



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #21

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

05/11/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Estruturas simétricas na Engenharia;
2. Estruturas simétricas sob carregamentos simétricos;
3. Exemplos de aplicação.



1. Estruturas simétricas na Engenharia

Motivação: O número de estruturas simétricas utilizadas em diversas áreas da Engenharia (e também encontradas na natureza) é significativo. Como exemplos podemos citar meios de transporte (automóveis, ônibus, navios, aviões, etc.), equipamentos mecânicos (vasos de pressão, pontes rolantes, tubulações, comportas industriais etc.), estruturas civis (galpões, pontes, edifícios) e outros (silos de armazenamento, etc.). As figuras a seguir ilustram esta grande variedade.

Objetivo: o objetivo desta aula é explorar o uso da simetria para simplificar a análise de estruturas simétricas seja por métodos analíticos (vistos no curso) ou por métodos numéricos (como o método dos elementos finitos).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

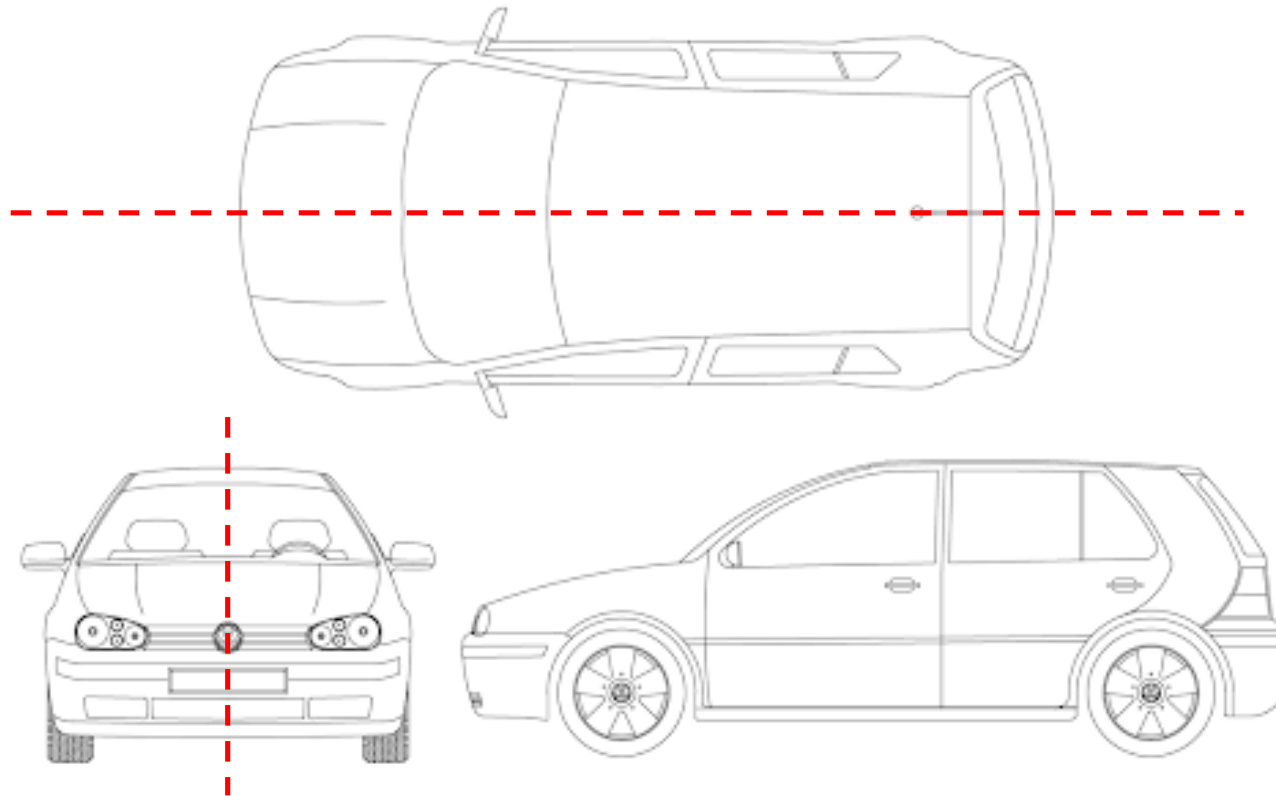


Fig.1: Plano de simetria em um automóvel.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.2: Avião cargueiro Antonov 124 (AN-124)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.3: Vaso de pressão.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.4: Silos para armazenagem de grãos ou outros produtos.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.5: Estruturas metálicas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.6: Comporta vagão.



2. Estruturas simétricas sob carregamentos simétricos

No curso, vamos explorar apenas as estruturas formadas por barras, mas os conceitos aqui apresentados são gerais e válidos para quaisquer outras estruturas simétricas (formadas, p. ex., por placas, cascas, sólidos, ou até mesmo uma combinação de vários elementos estruturais).

O primeiro passo na análise de uma estrutura simétrica é identificar o(s) eixo(s) de simetria existente(s). No curso vamos explorar apenas as simetrias axiais que são aquelas em que o eixo de simetria funciona como um espelho de tal forma que cada parte da estrutura (de cada lado do eixo de simetria) é a imagem espelhada da parte correspondente em relação ao eixo de simetria considerado.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

No caso de estruturas simétricas, deve-se atentar que a simetria (em relação ao plano considerado) deve envolver:

- Simetria de topologia (número e distribuição de barras ou outros elementos estruturais como molas, molas de torção, cabos ou tirantes);
- Simetria nas reações vinculares oferecidas pelos apoios;
- Simetria na distribuição de alívios (como alívios de momento e alívios de cortante);
- Simetria nas propriedades geométricas de barras simétricas (mesmas propriedades seccionais);
- Simetria nas propriedades mecânicas de barras simétricas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



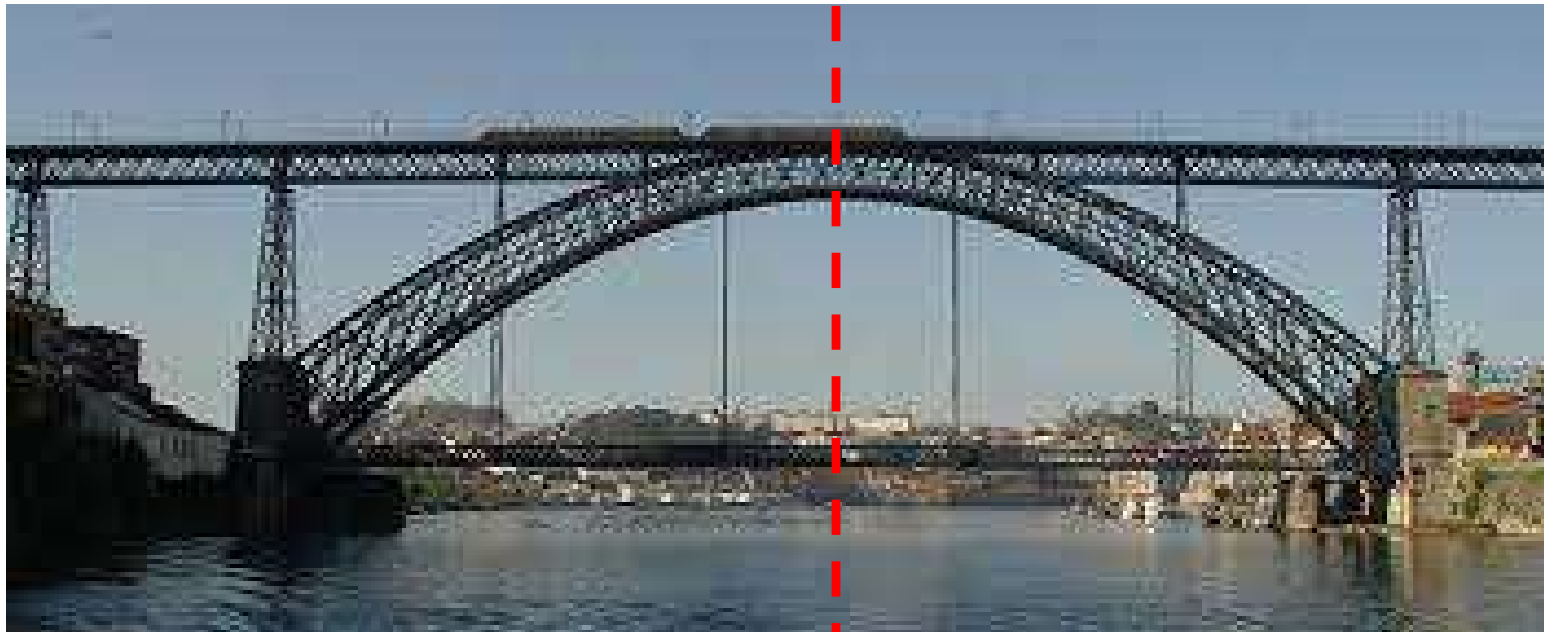


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





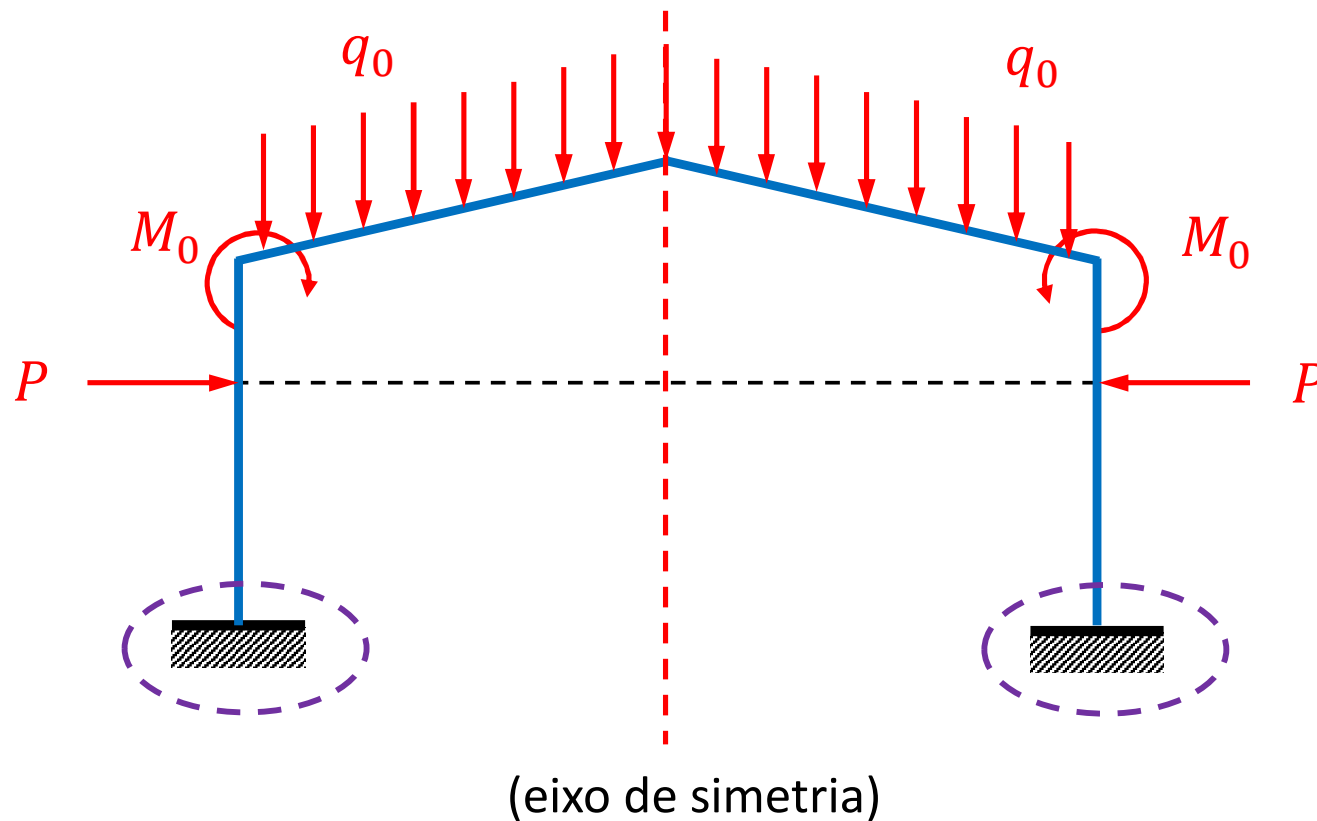
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O segundo passo é verificar se o carregamento aplicado à estrutura simétrica também é simétrico em relação ao plano de simetria que será explorado. Neste caso, devemos ressaltar que:

- i) No caso de forças (concentradas ou distribuídas), os carregamentos aplicados em pontos simétricos devem ser a imagem espelhada (em relação ao plano de simetria) um do outro;
- ii) No caso de binários (concentrados ou distribuídos), devemos lembrar que binários simétricos são representados por vetores antissimétricos e vice-versa. A representação dos binários simétricos por “setas curvas” facilita o entendimento (causa menos confusão);
- iii) As reações vinculares devem ser também simétricas (em relação ao eixo de simetria considerado), mesmo que os vínculos não sejam exatamente idênticos.



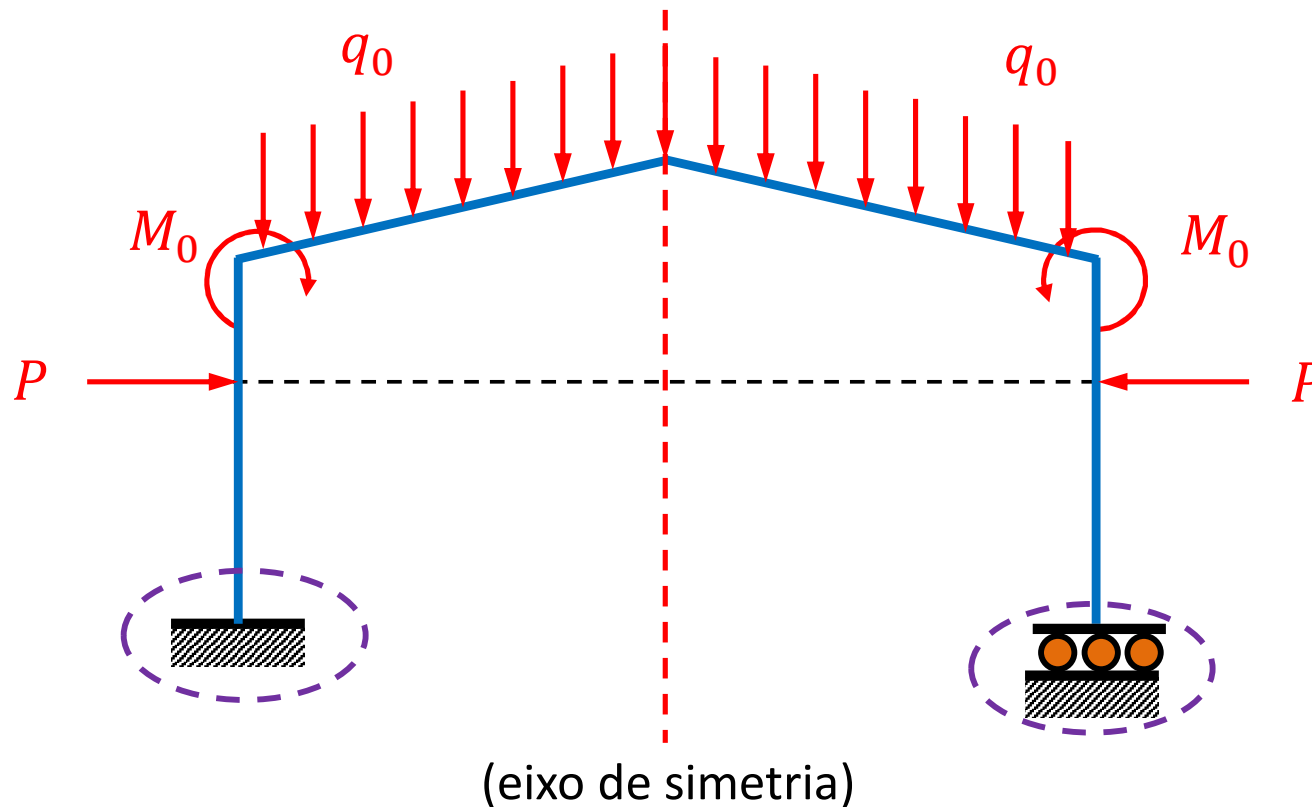
*Exemplos de Estruturas Simétricas
sob Carregamentos Simétricos*





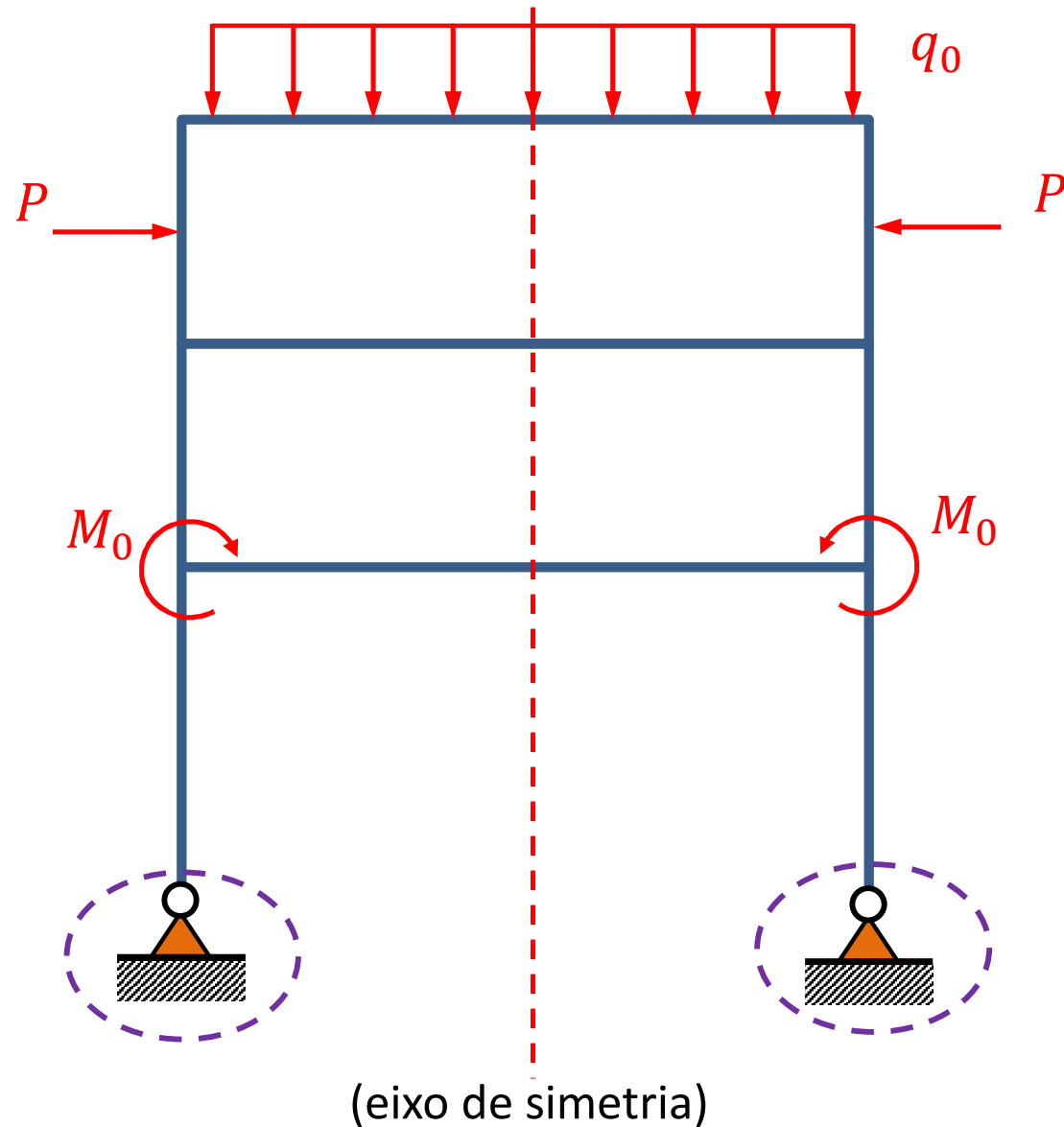
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Note que os apoios à direita e à esquerda não são efetivamente simétricos, mas, como a reação horizontal do apoio à esquerda é nula (pelo fato de o carregamento ser totalmente simétrico), as reações vinculares serão também todas simétricas.



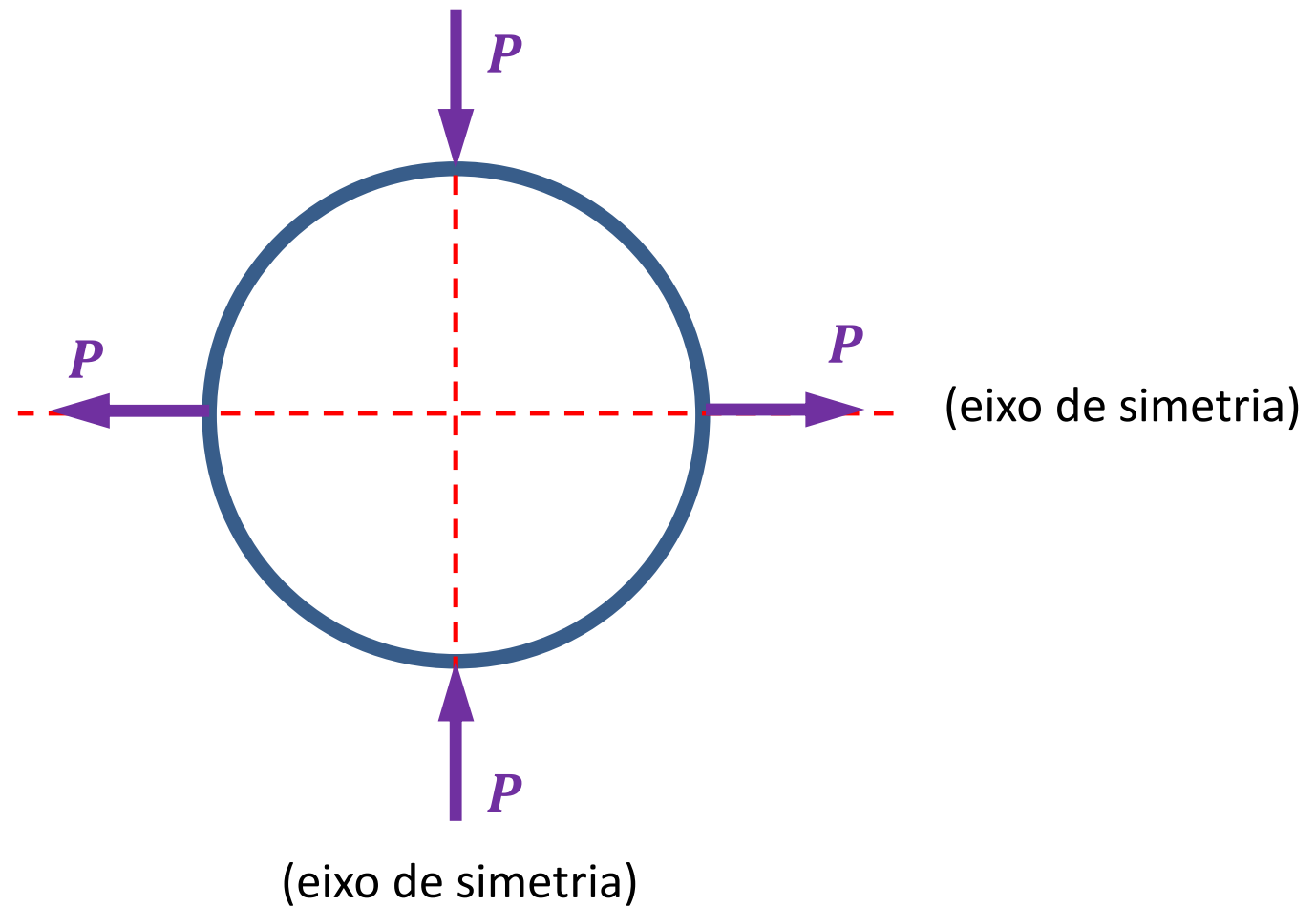


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

**Observações úteis para a análise de estruturas
simétricas sob carregamentos simétricos:**

1. A deformada será sempre simétrica em relação ao(s) plano(s) de simetria considerados (leia-se: plano de simetria da estrutura E do carregamento). Casos em que ocorra instabilidade estrutural fogem ao escopo destas análises (a deformada, nesses casos, não será necessariamente simétrica);
2. As reações de apoio serão igualmente simétricas;
3. As seções transversais que estão sobre o eixo de simetria terão rotações nulas (*salvo se houver alívio de momento ou mola de torção com rigidez finita neste ponto*) e o único deslocamento possível ocorre na direção paralela ao eixo de simetria (ou seja, o deslocamento na direção perpendicular ao eixo de simetria deve ser nulo);
4. Os pontos (dos eixos centrais das barras) que estão fora do eixo de simetria podem sofrer rotações (que serão iguais e em sentidos opostos aos das rotações observadas nos pontos simétricos);



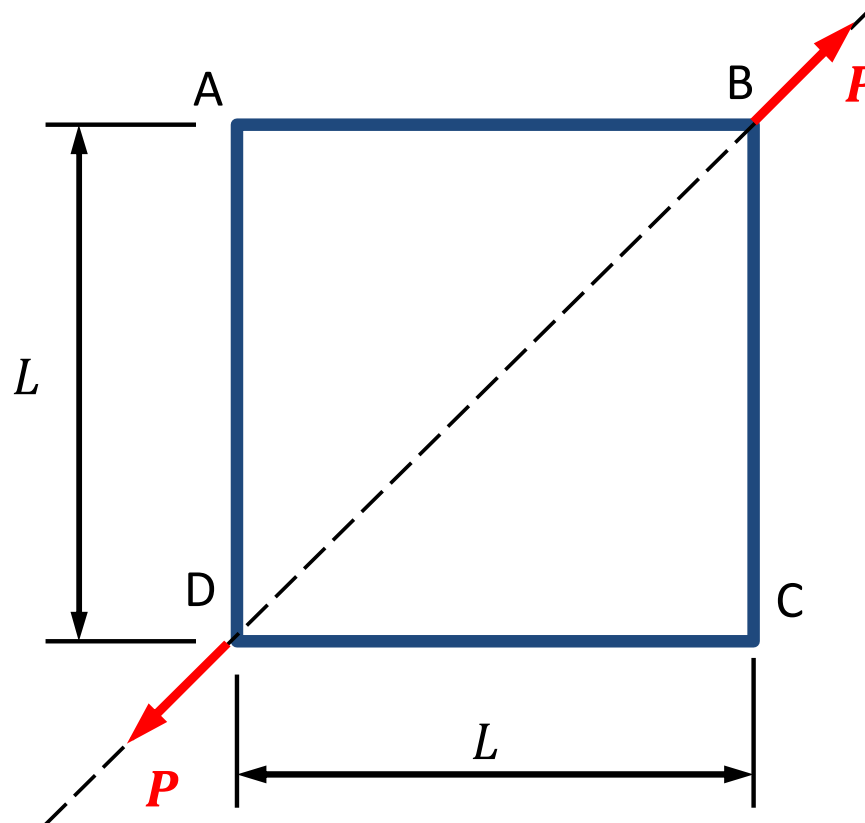
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

5. Os deslocamentos dos pontos (dos eixos centrais das barras) que estão fora do eixo de simetria e que tenham direção perpendicular ao eixo de simetria serão iguais (em magnitude e direção) aos deslocamentos observados nos pontos simétricos, mas com sentidos opostos (ambos se aproximam do eixo de simetria ou se afastam dele);
6. Os deslocamentos dos pontos (dos eixos centrais das barras) que estão fora do eixo de simetria e que tenham direção paralela ao eixo de simetria serão iguais (em magnitude, direção e sentido) aos deslocamentos observados nos pontos simétricos;
7. As tensões normais existentes na seção (transversal ou não transversal) que passa pelo eixo de simetria geram apenas esforços de natureza simétrica (momento fletor e força de direção ortogonal ao plano de simetria);
8. Não existem tensões cisalhantes nas seções que passam pelo plano de simetria (da estrutura E do carregamento).



3. Exemplos de aplicação

Ex.1:



Dados:

P, L, EI

Obter:

D.F.N.;

D.F.C.;

D.M.F.;

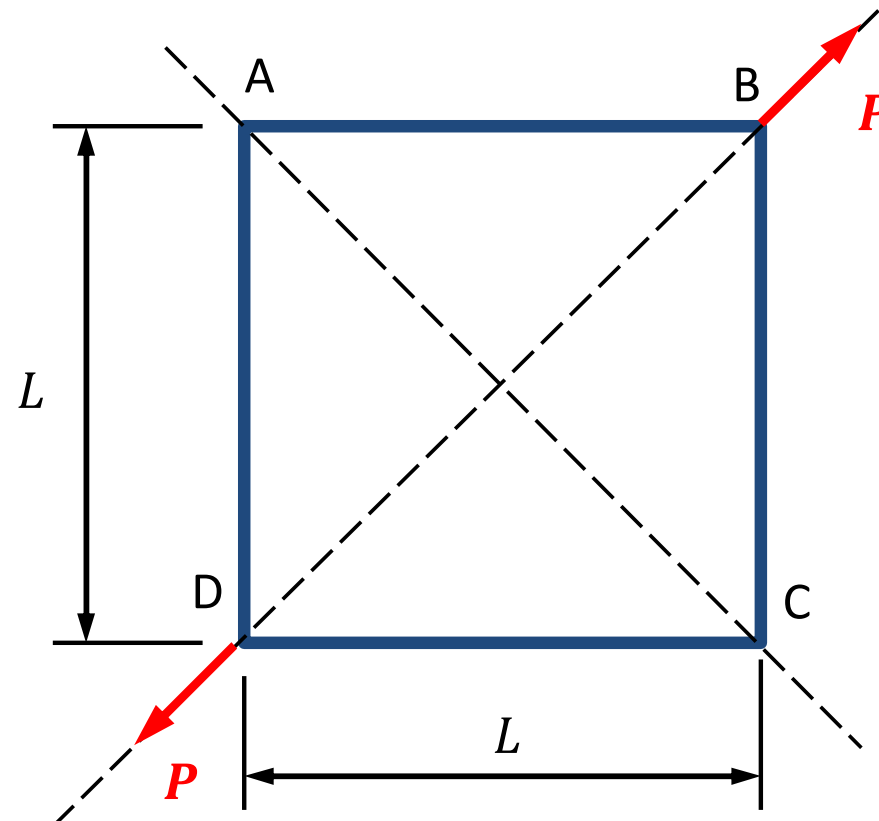
δ_{BD} e δ_{AC} .



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

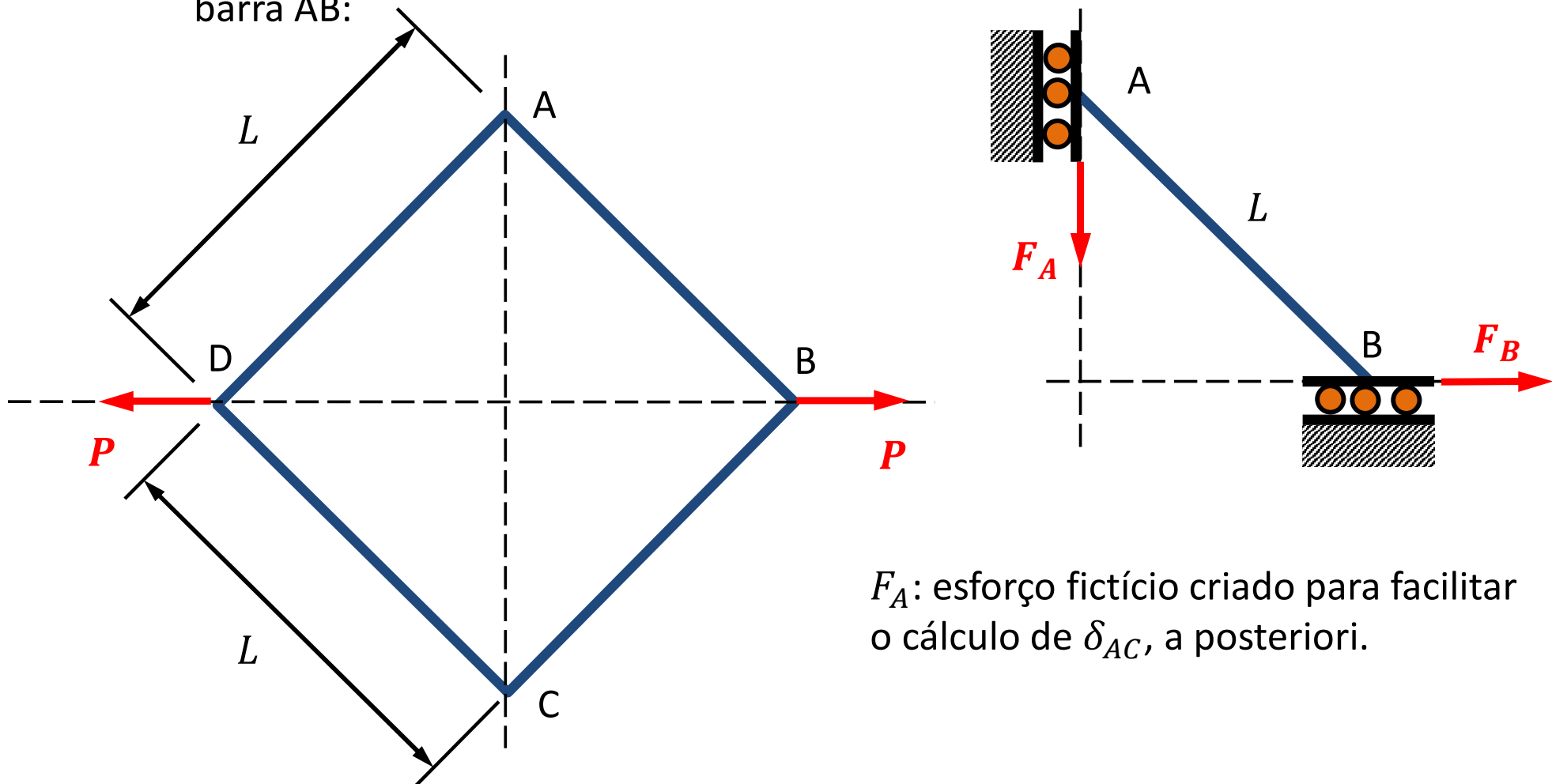
Notamos que a estrutura possui 4 planos de simetria, mas somente dois deles são planos de simetria da estrutura e do carregamento ao mesmo tempo: são os planos que passam por AC e por BD:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Considerando as observações feitas nos slides anteriores, podemos analisar apenas o lado AB, inserindo vínculos apropriados que representam as ações que as demais barras da estrutura irão exercer na barra AB:



F_A : esforço fictício criado para facilitar o cálculo de δ_{AC} , a posteriori.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

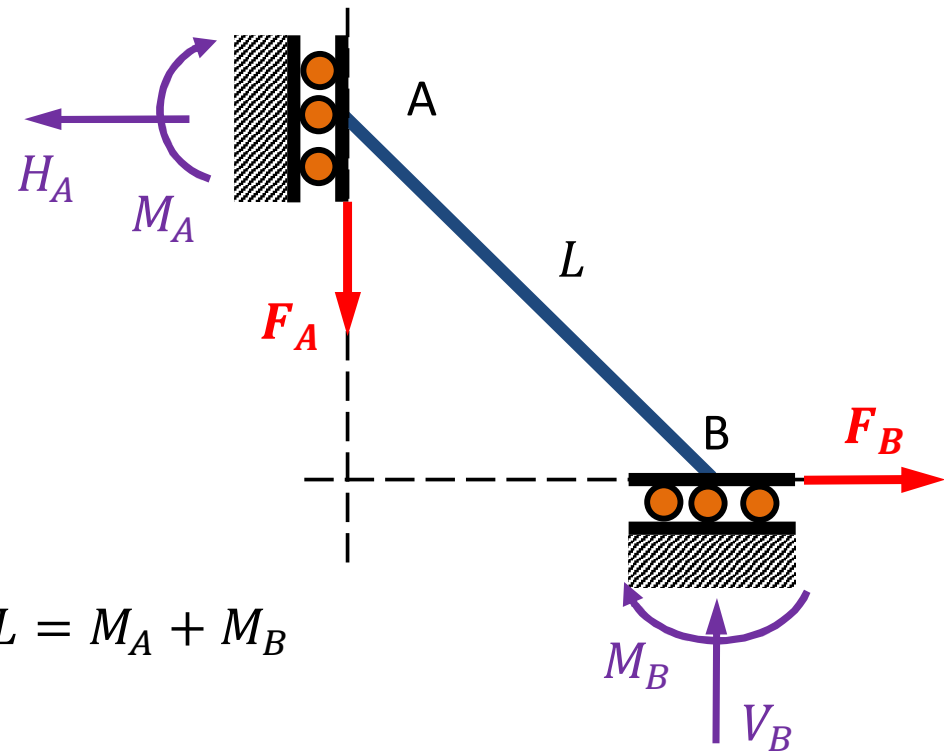
Com base na estrutura simplificada (lançando mão da simetria), o 2º passo é determinar o grau de hiperestaticidade estrutural:

$$g = 4 - 3 = 1$$

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A = F_B$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_B = F_A$$

$$\begin{aligned} \sum M_{\text{pólo } A} = 0 &\Leftrightarrow F_B \frac{\sqrt{2}}{2} L + V_B \frac{\sqrt{2}}{2} L = M_A + M_B \\ &\Leftrightarrow F_B \frac{\sqrt{2}}{2} L + F_A \frac{\sqrt{2}}{2} L = M_A + M_B \end{aligned}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

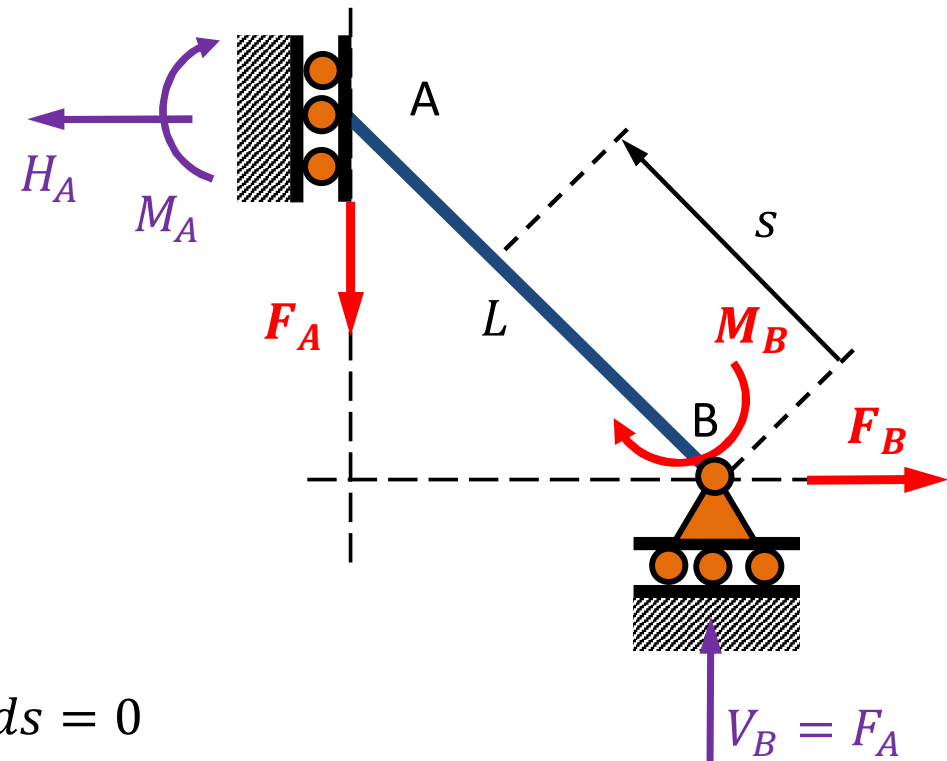
Escolha da E.I.F. $\equiv$ Escolha da incógnita hiperestática:

Escolhendo M_B como incógnita hiperestática do problema:

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_B} = 0 \Leftrightarrow \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_B} ds = 0$$

$$M(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B s + \frac{\sqrt{2}}{2} F_A s - M_B$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_B s + \frac{\sqrt{2}}{2} F_A s - M_B \right) (-1) ds = 0$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

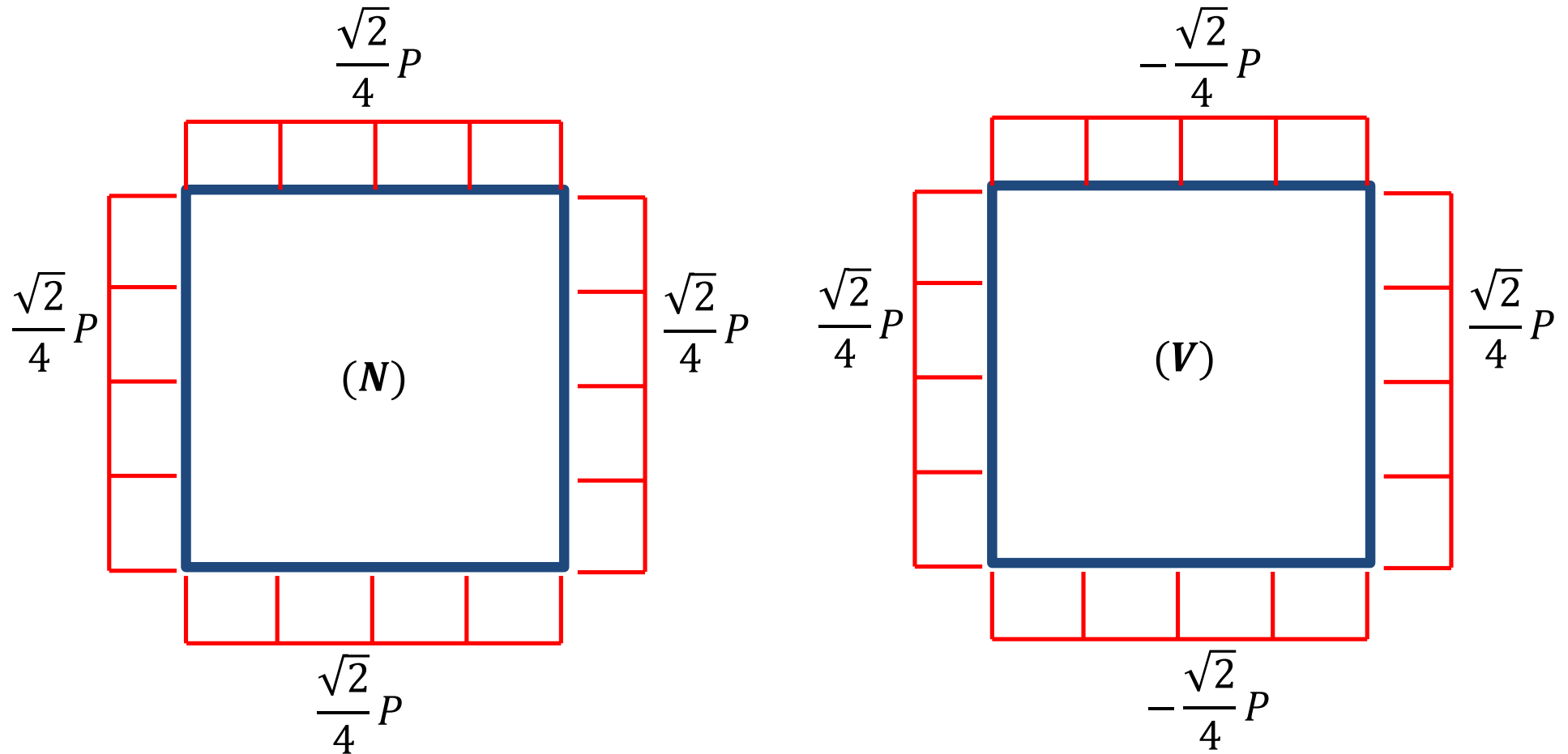
$$\frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} F_B s + M_B \right) ds = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M_B = \frac{\sqrt{2}}{4} F_B L = \frac{\sqrt{2}}{8} PL$$

Como: $F_B \frac{\sqrt{2}}{2} L + F_A \frac{\sqrt{2}}{2} L = M_A + M_B$

virá: $\frac{\sqrt{2}}{4} PL = M_A + \frac{\sqrt{2}}{8} PL \quad \Longleftrightarrow \quad M_A = \frac{\sqrt{2}}{8} PL$

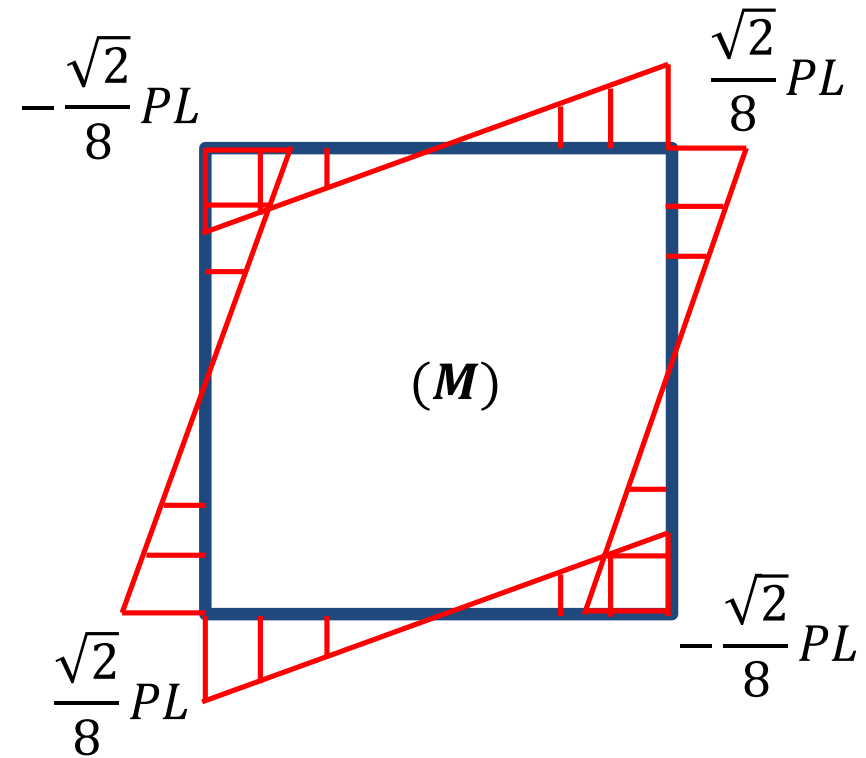


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





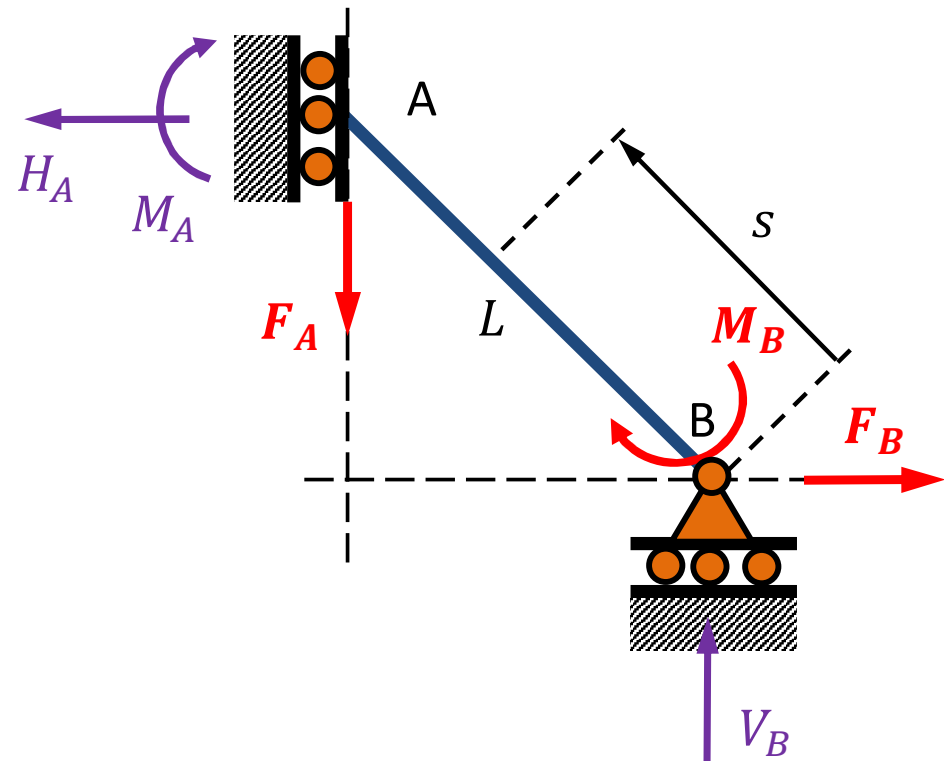
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Deslocamentos: para o cálculo dos deslocamentos basta aplicar o Teorema de Crotti-Engesser utilizando a E.I.F. escolhida (vide slide #27):

$$\delta_{H,B} = \frac{\partial U^*}{\partial F_B} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_B} ds$$

$$M(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B s + \frac{\sqrt{2}}{2} F_A s - M_B$$

$$\delta_{H,B} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_B s - M_B \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} s \right) ds$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\delta_{H,B} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_B s - M_B \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} s \right) ds$$

$$\delta_{H,B} = \frac{F_B L^3}{6EI} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{M_B L^2}{EI}$$

Como:

$$\left[\begin{array}{l} F_B = \frac{P}{2} \\ M_B = \frac{\sqrt{2}}{8} PL \end{array} \right. \Rightarrow \delta_{H,B} = \frac{PL^3}{48EI}$$

Portanto: $\delta_{BD} = \frac{PL^3}{24EI}$



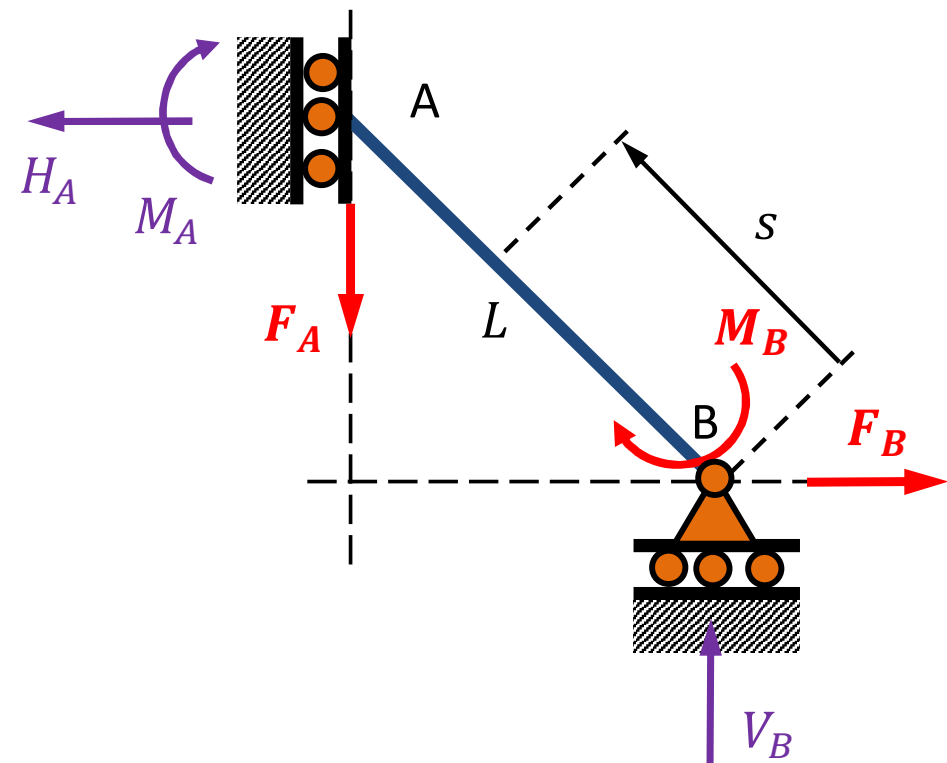
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

De forma análoga, utilizando a força fictícia já criada para esse propósito:

$$\delta_{V,A} = \frac{\partial U^*}{\partial F_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_A} ds$$

$$M(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B s + \frac{\sqrt{2}}{2} F_A s - M_B$$

$$\delta_{V,A} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_B s - M_B \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} s \right) ds$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\delta_{V,A} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_B s - M_B \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} s \right) ds$$

$$\delta_{V,A} = \frac{F_B L^3}{6EI} - \frac{\sqrt{2} M_B L^2}{4 EI}$$

Como:

$$\left[\begin{array}{l} F_B = \frac{P}{2} \\ M_B = \frac{\sqrt{2}}{8} PL \end{array} \right] \Rightarrow \delta_{V,A} = \frac{PL^3}{48EI}$$

Portanto: $\delta_{AC} = \frac{PL^3}{24EI}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.2:

Sem utilizar os conceitos de simetria,
o grau de hiperestaticidade estrutural
é igual a:

$$g = 9 + 4 - 6 = 7$$

Núm. Esf. Solic. internos em cada seção
passando pelo eixo de simetria: 9

Número de reações de apoio: 4

Número de eqs de equilíbrio: 6 ($=3 \times 2$) (três
eqs p/ cada metade da estrutura)

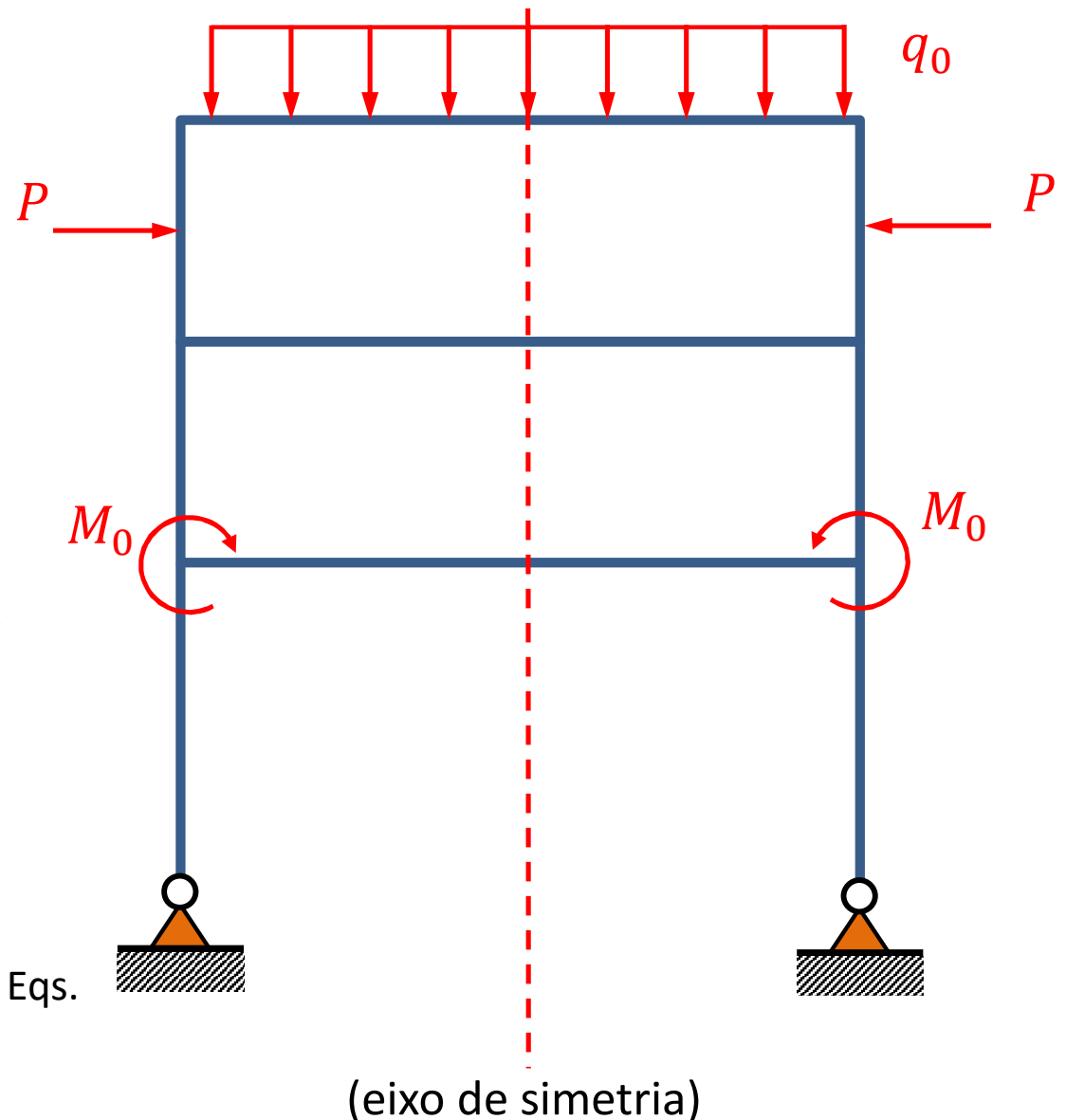
Ou ainda:

$$g = 4 + 6 - 3 = 7$$

Reações de
Apoio

Inc. Hiperest.
Adicionais (dois
quadros fechados)

Número de Eqs.
Equilíbrio



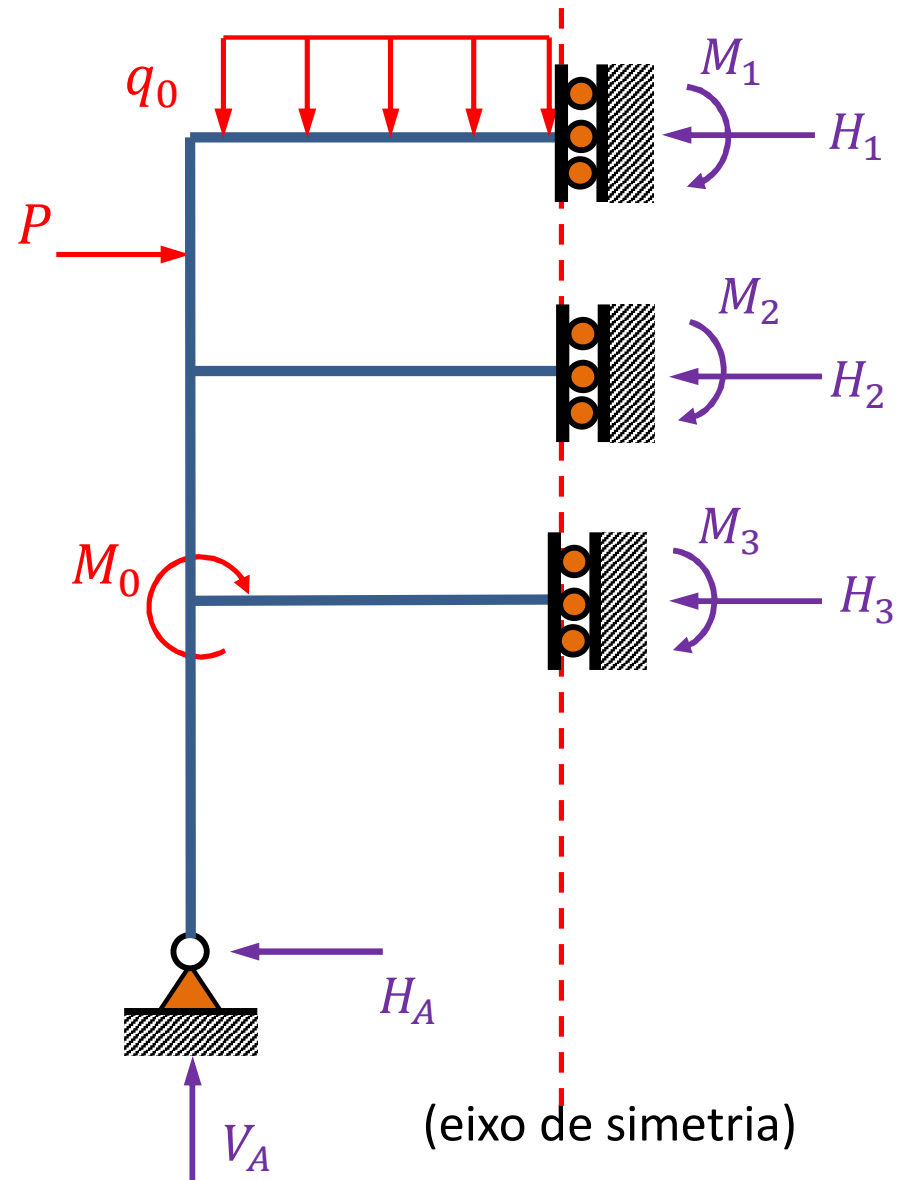


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Utilizando os conceitos de simetria, teremos um grau menor de hiperestaticidade estrutural, dado por:

$$g = 8 - 3 = 5$$

... e um número menor de trechos para analisar!





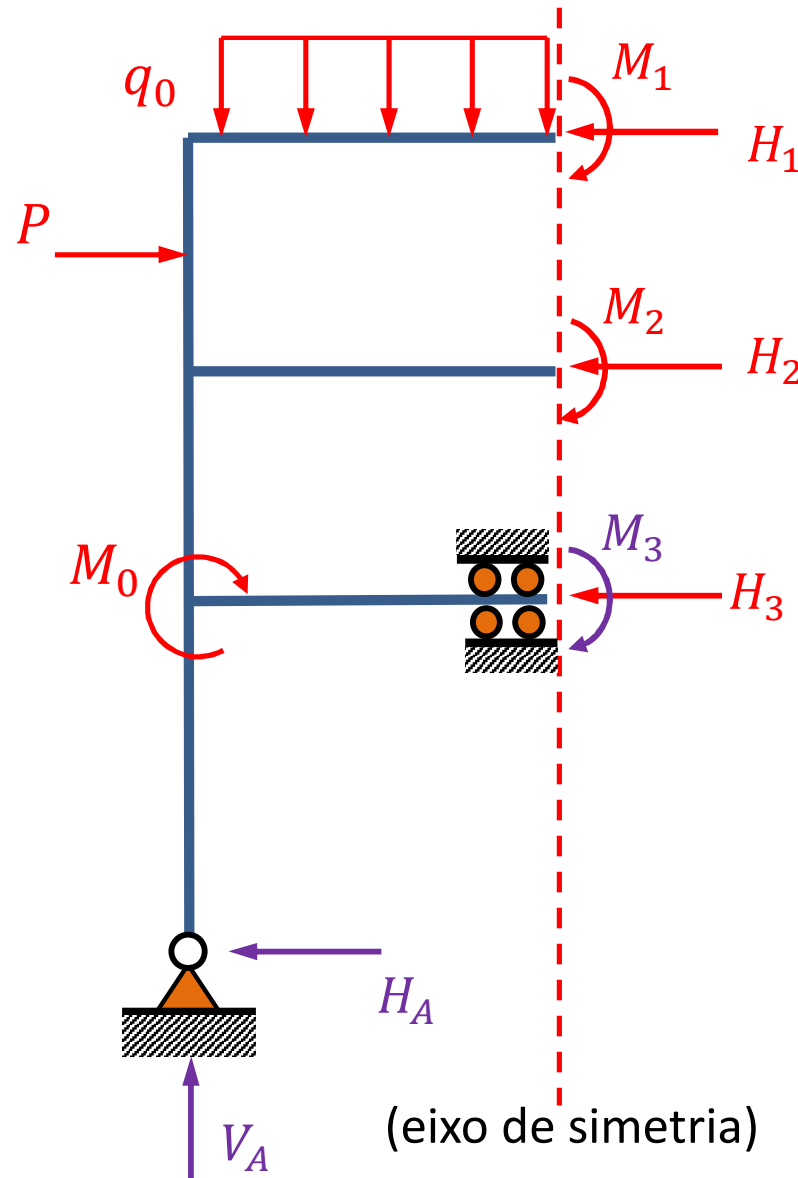
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E.I.F. possível:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_{\text{pólo } A} = 0$$



$$\frac{\partial U^*}{\partial H_1} = 0$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial H_2} = 0$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial H_3} = 0$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_1} = 0$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_2} = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar, (2021), 105p.
- [2] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.10.