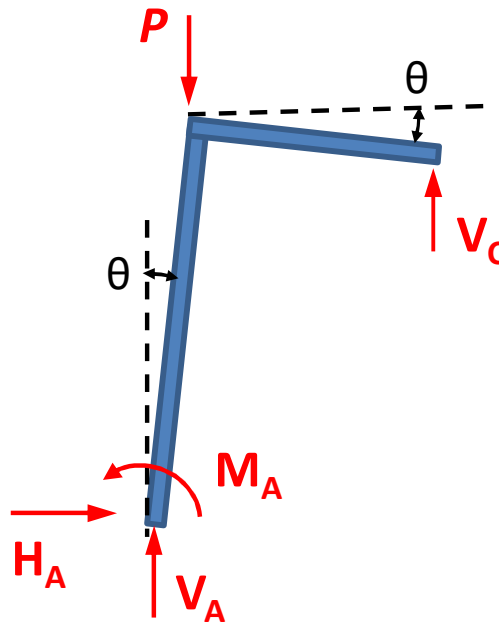
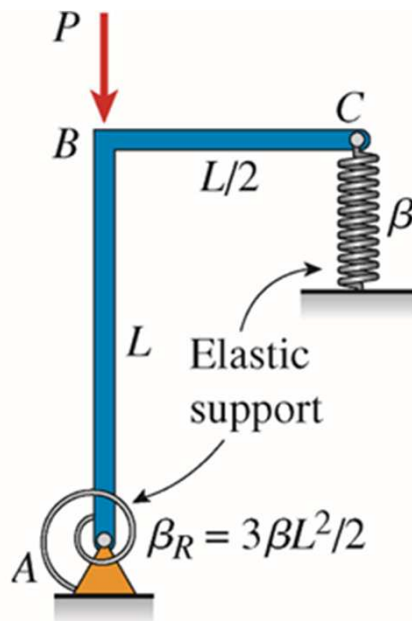




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

D.C.L. da estrutura na configuração deformada (admitindo-se que a flambagem tenha ocorrido):



Equações de equilíbrio:

$$H_A = 0$$

$$V_A + V_C = P$$

$$M_A + V_C \left(\frac{L}{2} \cos \theta + L \sin \theta \right) = PL \sin \theta$$

Eqs. Adicionais:

$$M_A = \beta_R \theta = \frac{3}{2} \beta L^2 \theta$$

$$V_C = \beta \left(\frac{L}{2} \sin \theta + L(1 - \cos \theta) \right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Da equação de equilíbrio de momentos e das duas equações adicionais, resulta:

$$M_A + \frac{V_C L}{2} (\cos\theta + 2\sin\theta) = PL\sin\theta \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\beta L^2\theta + \beta L \left(\frac{\sin\theta}{2} + 1 - \cos\theta \right) \frac{L}{2} (\cos\theta + 2\sin\theta) = PL\sin\theta$$

Linearizando a equação governante em torno de $\theta = 0$, virá:

$$\frac{3}{2}\beta L^2\theta + \frac{\beta L^2}{4}\theta = PL\theta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{4}\beta L\theta - P\theta = 0$$

$$\left(\frac{7}{4}\beta L - P \right) \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \theta = 0 \\ \text{ou} \\ P = P_{cr} = \frac{7}{4}\beta L \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] <http://publish.ucc.ie/boolean/2010/00/dePaor/11/en>
- [2] Custódio, A.B. Modelo Analítico para Estimativa da Falha por Instabilidade em Armaduras de Dutos Flexíveis. Tese (Doutorado). COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005, 161p.
- [3] Szafran, J.; Rykaluk, K. Steel lattice tower under ultimate load-chosen joint analysis. CEER 2017, 199-210. Doi: 10.1515/ceer-2017-0030
- [4] <https://www.insulators.info/pictures/?id=492311535>
- [5] <https://wonderfulengineering.com/speeding-train-tipping-scary/>
- [6] <https://www.stuff.co.nz/world/australia/101459018/the-heats-so-strong-in-rural-australia-it-bent-a-railway-track>
- [7] <http://deoharita.blogspot.com/2015/02/pipeline-global-buckling.html>
- [8] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap. 11 (seções 11.1 e 11.2)