



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #20

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

04/11/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

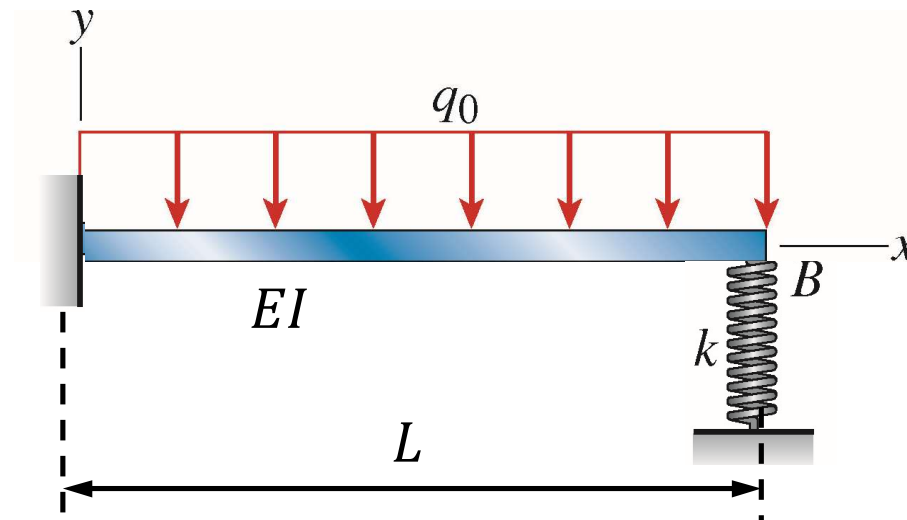
Agenda:

1. Exercício introdutório: análise de uma estrutura hiperestática utilizando o Teorema de Crotti-Engesser;
2. Princípio da Energia Complementar Mínima;
3. Metodologia para análise de estruturas hiperestáticas;
4. Exemplos de Aplicação.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Exercício Introdutório: Análise de uma Estrutura Hiperestática utilizando o Teorema de Crotti-Engesser



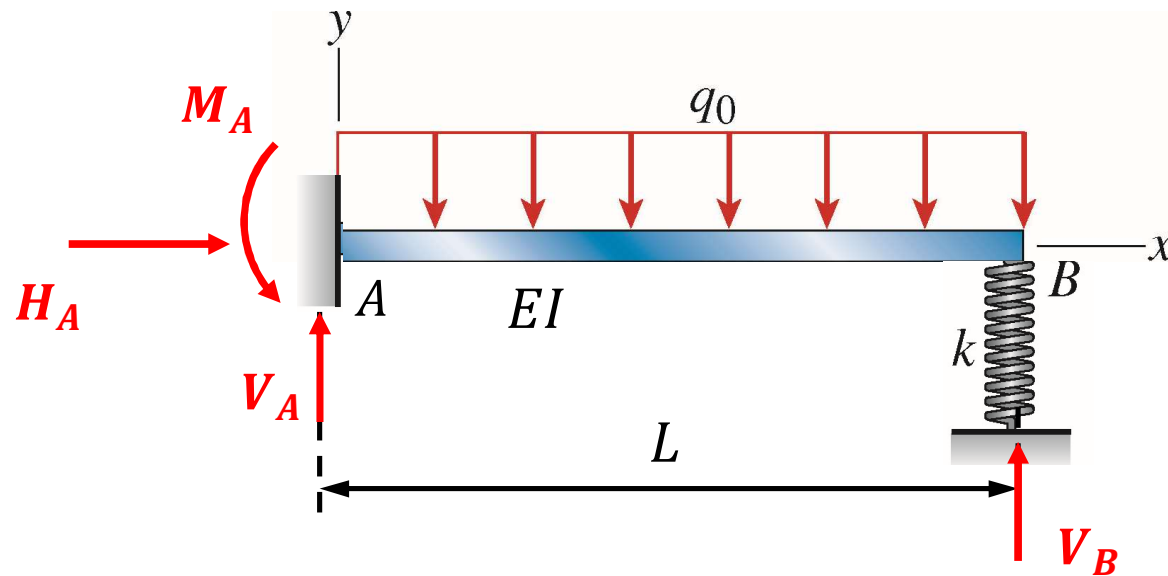
Dados: q_0, EI, L, k

Determinar: a) Reações de apoio, b) rotação na extremidade B (θ_B).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1º Passo: Fazer o D.C.L. e obter o grau de hiperestaticidade estrutural.

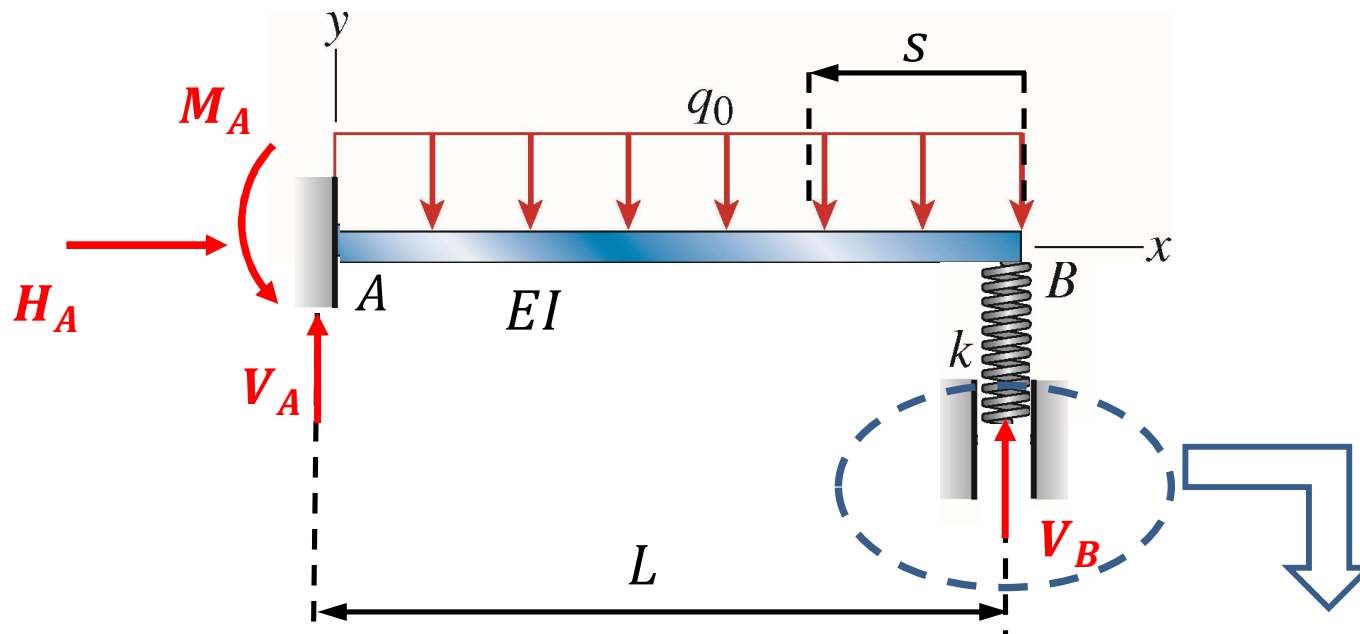


$$g = 4 - 3 = 1$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2º Passo: Modificar a estrutura de modo a obter uma E.I.F. (**estrutura isostática fundamental**) por meio da liberação de $n = g$ incógnitas hiperestáticas.



Imagine, por exemplo, que o deslocamento da base da mola (antes fixa) seja liberado...



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3º Passo: Aplicar o Teorema de Crotti-Engesser **utilizando a E.I.F.** para determinar o deslocamento do grau de liberdade antes impedido (no caso o deslocamento vertical da base da mola).

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = \frac{\partial}{\partial V_B} \left(\int_0^L \frac{M^2}{2EI} ds + U_{mola}^* \right) = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_B} ds + \frac{\partial U_{mola}^*}{\partial V_B}$$

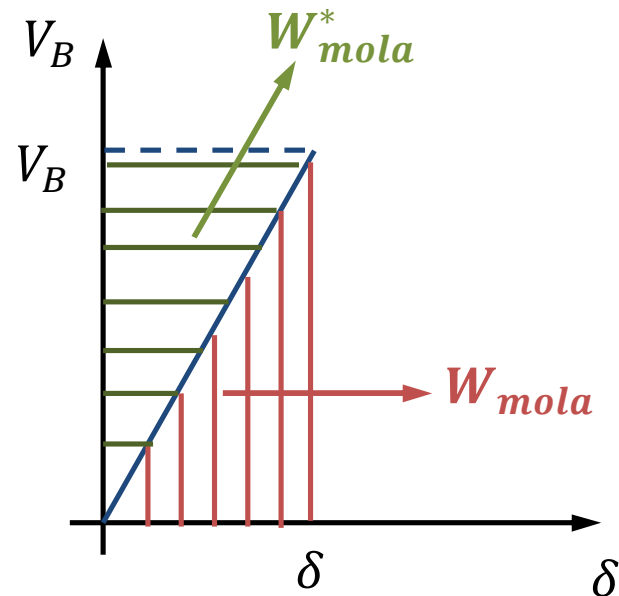
O momento fletor na viga AB deve ficar em função dos carregamentos externos aplicados à E.I.F. (no caso: q_0 e V_B):

$$M(s) = V_B s - \frac{q_0 s^2}{2}, \quad 0 \leq s \leq L$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

...e a energia na mola também deve ser considerada (e também expressa em função dos carregamentos externos aplicados à E.I.F.):



$$U_{mola}^* = W_{mola}^* = \frac{V_B \delta}{2} = \frac{V_B}{2} \frac{V_B}{k} = \frac{V_B^2}{2k}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4º Passo: Resolver a equação para obter a relação adicional (que é, na verdade, uma equação de compatibilidade de deslocamentos):

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_B} ds + \frac{\partial U_{mola}^*}{\partial V_B}$$

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(V_B s - \frac{q_0 s^2}{2} \right) (s) ds + \frac{V_B}{k}$$

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = \frac{V_B L^3}{3EI} + \frac{V_B}{k} - \frac{q_0 L^4}{8EI}$$

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = V_B \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{1}{k} \right) - \frac{q_0 L^4}{8EI} \quad \text{(Este seria o deslocamento vertical da base da mola...)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

5º Passo: Impor que o deslocamento encontrado seja nulo para que o comportamento da E.I.F. seja equivalente ao da estrutura hiperestática original, o que significa: encontrar o valor (bem como o sentido) da incógnita V_B para que o deslocamento correspondente seja nulo.

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = V_B \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{1}{k} \right) - \frac{q_0 L^4}{8EI} = 0$$

$$V_B \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{1}{k} \right) = \frac{q_0 L^4}{8EI}$$

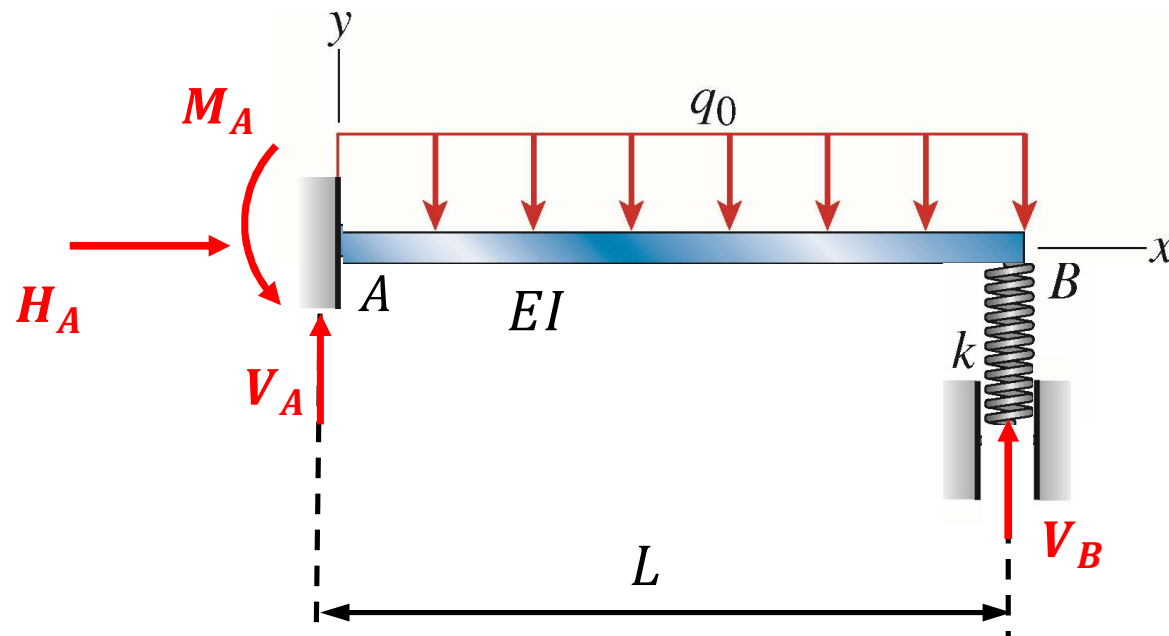
$$V_B = \frac{q_0 L^4}{8} \left(\frac{3k}{kL^3 + 3EI} \right)$$

Quando o sinal resulta positivo, isso significa que o sentido arbitrado (no D.C.L.) para a incógnita hiperestática está correto!



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

6º Passo: com a incógnita hiperestática determinada, podemos determinar as demais reações de apoio utilizando as equações de equilíbrio estático:



$$H_A = 0$$

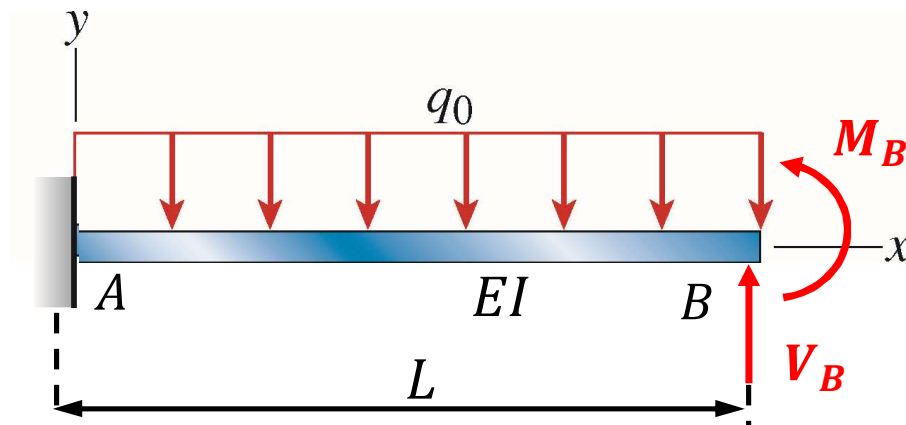
$$V_A + V_B = q_0 L$$

$$M_A + V_B L = \frac{q_0 L^2}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

7º Passo: Para determinarmos qualquer deslocamento que seja de interesse (como a rotação em B), basta analisar parte da estrutura (no caso a viga AB) e aplicar o Teorema de Crotti-Engesser utilizando um esforço fictício, se necessário:



$$\theta_B = \frac{\partial U_{viga}^*}{\partial M_B} = \frac{\partial}{\partial M_B} \left(\int_0^L \frac{M^2}{2EI} ds \right) = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_B} ds$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Considerando o momento fictício M_B , o momento fletor na viga AB fica:

$$M(s) = M_B + V_B s - \frac{q_0 s^2}{2}, \quad 0 \leq s \leq L$$

Logo:

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_B + V_B s - \frac{q_0 s^2}{2} \right) (1) ds$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(V_B s - \frac{q_0 s^2}{2} \right) ds = \frac{V_B L^2}{2EI} - \frac{q_0 L^3}{6EI}$$

Note que o valor acima seria o da rotação em B para valores “quaisquer” (leia-se: dentro da hipótese de L.G.) de V_B e de q_0 ...



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Contudo, como: $V_B = \frac{q_0 L^4}{8} \left(\frac{3k}{kL^3 + 3EI} \right)$

teremos: $\theta_B = \frac{V_B L^2}{2EI} - \frac{q_0 L^3}{6EI} = \frac{q_0 L^3}{48EI} \left(\frac{kL^3 - 24EI}{kL^3 + 3EI} \right)$

Logo:

$kL^3 > 24EI$: $\theta_B > 0$ (rotação ocorre no mesmo sentido do momento fictício M_B : sentido anti-horário).

$kL^3 < 24EI$: $\theta_B < 0$ (rotação ocorre no sentido contrário ao do momento fictício M_B : sentido horário).

$kL^3 = 24EI$: $\theta_B = 0$ (não há rotação em B).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Casos Particulares:

1. Mola com rigidez infinita (apoio simples):

$$\theta_B = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_0 L^3}{48EI} \left(\frac{kL^3 - 24EI}{kL^3 + 3EI} \right) = \frac{q_0 L^3}{48EI} > 0$$

(rotação ocorre no sentido anti-horário, como esperado)

2. Mola com rigidez muito baixa (ou nula):

$$\theta_B = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{q_0 L^3}{48EI} \left(\frac{kL^3 - 24EI}{kL^3 + 3EI} \right) = -8 \frac{q_0 L^3}{48EI} = -\frac{q_0 L^3}{6EI} < 0$$

(rotação ocorre no sentido horário, como esperado)



2. Princípio da Energia Complementar Mínima

Consideremos uma estrutura hiperestática com grau de hiperestaticidade $g = n$ sob a ação de m esforços externos quaisquer. Consideremos também uma estrutura isostática fundamental (EIF) obtida a partir da estrutura hiperestática original após a liberação de n esforços hiperestáticos escolhidos arbitrariamente (mas de modo a garantir sempre o equilíbrio da estrutura sob a ação dos esforços externos originais somados aos n esforços liberados). O Princípio da Energia Complementar Mínima estabelece que os valores assumidos pelas n incógnitas hiperestáticas são tais que tornam mínima a energia complementar total do sistema. Denotando, assim, por P_i ($1 \leq i \leq m$) os esforços externos originalmente aplicados à estrutura hiperestática, e por X_j ($1 \leq j \leq n$) os esforços hiperestáticos escolhidos, temos as seguintes relações adicionais para a determinação de X_j :

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n) \quad U^* = U^*(P_1, \dots, P_i, \dots, P_m, X_1, \dots, X_j, \dots, X_n)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

1. A estrutura pode ter comportamento não linear (o que não impede o uso do Princípio da Energia Complementar Mínima);
2. Nos casos em que a estrutura é simétrica e o carregamento é simétrico (ou antissimétrico) em relação ao plano de simetria da estrutura, tais considerações (de simetria) são úteis para a simplificação do problema pois reduzem o número de incógnitas hiperestáticas.



3. Metodologia para análise de estruturas hiperestáticas

1. Verificar se é possível simplificar a análise, explorando, por exemplo, simetrias da estrutura e do carregamento;
2. Se sim, realizar as simplificações necessárias antes de passar para a etapa seguinte que é:
3. Desenhar o D.C.L. da estrutura (simplificada, se for o caso), e determinar o grau de hiperestaticidade estrutural;
4. Escolher uma E.I.F. (o que significa liberar $n = g$ incógnitas hiperestáticas);
5. Aplicar o Princípio da Energia Complementar Mínima (tantas vezes quanto for necessário), obtendo $n = g$ equações de compatibilidade;
6. Resolver o sistema formado pelas n equações, expressando as incógnitas hiperestáticas em função do carregamento externo (leia-se: carregamento externo aplicado à estrutura hiperestática original).



4. Exemplos de Aplicação

Ex.1:

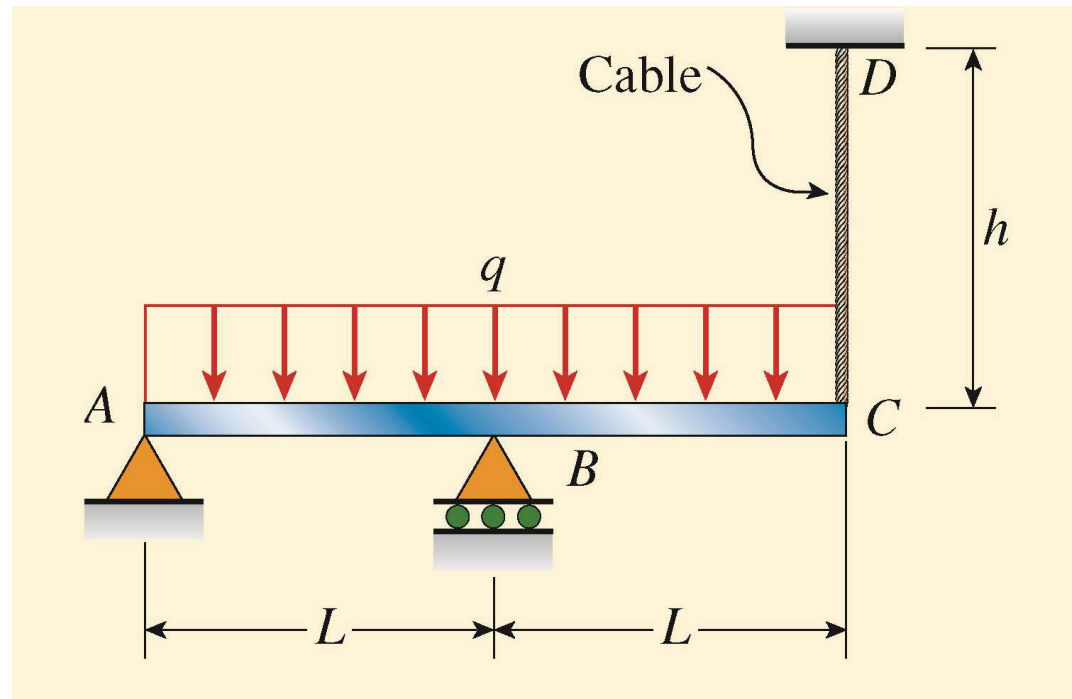
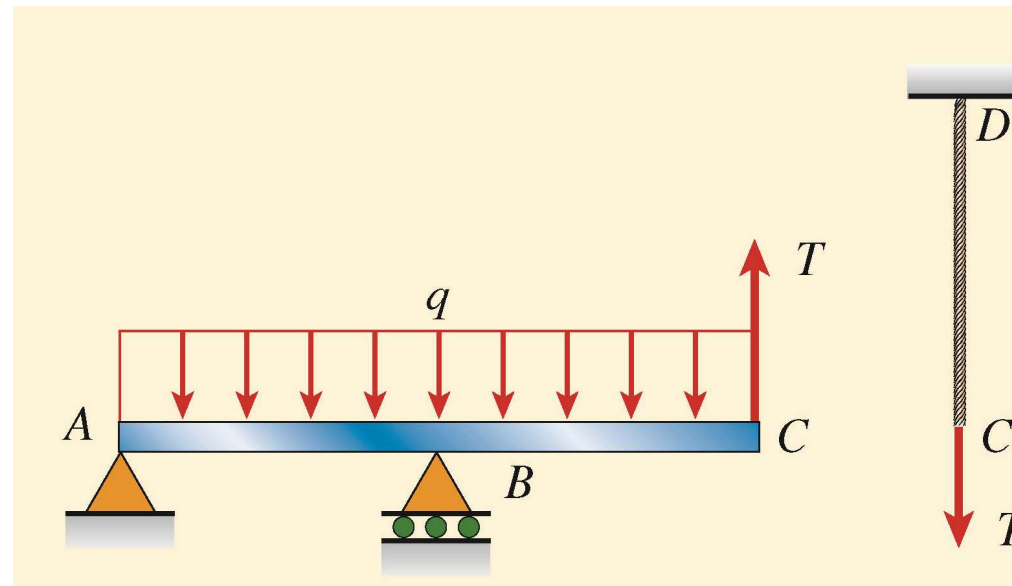


FIG. 10-19 Example 10-6.
Beam ABC with one end
supported by a cable



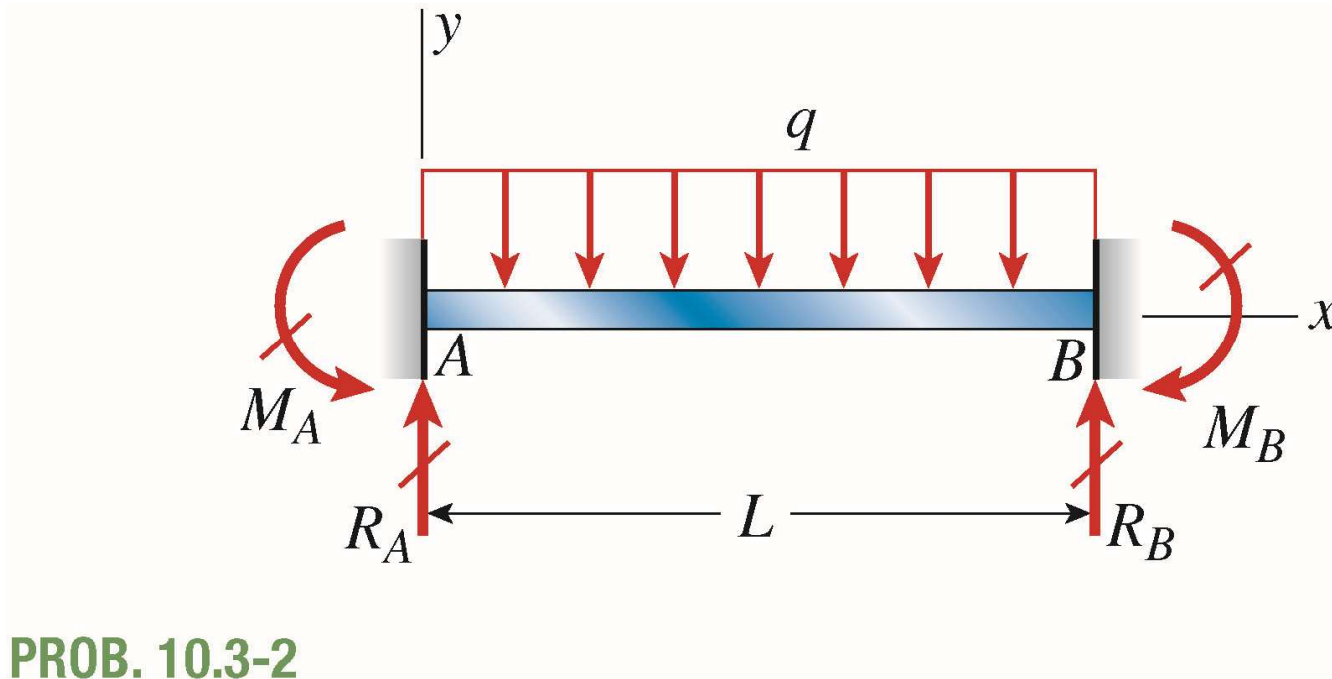
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

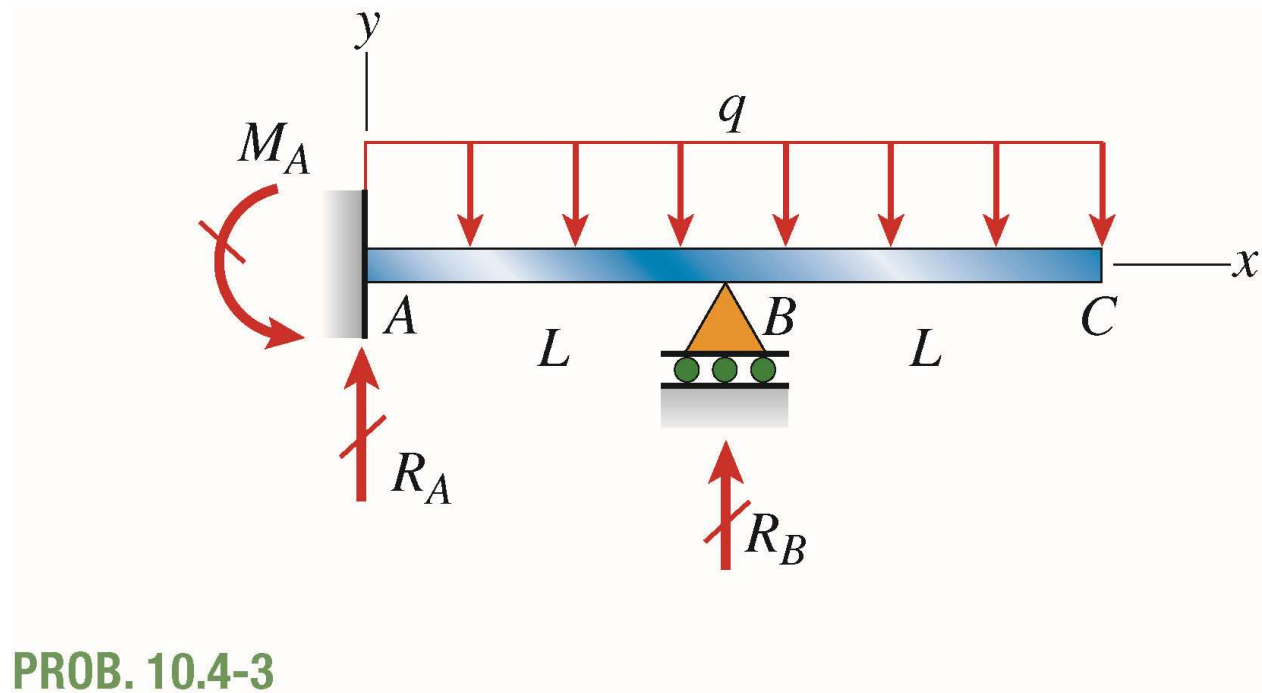
Ex.2:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.3:

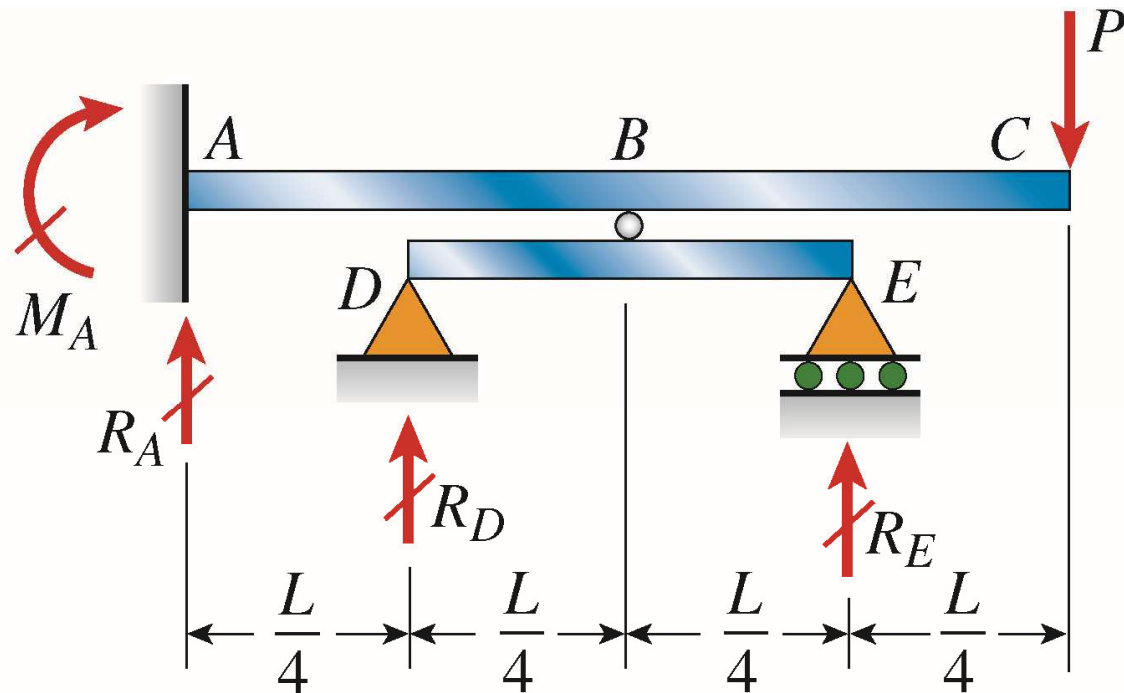


PROB. 10.4-3



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.4:

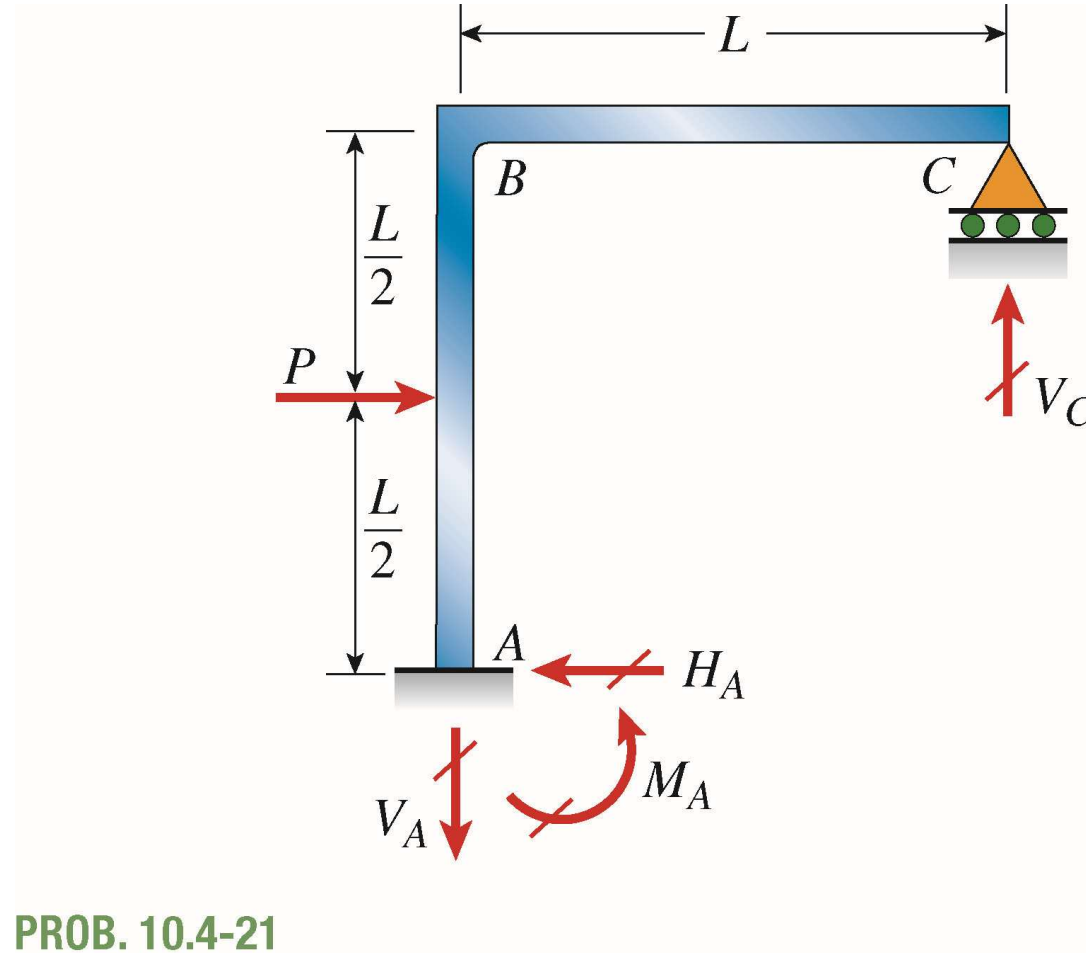


PROB. 10.4-13



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.5:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar, (2021), 105p.
- [2] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.10.