



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #19

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

29/10/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Teorema de Crotti-Engesser;
2. 1º Teorema de Castigliano;
3. 2º Teorema de Castigliano;
4. Exemplos de aplicação.



1. Teorema de Crotti-Engesser

Consideremos um sistema estrutural em equilíbrio sob a ação de n esforços externos (forças ou binários) independentes e designados genericamente por P_i , com $1 \leq i \leq n$. Seja δ_i o deslocamento (linear ou angular) correspondente ao esforço aplicado P_i (ou seja, δ_i é o deslocamento medido no mesmo ponto de aplicação de P_i , e na mesma direção e sentido deste esforço). Pelo Teorema de Crotti-Engesser, o deslocamento δ_i (i fixo) é dado por:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i}$$

...onde U^* corresponde à energia complementar de todo o sistema estrutural (nos casos em que existe simetria, é possível fazer simplificações aproveitando as simetrias da estrutura e do carregamento).

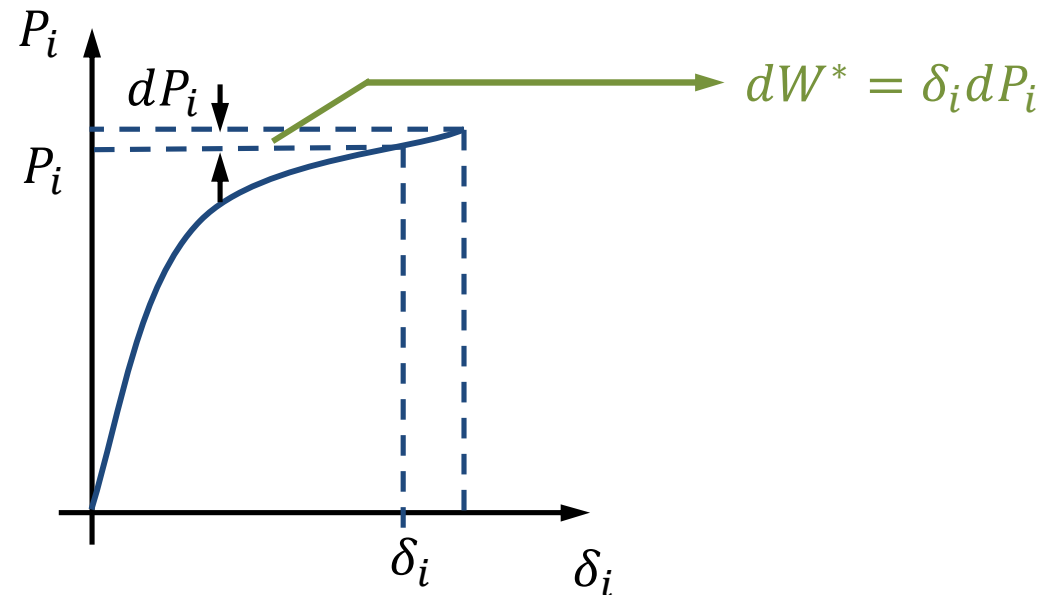


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Demonstração:

Seja o sistema estrutural conforme descrito no enunciado e consideremos que a um (e somente a um) esforço, denominado P_i , seja dada uma variação dP_i , enquanto todos os demais esforços são mantidos fixos (sem qualquer variação).

O acréscimo no trabalho complementar do sistema será devido apenas ao acréscimo dP_i e é dado por:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Por outro lado, sendo a energia complementar uma função de todos os esforços externos aplicados, a variação correspondente desta energia em virtude da variação (única e exclusivamente) dada ao esforço externo P_i será:

$$dU^* = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i} \right) dP_i$$

Considerando que não haja qualquer tipo de dissipação de energia, temos (para qualquer variação dP_i):

$$dW^* = dU^* \quad \longleftrightarrow \quad \delta_i dP_i = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i} \right) dP_i$$

Logo:

$$\delta_i = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i} \right)$$



2. 1º Teorema de Castigliano

Consideremos um sistema estrutural em equilíbrio sob a ação de n esforços externos (forças ou binários) independentes e designados genericamente por P_i , com $1 \leq i \leq n$. Seja δ_i o deslocamento (linear ou angular) correspondente ao esforço aplicado P_i (ou seja, é o deslocamento medido no mesmo ponto de aplicação do esforço, e na mesma direção e sentido do esforço). Pelo 1º Teorema de Castigliano, temos:

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}$$

...onde U corresponde à energia de deformação de todo o sistema estrutural (novamente, nos casos em que existe simetria, é possível fazer simplificações aproveitando as simetrias da estrutura e do carregamento).

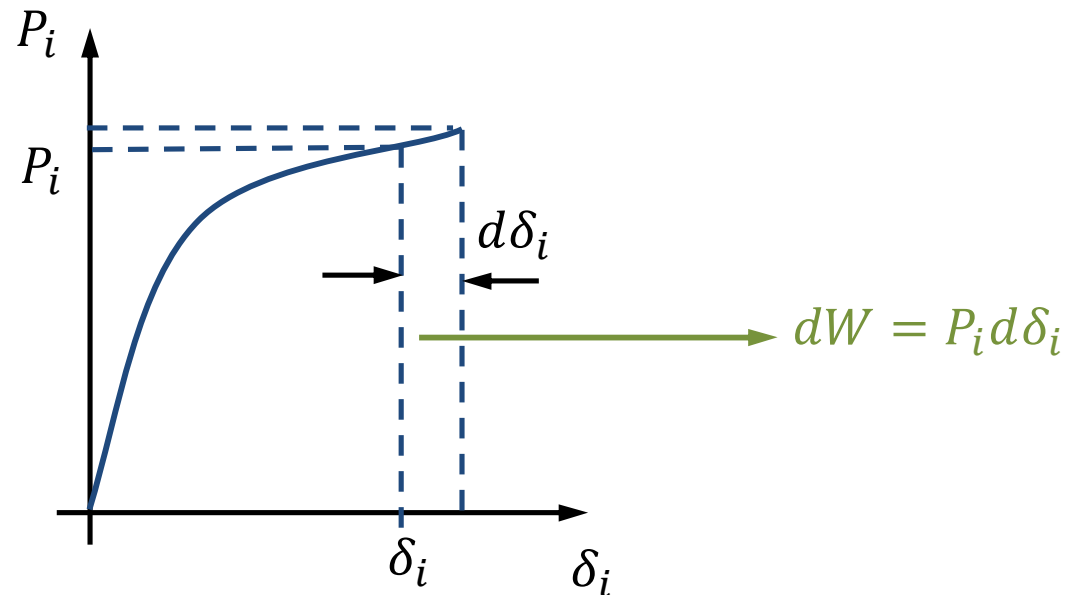


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Demonstração:

Seja o sistema estrutural conforme descrito no enunciado e consideremos que a um (e somente um) deslocamento, denominado δ_i seja dada uma variação $d\delta_i$, enquanto todos os demais deslocamentos são mantidos fixos (sem qualquer variação).

O acréscimo no trabalho de deformação do sistema será devido apenas ao acréscimo $d\delta_i$ e é dado por:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Por outro lado, sendo a energia de deformação uma função de todos os deslocamentos correspondentes aos esforços aplicados, a variação correspondente desta energia em virtude da variação (única e exclusivamente) dada ao deslocamento δ_i será:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial \delta_i} \right) d\delta_i$$

Considerando que não haja qualquer tipo de dissipação de energia, temos (para qualquer variação $d\delta_i$):

$$dW = dU \quad \longleftrightarrow \quad P_i d\delta_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \delta_i} \right) d\delta_i$$

Logo:

$$P_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \delta_i} \right)$$



3. 2º Teorema de Castigliano

O 2º Teorema de Castigliano decorre da aplicação do Teorema de Crotti-Engesser, porém considerando que a estrutura (como um todo) possui comportamento elástico-linear. Nesse caso, sabemos que a energia de deformação e a energia complementar são numericamente iguais. Se expressarmos a energia de deformação em função dos esforços externos (ao invés de expressá-la em função dos deslocamentos correspondentes), teremos:

$$U^* = U$$

Logo: $\delta_i = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i} \right) \Rightarrow \delta_i = \left(\frac{\partial U}{\partial P_i} \right)$

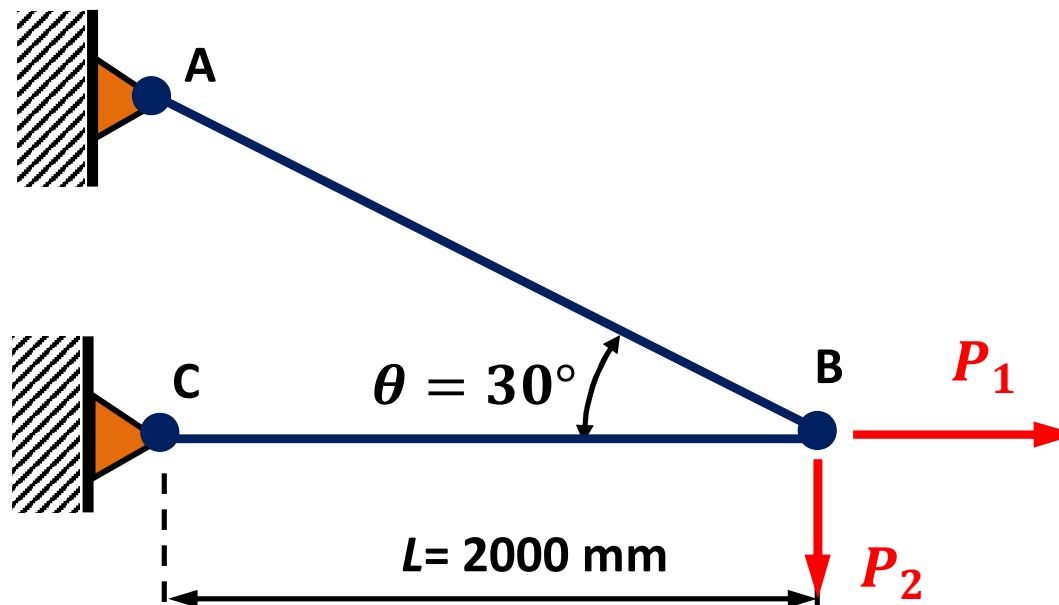
Sendo: $U = U(P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n)$



4. Exemplos de aplicação

Ex.1. O suporte ABC ilustrado na figura sustenta uma carga horizontal $P_1 = 5 \text{ kN}$ e uma carga vertical $P_2 = 20 \text{ kN}$. Ambas têm área de seção transversal $A = 20 \text{ cm}^2$ e são feitas de aço ($E = 200 \text{ GPa}$).

- Determine o deslocamento horizontal e vertical da junta B;
- Verifique que o trabalho complementar é igual à energia complementar.





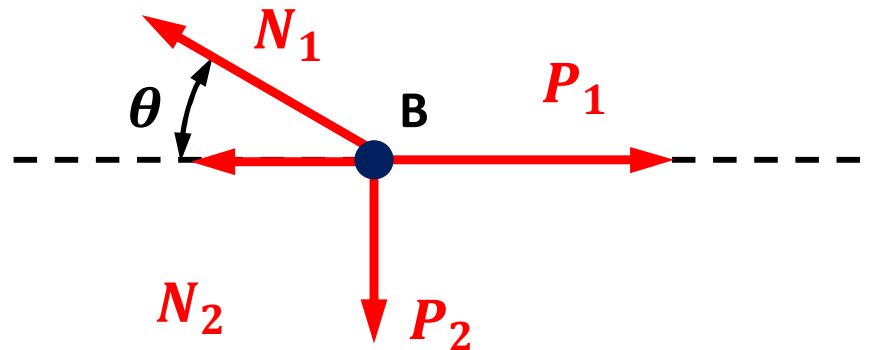
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Como se trata de uma estrutura isostática, o cálculo da energia complementar pode ser feito sem dificuldades, bastando determinar os esforços solicitantes (forças normais) em cada barra. Deve-se ressaltar que, para a aplicação do Teorema de Crotti-Engesser, os esforços externos aplicados devem ser considerados independentes. As forças normais nas barras são dadas por:

$$N_1 = \frac{P_2}{\sin\theta}$$

$$N_2 = P_1 - \frac{P_2}{\tan\theta}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E a energia complementar total do sistema é dada por:

$$U^* = \frac{N_1^2 L_1}{2EA} + \frac{N_2^2 L_2}{2EA}$$

Resultando:
$$U^* = \frac{L}{2EA} \left[\frac{P_2^2}{\sin^2 \theta \cos \theta} + P_1^2 + \frac{P_2^2}{\tan^2 \theta} - \frac{2P_1 P_2}{\tan \theta} \right]$$

Pelo Teorema de Crotti-Engesser:

$$\delta_{H,B} = \delta_1 = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_1} \right) = \frac{P_1 L}{EA} - \frac{P_2 L}{EA} \cot \theta \cong -0,15 \text{ mm}$$

$$\delta_{V,B} = \delta_2 = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_2} \right) = -\frac{P_1 L}{EA} \cot \theta + \frac{P_2 L}{EA} \left(\frac{\cos^3 \theta + 1}{\sin^2 \theta \cos \theta} \right) \cong 0,72 \text{ mm}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

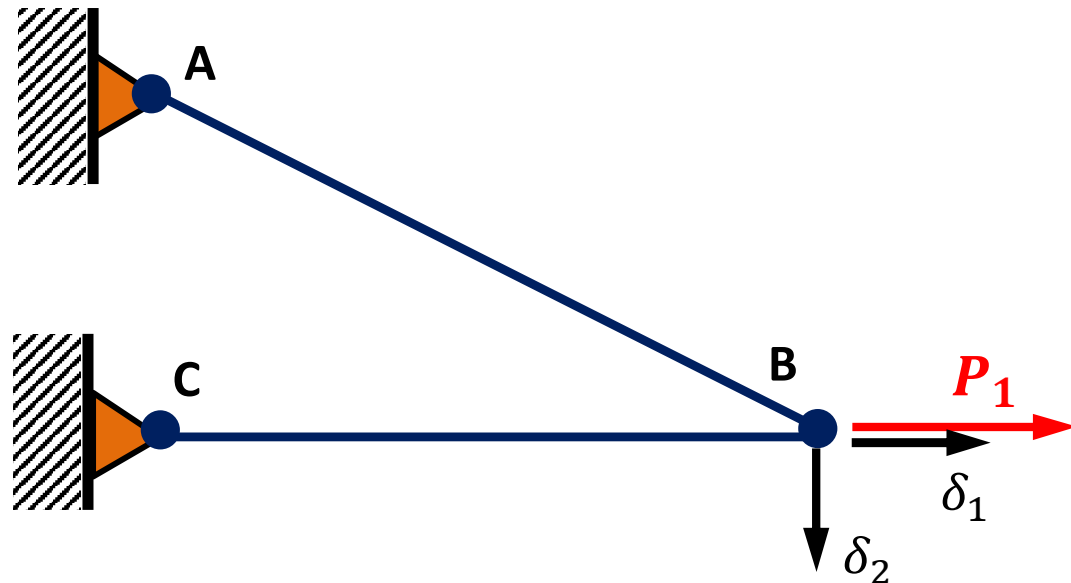
Deve-se observar que:

1. Tendo a estrutura comportamento elástico-linear, as relações entre deslocamentos e esforços são todas lineares;
2. Os sinais diante de cada esforço mostram diretamente seu efeito sobre cada deslocamento. Observe:

Fazendo $P_2 = 0$:

$$\delta_{H,B} = \delta_1 = \frac{P_1 L}{EA}$$

$$\delta_{V,B} = \delta_2 = -\frac{P_1 L}{EA} \cot g \theta$$

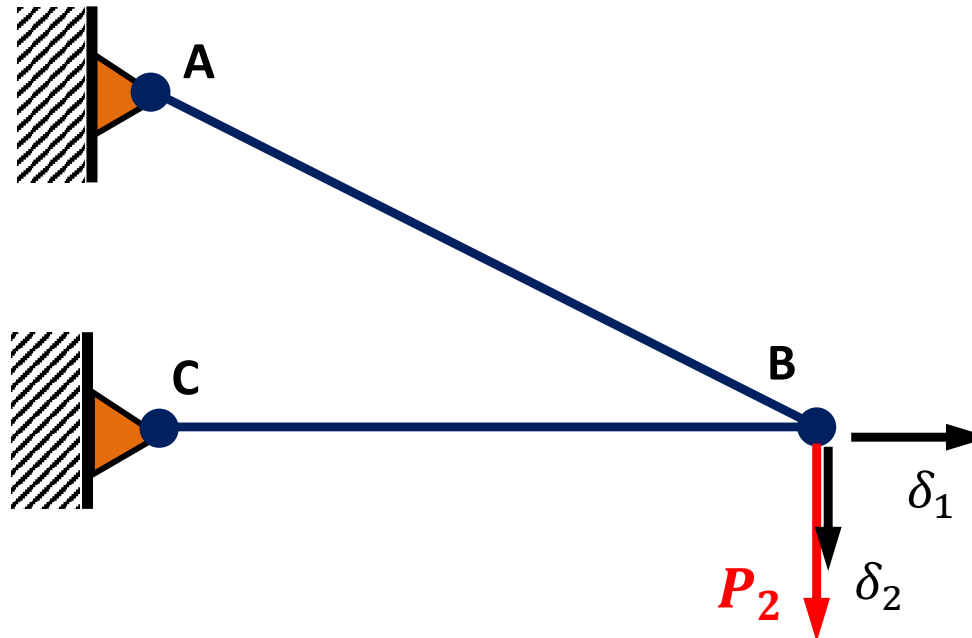




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Fazendo $P_1 = 0$:

$$\delta_{H,B} = \delta_1 = -\frac{P_2 L}{EA} \cot \theta \quad \delta_{V,B} = \delta_2 = +\frac{P_2 L}{EA} \left(\frac{\cos^3 \theta + 1}{\sin^2 \theta \cos \theta} \right)$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Finalmente, determinando o trabalho complementar (que, nesse caso, será igual ao trabalho de deformação):

$$W^* = W = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2}$$

$$W^* = W = \frac{P_1}{2} \left(\frac{P_1 L}{EA} - \frac{P_2 L}{EA} \cot g \theta \right) + \frac{P_2}{2} \left[-\frac{P_1 L}{EA} \cot g \theta + \frac{P_2 L}{EA} \left(\frac{\cos^3 \theta + 1}{\sin^2 \theta \cos \theta} \right) \right]$$

$$W^* = W = \left(\frac{P_1^2 L}{2EA} - \frac{P_1 P_2 L}{2EA} \cot g \theta \right) + \left[-\frac{P_1 P_2 L}{2EA} \cot g \theta + \frac{P_2^2 L}{2EA} \left(\frac{\cos^3 \theta + 1}{\sin^2 \theta \cos \theta} \right) \right]$$

O que mostra que: $W^* = U^* = \frac{L}{2EA} \left[P_1^2 + \frac{P_2^2 (\cos^3 \theta + 1)}{\sin^2 \theta \cos \theta} - \frac{2P_1 P_2}{\tan \theta} \right]$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Na forma matricial as relações entre as forças e os deslocamentos nodais ficam escritas como:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$$

Onde os elementos k_{ij} , que fornecem a matriz de rigidez do sistema são, nesse caso, dados por:

$$k_{11} = \frac{EA}{L} (1 + \cos^3 \theta)$$

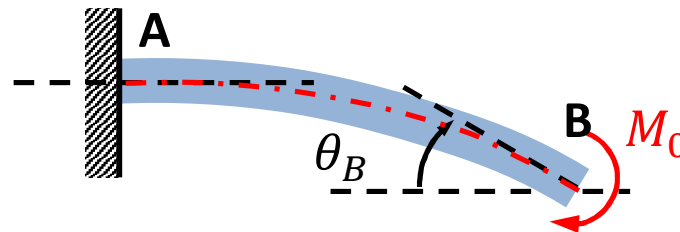
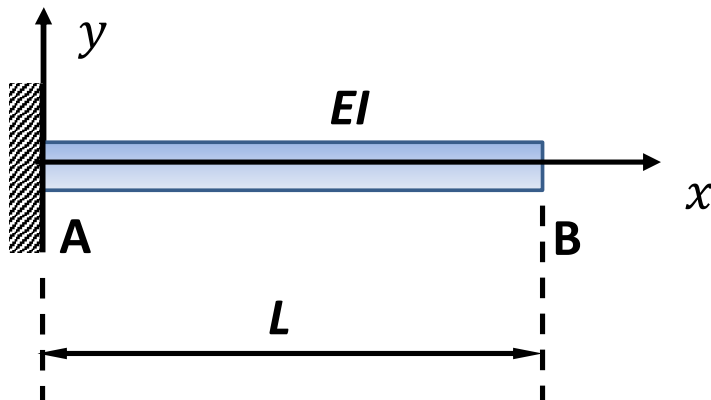
$$k_{12} = k_{21} = \frac{EA}{L} (\sin \theta \cos^2 \theta)$$

$$k_{22} = \frac{EA}{L} (\sin^2 \theta \cos \theta)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.2. A barra AB, engastada em A e livre em B, está submetida a um momento fletor M_0 na extremidade B. Determine o ângulo de rotação θ_B pelo Teorema de Crotti-Engesser.



Dados: M_0, L, EI .



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

É imediato verificar que a barra está submetida à flexão uniforme>
Logo:

$$M(x) = -M_0, \quad 0 \leq x \leq L$$

A energia complementar será:

$$U^* = \int_0^L \frac{M_z^2(x)}{2EI_z(x)} dx = \int_0^L \frac{M_0^2}{2EI} dx = \frac{M_0^2 L}{2EI}$$

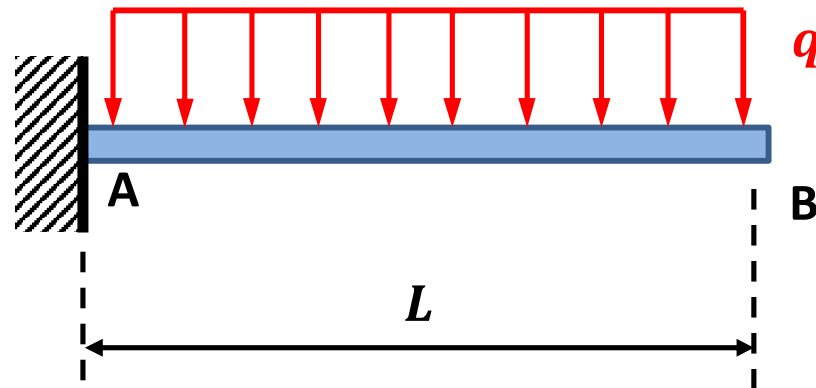
Pelo Teorema de Crotti-Engesser: $\theta_B = \frac{\partial U^*}{\partial M_0} = \frac{M_0 L}{EI}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.3. Determine o deslocamento vertical e a rotação da seção B da viga engastada-livre AB indicada na figura. Despreze a parcela da energia complementar devida às forças cortantes no cálculo.

São dados: q, L, EI .





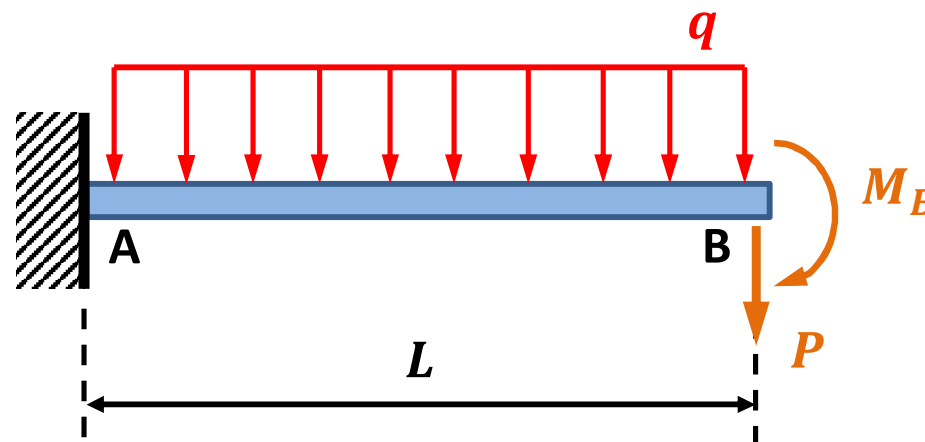
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Para a aplicação do Teorema de Crotti-Engesser é necessário termos esforços correspondentes aos deslocamentos que desejamos calcular. No caso em tela, queremos determinar:

- o deslocamento vertical da seção B (o que exige a presença de uma força vertical aplicada em B) e
- a rotação da seção B (o que exige a presença de um momento fletor aplicado em B).

Como estes esforços não fazem parte do carregamento (original) aplicado na estrutura, é necessário criá-los:

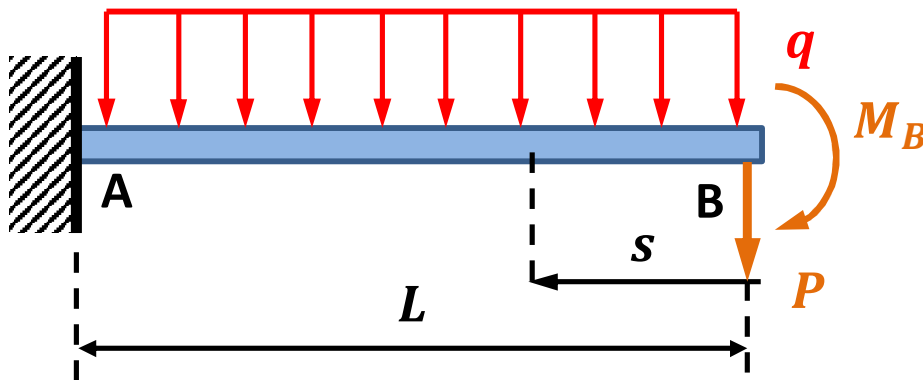




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A energia complementar (devida apenas à flexão) é dada por:

$$U^* = \int_0^L \frac{M_z^2(s)}{2EI} ds$$



$$M_z(s) = -\frac{qs^2}{2} - Ps - M_B$$
$$(0 \leq s \leq L)$$

Pelo Teorema de Crotti-Engesser:

$$\delta_{V,B} = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P} \right) \qquad \theta_B = \left(\frac{\partial U^*}{\partial M_B} \right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultam:

$$\delta_{V,B} = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P} \right) = \frac{\partial}{\partial P} \left(\int_0^L \frac{M_z^2}{2EI} ds \right) = \int_0^L \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{M_z^2}{2EI} \right) ds$$

Como:
$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{M_z^2}{2EI} \right) = \frac{\partial}{\partial M_z} \left(\frac{M_z^2}{2EI} \right) \frac{\partial M_z}{\partial P} = \frac{M_z}{EI} \frac{\partial M_z}{\partial P}$$

Teremos:

$$\delta_{V,B} = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P} \right) = \int_0^L \frac{M_z}{EI} \frac{\partial M_z}{\partial P} ds$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E, analogamente:

$$\theta_B = \left(\frac{\partial U^*}{\partial M_B} \right) = \int_0^L \frac{M_z}{EI} \frac{\partial M_z}{\partial M_B} ds$$

Resultam:

$$\delta_{V,B} = \int_0^L \frac{M_z}{EI} \frac{\partial M_z}{\partial P} ds = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{qs^2}{2} - Ps - M_B \right) (-s) ds$$

$$\delta_{V,B} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{qs^3}{2} + Ps^2 + M_B s \right) ds = \frac{1}{EI} \left(\frac{qL^4}{8} + \frac{PL^3}{3} + \frac{M_B L^2}{2} \right)$$

Como temos: $P = 0$, $M_B = 0$:

$$\delta_{V,B} = \frac{qL^4}{8EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\theta_B = \int_0^L \frac{M_z}{EI} \frac{\partial M_z}{\partial M_B} ds = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{qs^2}{2} - Ps - M_B \right) (-1) ds$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{qs^2}{2} + Ps + M_B \right) ds = \frac{1}{EI} \left(\frac{qL^3}{6} + \frac{PL^2}{2} + M_B L \right)$$

Como temos: $P = 0$, $M_B = 0$: $\theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$

Obs: Os sinais positivos encontrados para o deslocamento vertical e para a rotação indicam que os sentidos destes deslocamentos correspondem aos mesmos sentidos arbitrados para os esforços correspondentes.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar, (2021), 105p.
- [2] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.9 (item 9.8).