



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #22

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

11/11/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Estruturas simétricas sob carregamentos antissimétricos;
2. Exemplos de estruturas simétricas sob carregamentos antissimétricos;
3. Exemplos de aplicação;
4. Estruturas simétricas sob carregamentos quaisquer;
5. Exemplo de aplicação.



1. Estruturas simétricas sob carregamentos antissimétricos

Lembramos que:

No curso, vamos explorar apenas as estruturas formadas por barras, mas os conceitos aqui apresentados são gerais e válidos para quaisquer outras estruturas simétricas (formadas, p. ex., por placas, cascas, sólidos, ou até mesmo uma combinação de vários elementos estruturais).

O primeiro passo na análise de uma estrutura simétrica é identificar o(s) plano(s) de simetria existente(s). No curso vamos explorar apenas as simetrias axiais que são aquelas em que o eixo (ou plano) de simetria funciona como um espelho de tal forma que cada parte da estrutura (em cada lado do eixo, ou do plano, de simetria) é a imagem espelhada da parte correspondente em relação ao eixo (ou plano) de simetria considerado.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como vimos na aula anterior, no caso de estruturas simétricas, deve-se atentar que a simetria (em relação ao plano considerado) deve envolver:

- Simetria de topologia (número e distribuição de barras ou outros elementos estruturais como molas, molas de torção, cabos ou tirantes);
- Simetria na distribuição dos apoios (reações vinculares que eles oferecem);
- Simetria na distribuição de alívios (como alívios de momento e alívios de cortante);
- Simetria nas propriedades geométricas de barras simétricas (que devem possuir as mesmas propriedades seccionais);
- Simetria nas propriedades mecânicas de barras simétricas.



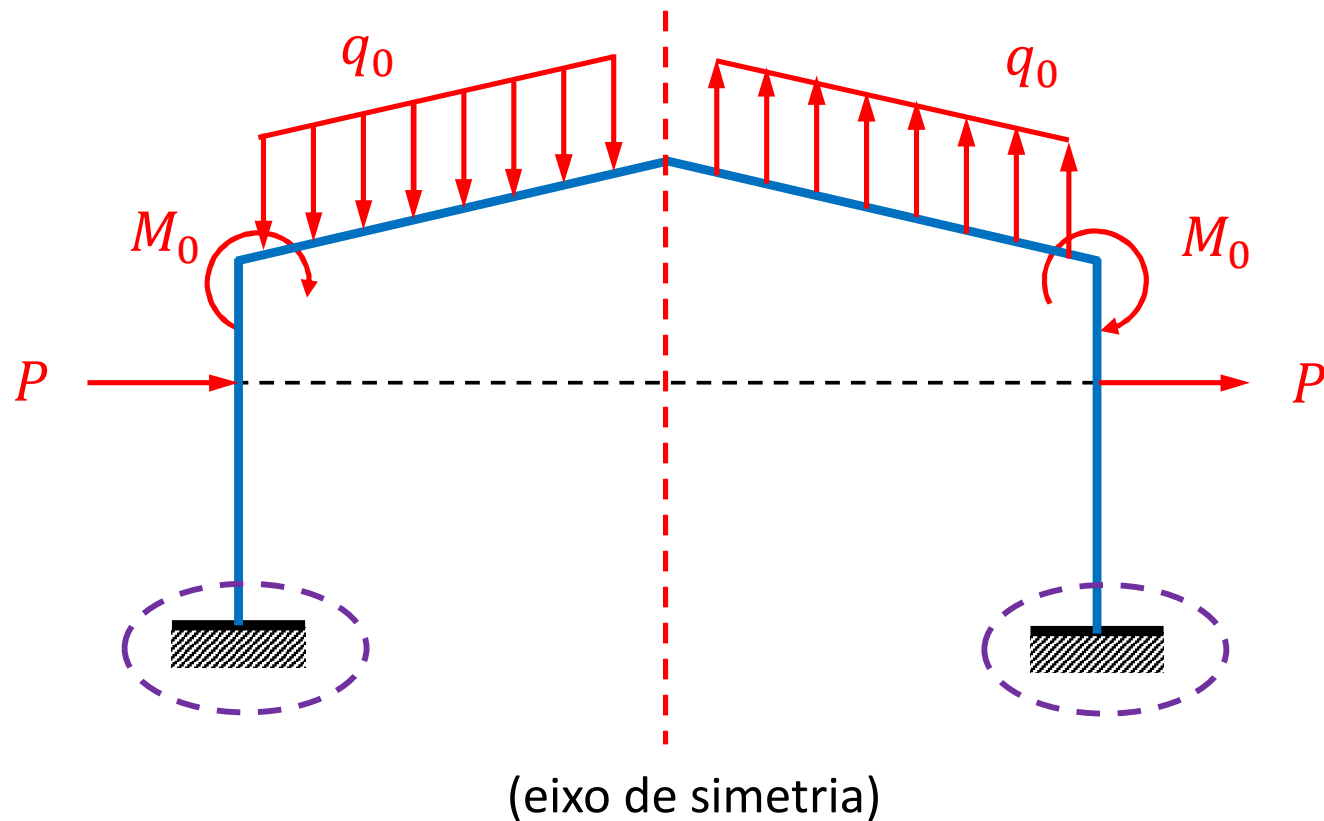
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O segundo passo é verificar se o carregamento aplicado à estrutura simétrica é antissimétrico em relação ao plano de simetria que será explorado. Neste caso, devemos ressaltar que:

- i) Para forças (concentradas ou distribuídas): os carregamentos aplicados em pontos simétricos devem ser a imagem espelhada (em relação ao plano de simetria) um do outro, mas com sentidos contrários ao da imagem espelhada;
- ii) No caso de binários (concentrados ou distribuídos), devemos lembrar que binários antissimétricos são representados por vetores simétricos. A representação dos binários antissimétricos por “setas curvas” facilita o entendimento (causam menos confusão);
- iii) As reações vinculares também devem ser antissimétricas (em relação ao eixo de simetria considerado), mesmo que os vínculos não sejam exatamente idênticos, como explicado na aula anterior.



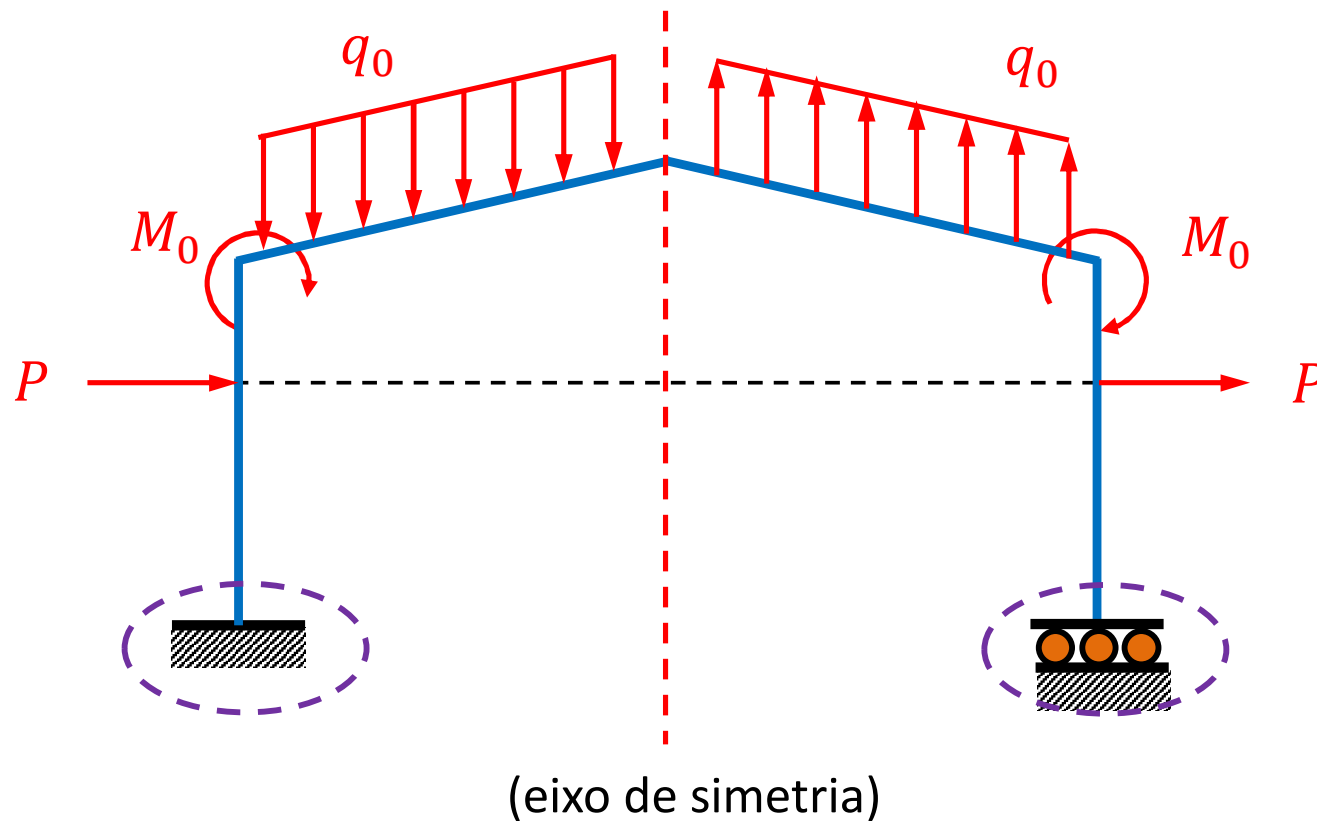
2. Exemplos de Estruturas Simétricas sob Carregamentos Antissimétricos





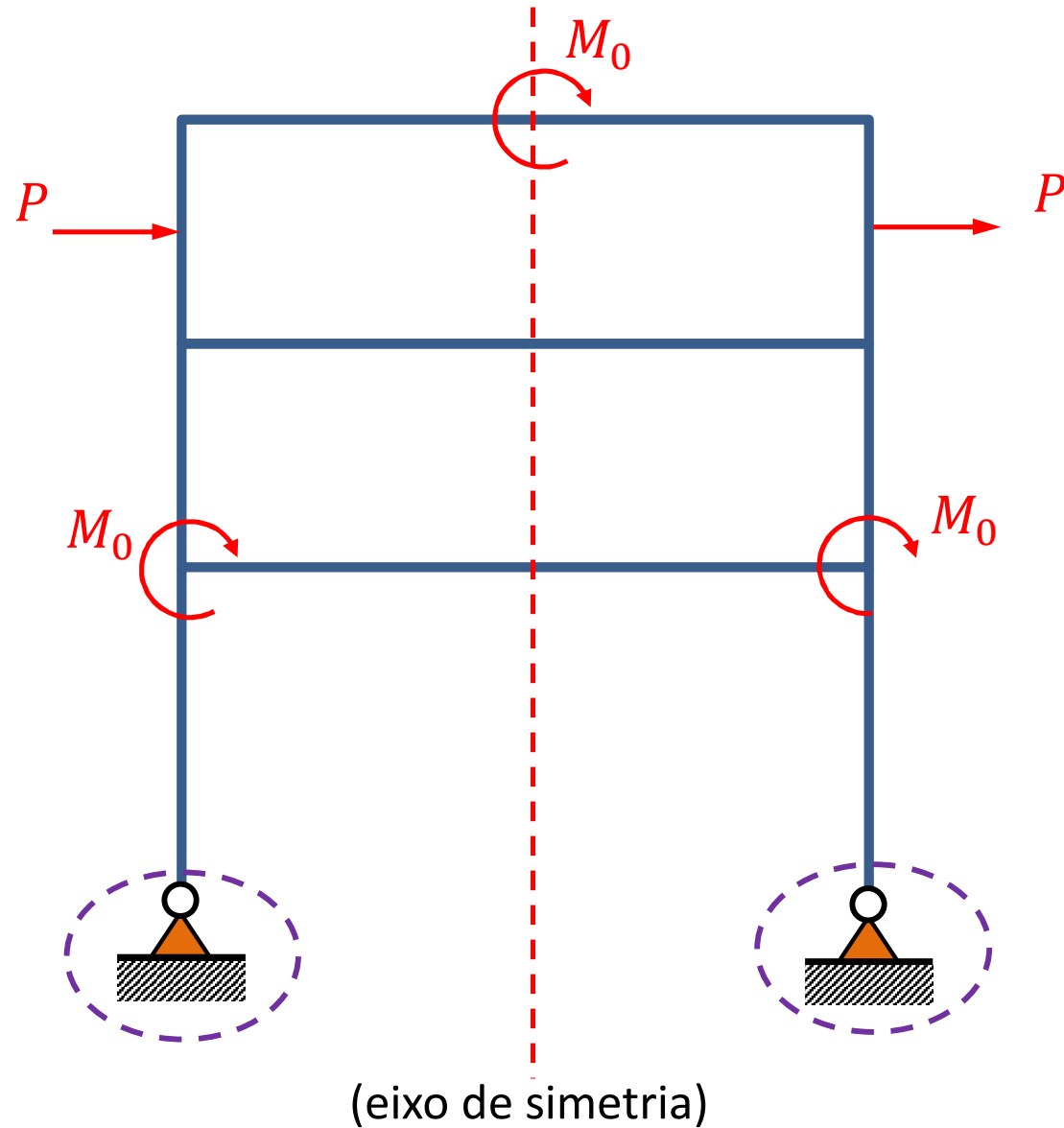
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Note contudo, que, modificando o apoio do lado direito, não teremos mais reações antissimétricas (reações vinculares são diferentes), não sendo, portanto, um caso de estrutura simétrica sob carregamento antissimétrico:



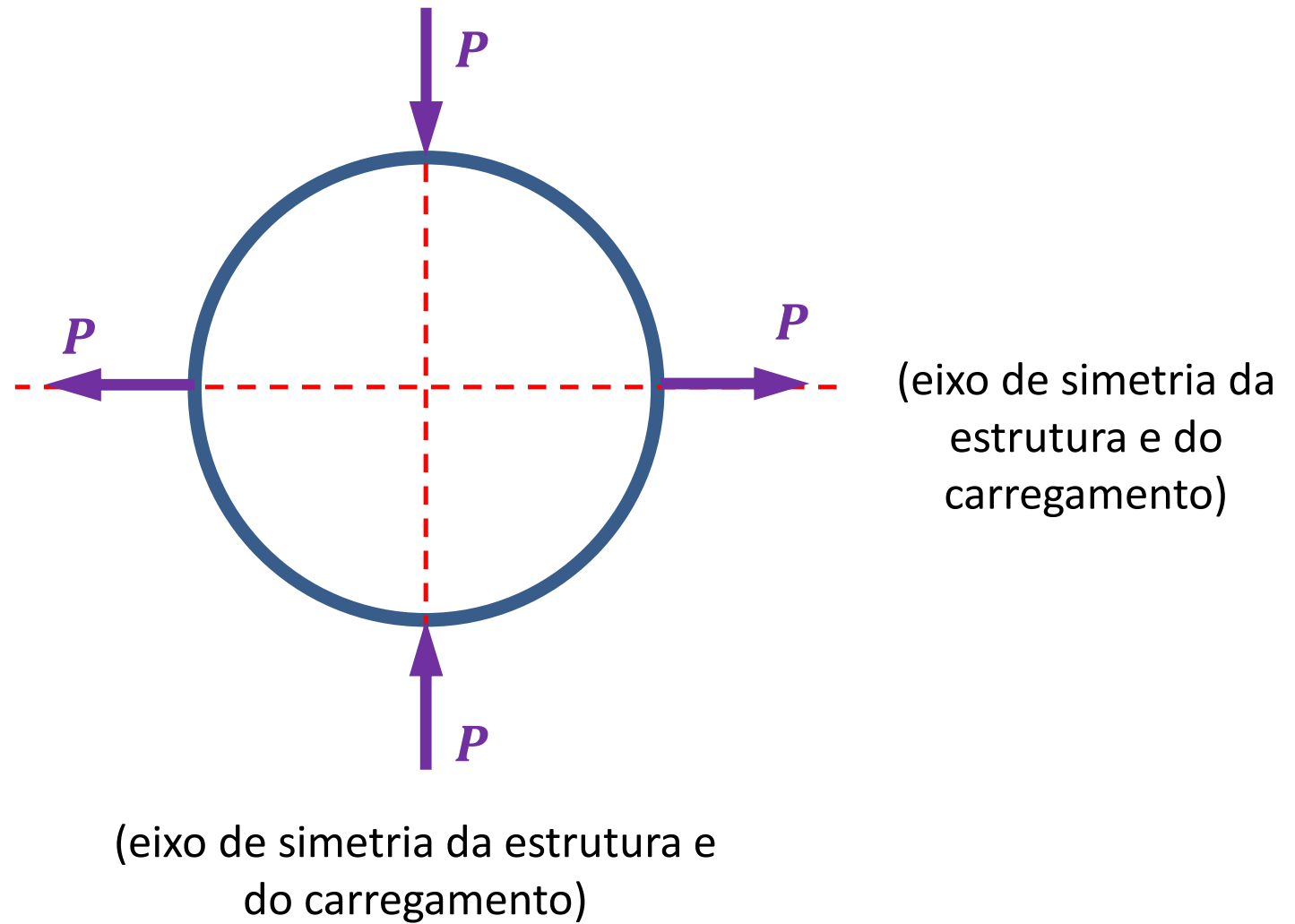


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



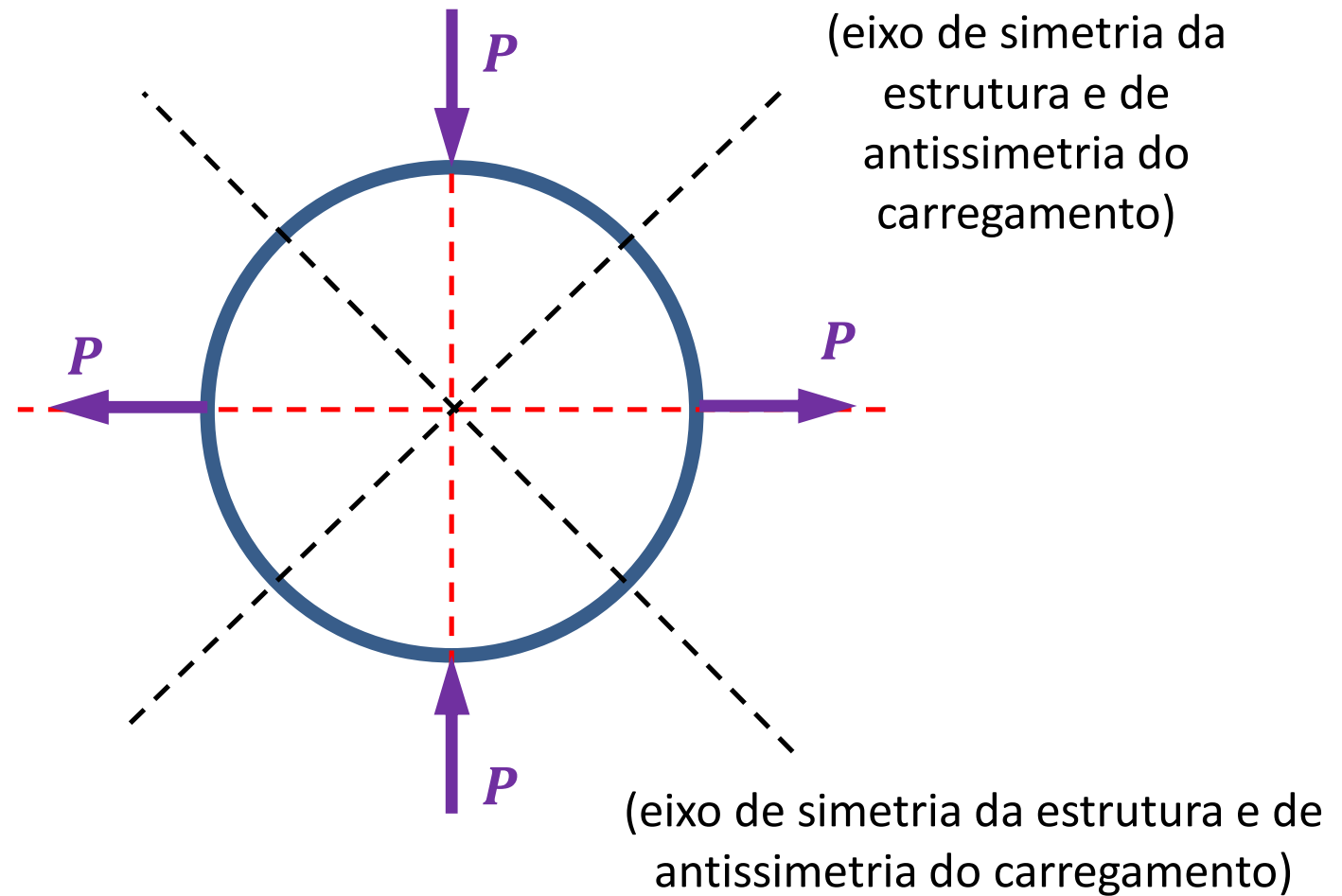


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

**Observações úteis para a análise de estruturas
simétricas sob carregamentos antissimétricos:**

1. A deformada deve ser sempre antissimétrica em relação ao(s) plano(s) considerados (leia-se: plano de simetria da estrutura E de antissimetria para o carregamento). Casos em que ocorra instabilidade estrutural fogem ao escopo destas análises (a deformada, nestes casos, não será necessariamente antissimétrica);
2. As reações de apoio serão também antissimétricas (em relação ao mesmo plano de antissimetria do carregamento);
3. Os pontos (dos eixos centrais das barras) que estão sobre o eixo de simetria da estrutura (e de antissimetria do carregamento) terão rotações não nulas e o único deslocamento impedido (ou seja, nulo) é o deslocamento na direção paralela ao eixo de simetria da estrutura;
4. Os pontos (dos eixos centrais das barras) que estão fora do eixo de simetria podem sofrer rotação (que será igual e no mesmo sentido ao da rotação observada no ponto simétrico);



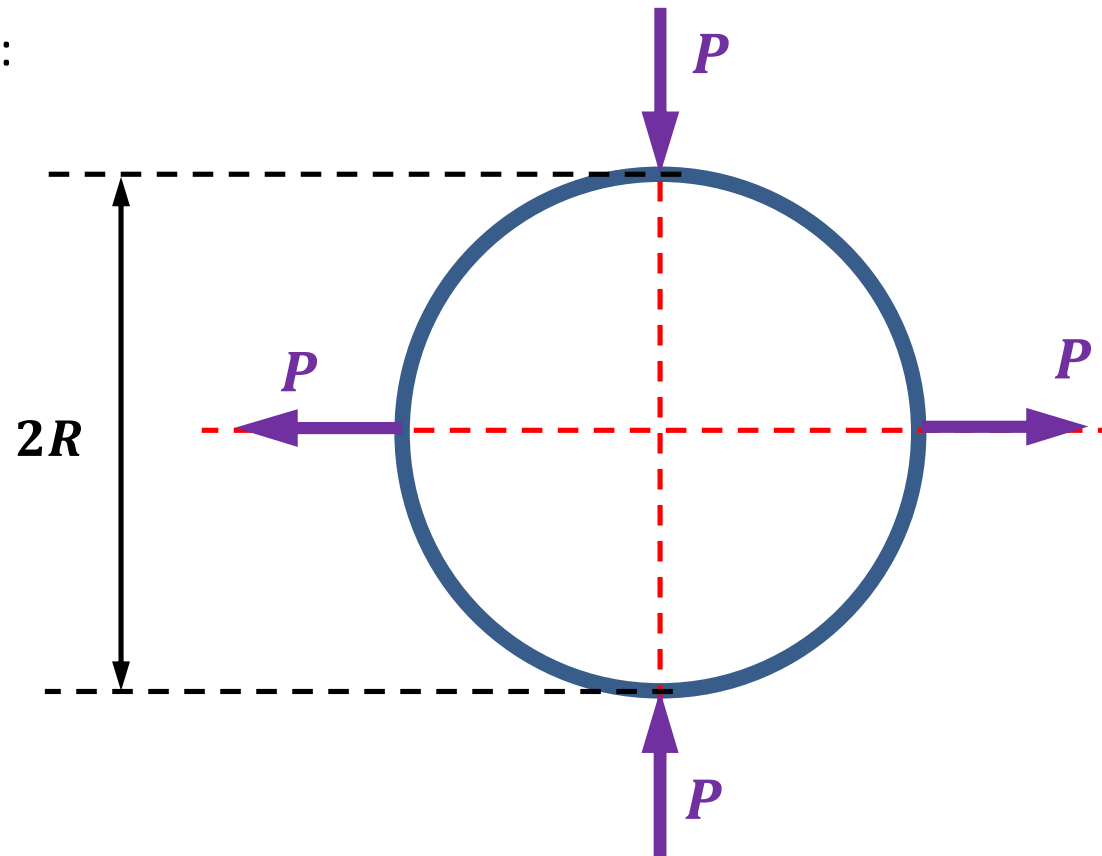
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

5. As tensões existentes na seção (transversal ou não transversal) que passa pelo eixo de simetria da estrutura (e de antissimetria do carregamento) geram apenas esforços de natureza antissimétrica. Em outras, palavras, só podemos encontrar tensões cisalhantes nestas seções (que geram uma força paralela ao plano de simetria da estrutura);
6. Não existem tensões normais nas seções que passam pelo plano de simetria da estrutura (e de antissimetria do carregamento), não havendo, portanto, componente de força que seja ortogonal ao plano de simetria, nem momento fletor nesta seção. Note, contudo, que estamos aqui nos referindo aos esforços internos (não aos externos).



3. Exemplos de aplicação

Ex.1:



Dados:

P, R, EI

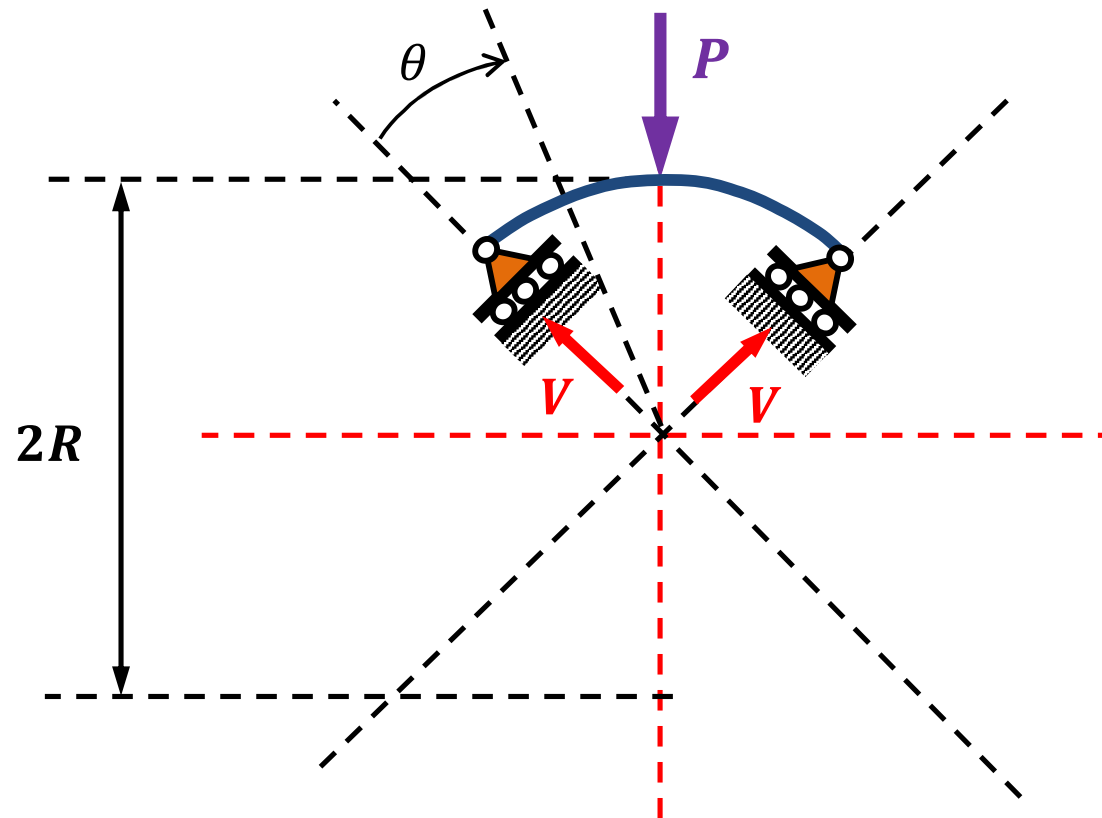
Obter:

$M_{máx} = ?$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:



$$2V \frac{\sqrt{2}}{2} = P$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

$$M(\theta) = VR \sin \theta$$

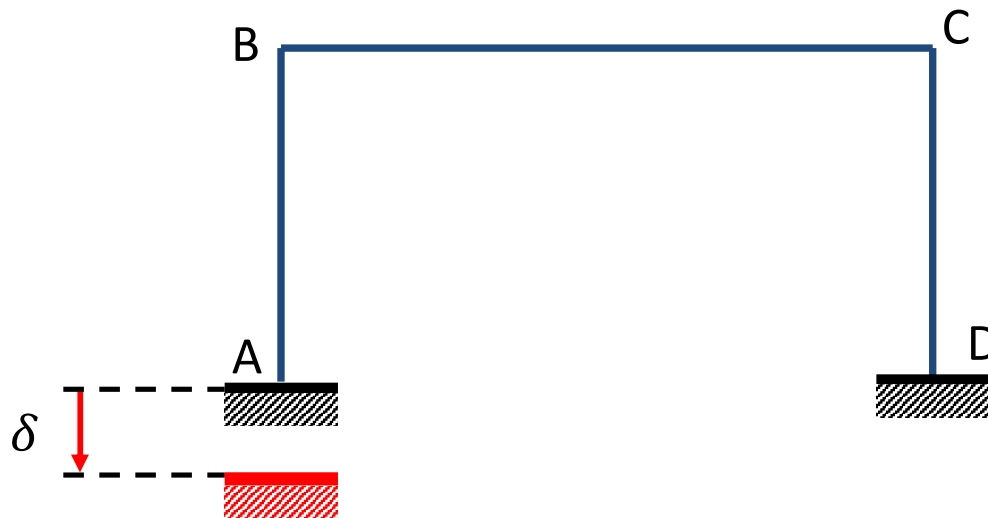
$$\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

$$M_{\text{máx}} = VR \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{PR}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

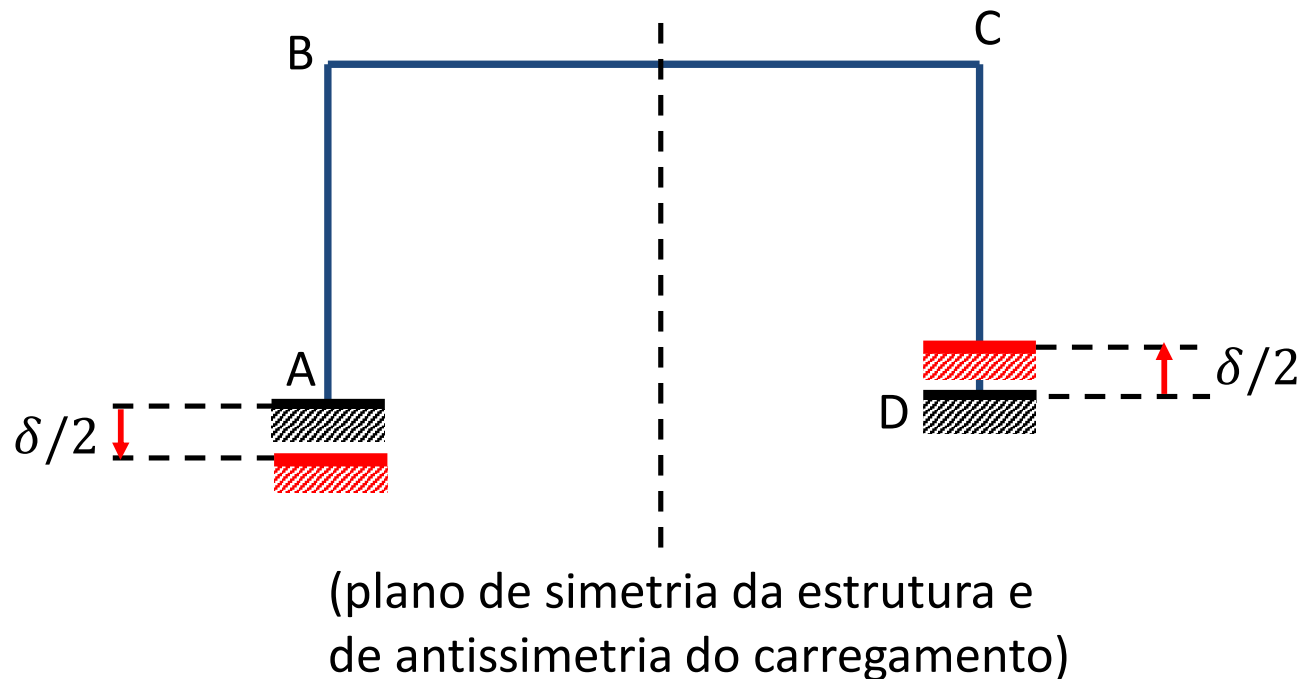
Ex.2: O pórtico ABCD ilustrado na figura é formado por duas colunas de comprimento L e uma viga de comprimento $2L$. Todas as barras possuem a mesma rigidez flexional EI . Considerando que o apoio A do pórtico sofra um pequeno recalque vertical igual a δ , determine o maior momento fletor no pórtico decorrente deste recalque. Dados: EI , L , δ .





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

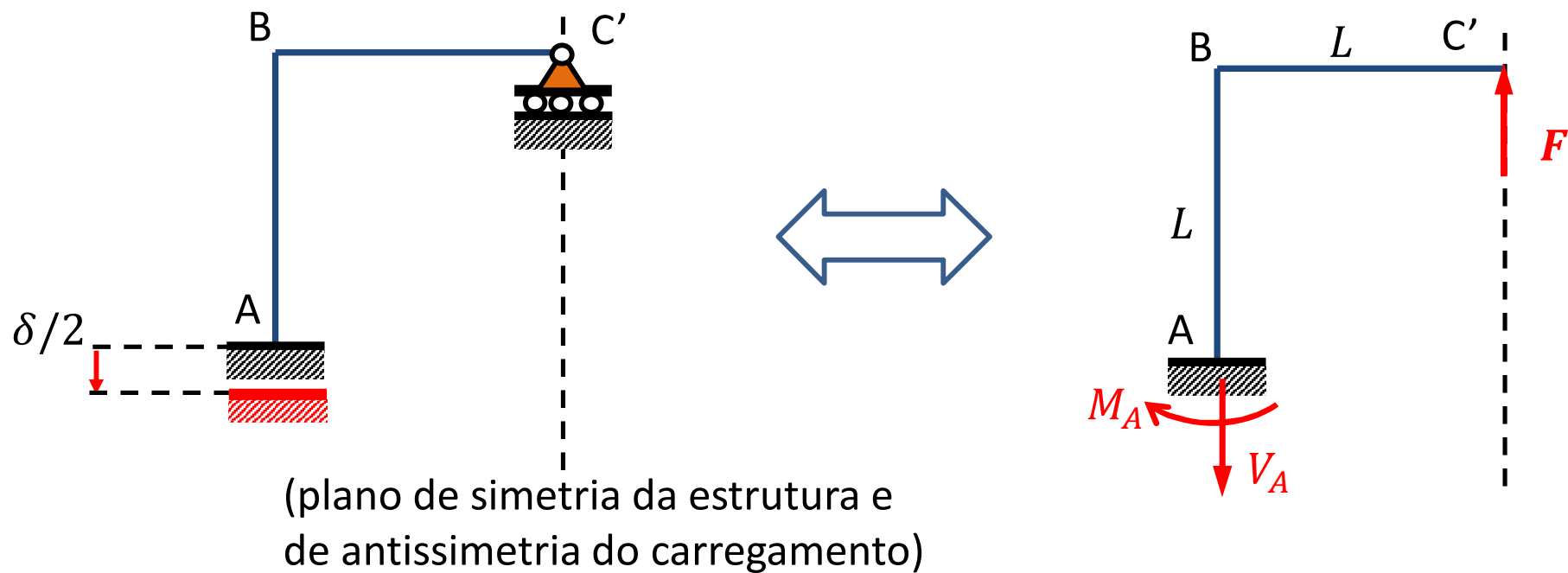
Solução: O problema pode ser interpretado como o de um duplo recalque de apoio: um recalque vertical (para baixo) de $\delta/2$ no apoio A e um recalque vertical (para cima) de $\delta/2$ no apoio D, resultando em uma deformada antissimétrica.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Analizando apenas a parte esquerda da figura, teremos:



$$\delta_{v,C'} = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{\delta}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\delta_{v,C'} = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^L \frac{M_i^2}{2EI} ds \right) = \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^L \frac{M_i}{EI} \frac{\partial M_i}{\partial F} ds \right) = \frac{\delta}{2}$$

Momento na viga (trecho C' → B):

$$M_1(s) = Fs \quad (0 \leq s \leq L) \quad \frac{\partial M_1}{\partial F} = s$$

Momento na coluna (trecho B → A):

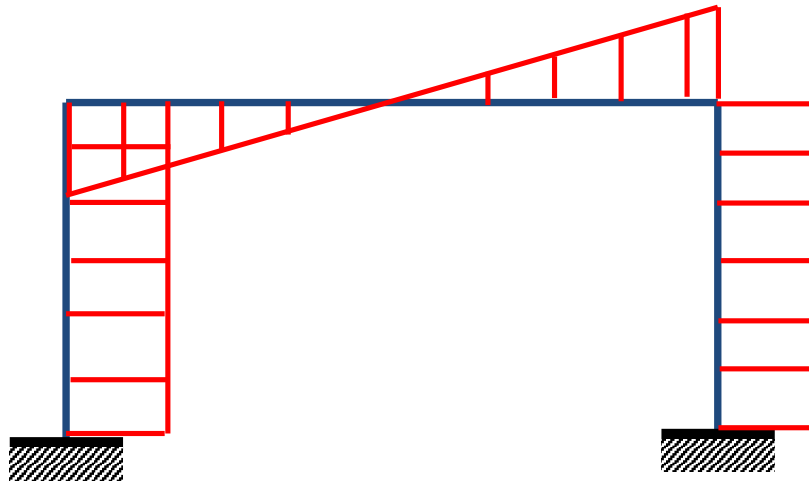
$$M_2(s) = FL \quad (0 \leq s \leq L) \quad \frac{\partial M_2}{\partial F} = L$$

$$\delta_{v,C'} = \int_0^L \frac{Fs^2}{EI} ds + \int_0^L \frac{FL^2}{EI} ds = \frac{4}{3} \frac{FL^3}{EI} = \frac{\delta}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\frac{4 FL^3}{3 EI} = \frac{\delta}{2} \quad \longleftrightarrow \quad F = \frac{3 EI \delta}{8 L^3}$$



$$M_{\text{máx}} = FL = \frac{3 EI \delta}{8 L^2}$$

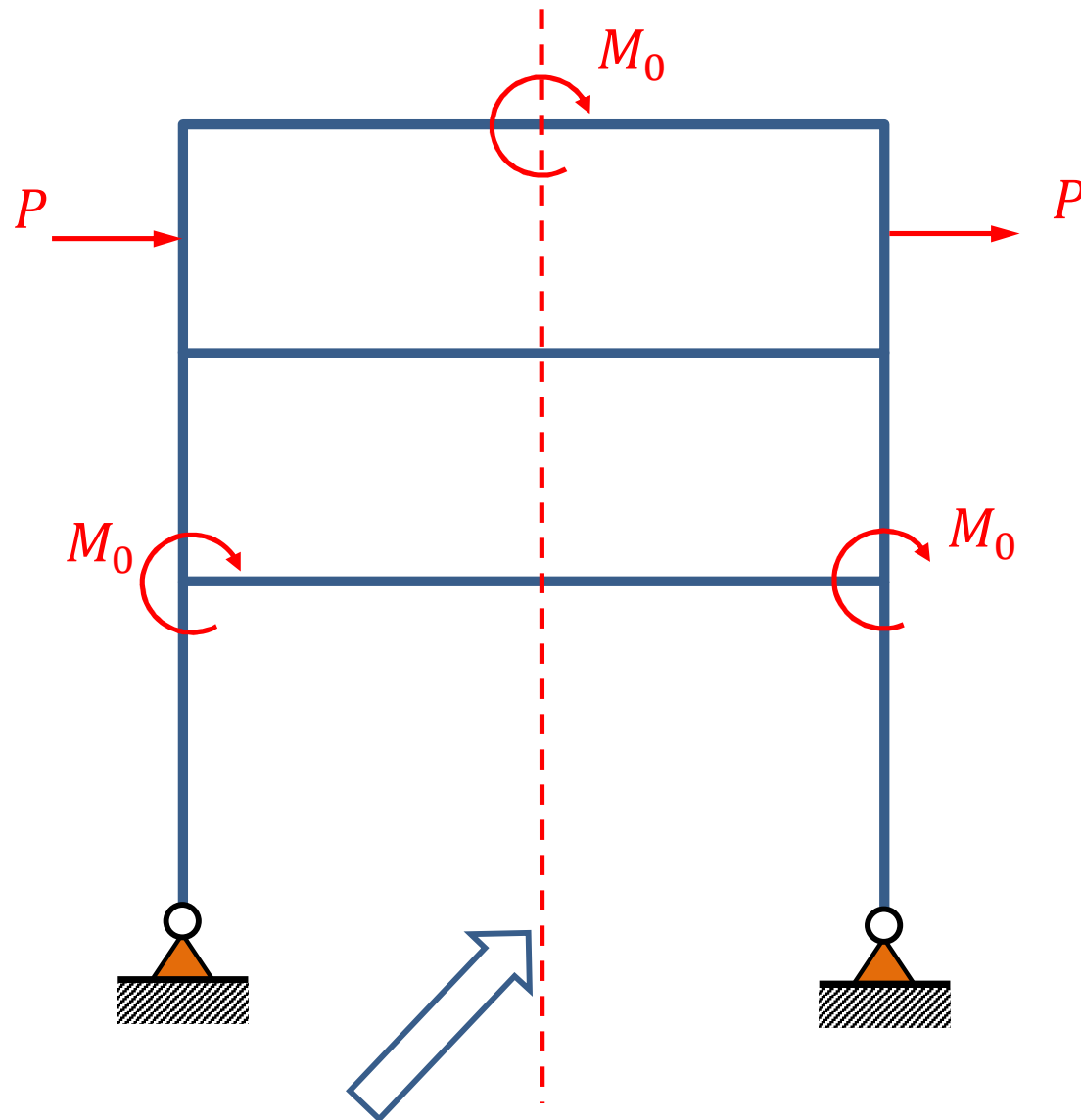


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.3:

$$g = 9 + 4 - 6 = 7$$

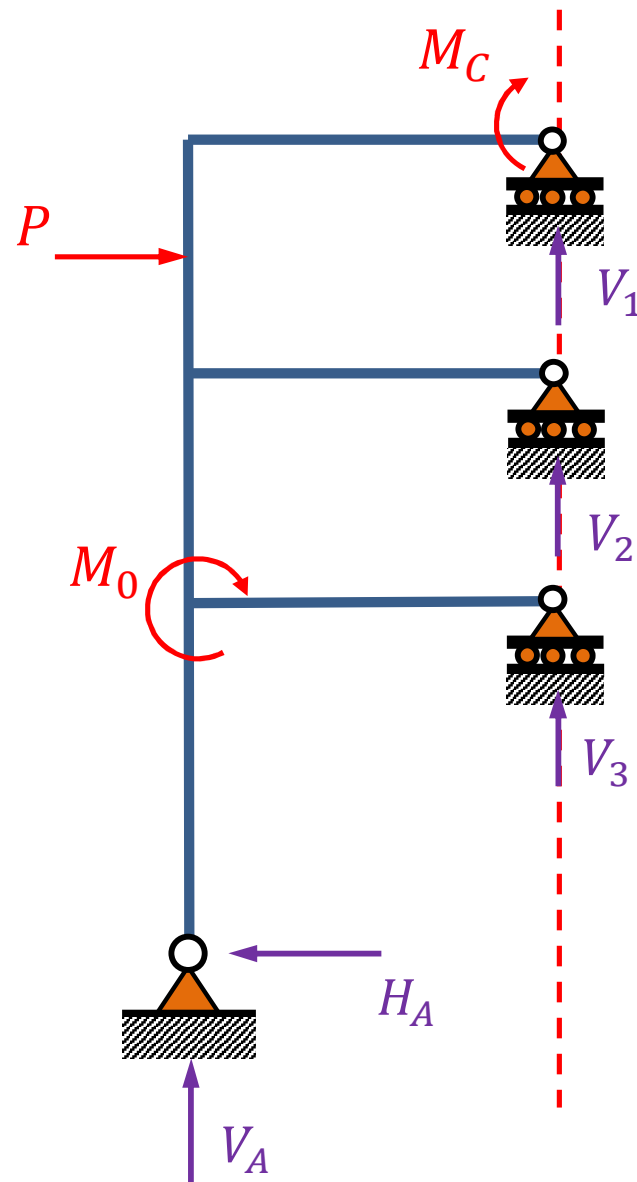
(grau de hiperestaticidade da estrutura sem utilizar os conceitos de simetria. Vide aula anterior)



(eixo de simetria da estrutura e de antissimetria do carregamento)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Nota: $M_c = \frac{M_0}{2}$

$$g = 5 - 3 = 2$$



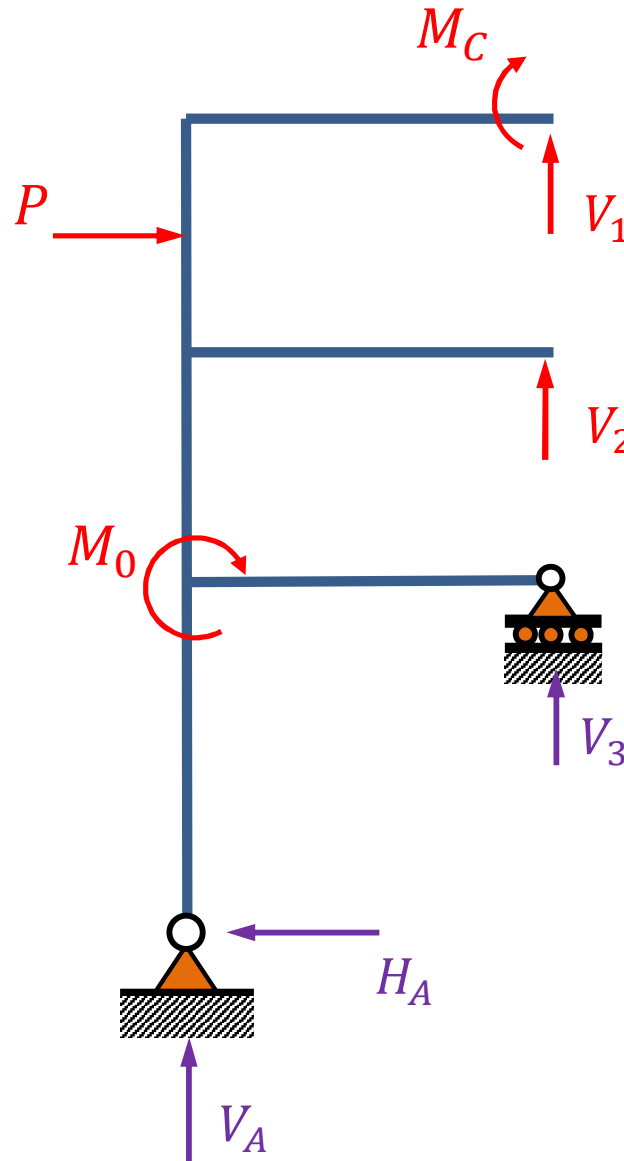
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E.I.F. possível:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_{\text{pólo } A} = 0$$



Nota: $M_c = \frac{M_0}{2}$

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_1} = 0$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_2} = 0$$



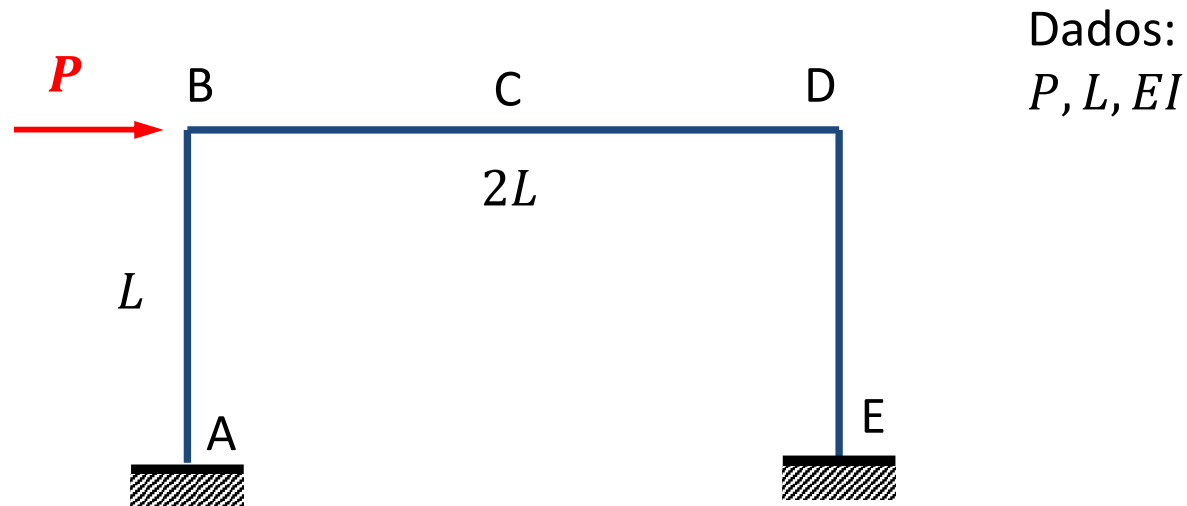
4. Estruturas simétricas sob carregamentos quaisquer

No caso de termos uma estrutura simétrica e considerando que seja possível aplicar o Princípio da Superposição (i.é, o material é elástico-linear e existe linearidade geométrica), podemos transformar um carregamento qualquer aplicado à estrutura na superposição de um carregamento simétrico e outro antissimétrico.

Analisando a estrutura para cada um destes carregamentos, podemos aplicar o Princípio da Superposição para determinarmos o resultado final para o carregamento dado originalmente.



5. Exemplo de aplicação

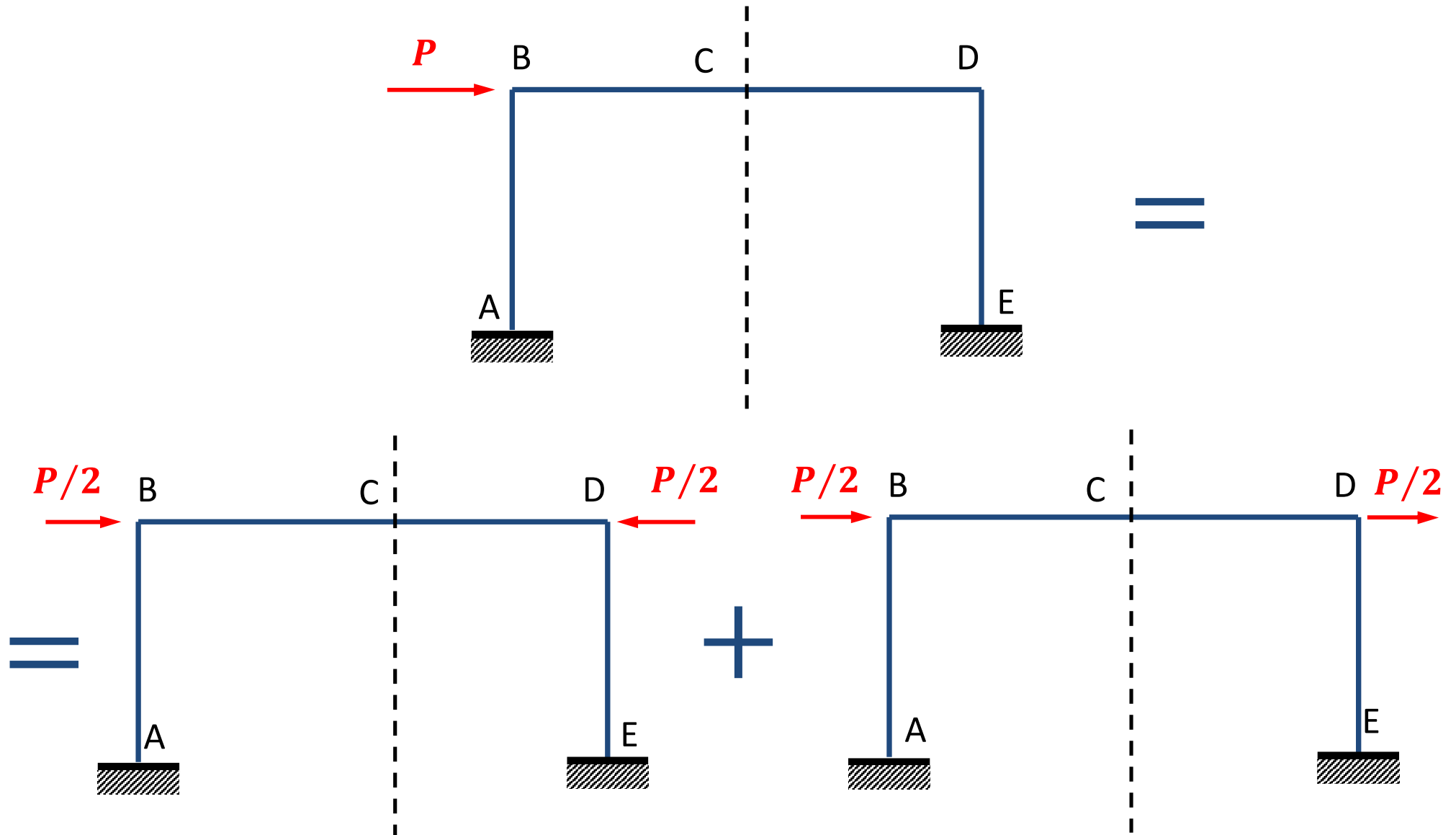


Determinar:

- a) Deslocamento horizontal do ponto B;
- b) Rotação do ponto C;
- c) Energia complementar total da estrutura.



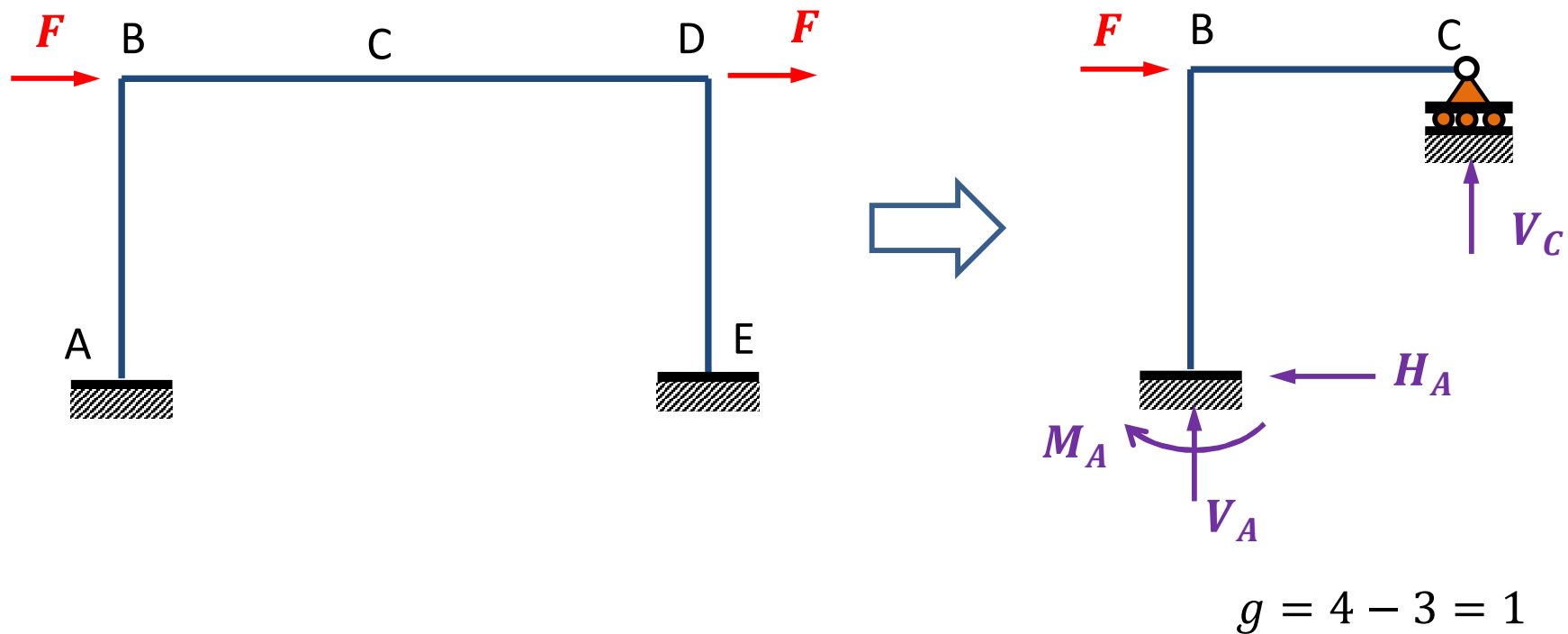
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

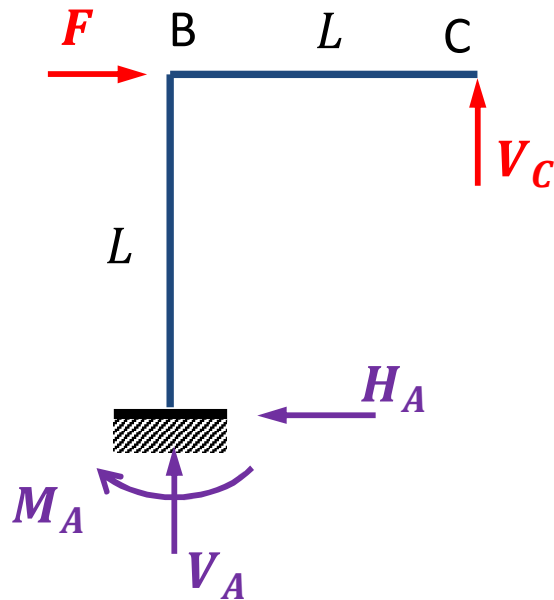
Desprezando o efeito de compressão (muito pequeno) da viga BCD decorrente da parcela simétrica do carregamento, basta analisar a parcela antissimétrica do carregamento. Assim, nomeando $F = P/2$:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Escolhendo V_C como incógnita hiperestática do problema, teremos a seguinte E.I.F.:



Aplicando o Princípio da Energia Complementar Mínima, virá:

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_C} = \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^L \frac{M_i}{EI} \frac{\partial M_i}{\partial V_C} ds \right) = 0$$

$$\int_0^L \frac{M_1}{EI} \frac{\partial M_1}{\partial V_C} ds + \int_0^L \frac{M_2}{EI} \frac{\partial M_2}{\partial V_C} ds = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Momento no trecho C $\rightarrow$ B:

$$M_1(s) = V_C s \quad \frac{\partial M_1}{\partial V_C} = s \quad (0 \leq s \leq L)$$

Momento no trecho B $\rightarrow$ A:

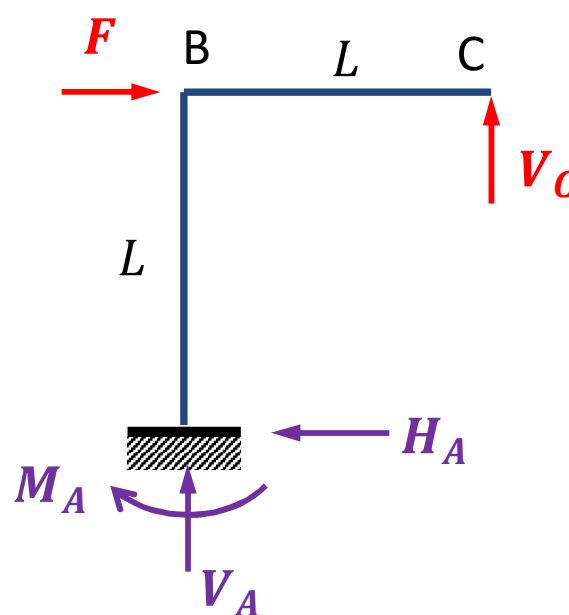
$$M_2(s) = V_C L - Fs \quad \frac{\partial M_2}{\partial V_C} = L \quad (0 \leq s \leq L)$$

$$\int_0^L (V_C s^2) ds + \int_0^L (V_C L^2 - FLs) ds = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = \frac{3F}{8} = \frac{3P}{16}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Determinação do deslocamento horizontal do ponto B:


$$\delta_{H,B} = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{1}{EI} \left(\int_0^L (V_C s)(0) ds + \int_0^L (V_C L - Fs)(-s) ds \right)$$
$$\delta_{H,B} = \frac{FL^3}{3EI} - \frac{V_C L^3}{2EI}$$

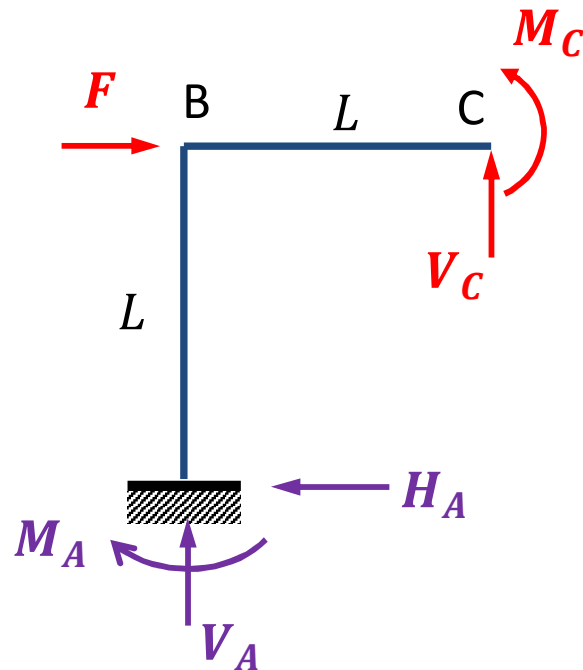
Como: $F = \frac{P}{2}$ e $V_C = \frac{3P}{16}$

$$\delta_{H,B} = \frac{7}{96} \frac{PL^3}{EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Determinação da rotação do ponto C:



$$\theta_C = \frac{\partial U^*}{\partial M_C} = \frac{1}{EI} \left(\int_0^L (V_C s + M_C)(1) ds \right) + \frac{1}{EI} \left(\int_0^L (V_C L + M_C - F s)(1) ds \right)$$

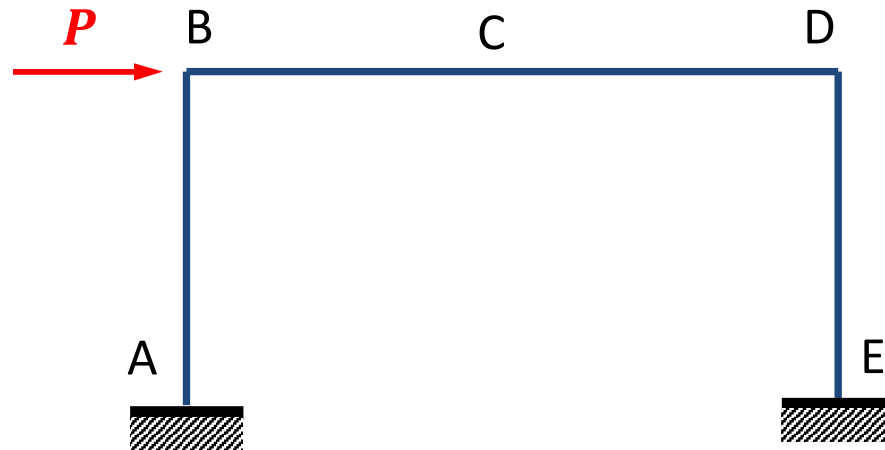
Como: $F = \frac{P}{2}$, $V_C = \frac{3P}{16}$ e $M_C = 0$

$$\theta_C = \frac{1}{32} \frac{PL^2}{EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Determinação da energia complementar total da estrutura:



$$U^* = U = W = W^* = \frac{P\delta_{H,B}}{2} = \frac{P}{2} \times \frac{7}{96} \frac{PL^3}{EI} = \frac{7}{192} \frac{P^2L^3}{EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar, (2021), 105p.
- [2] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.10.