



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #18

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

15/10/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Expressão geral da energia complementar para sistemas formados por barras;
2. Limitações do uso do Princípio do Trabalho e da Energia no cálculo de deslocamentos e rotações;
3. Exemplos (Aplicações do Princípio do Trabalho e da Energia).



1. Expressão geral da energia complementar para sistemas formados por barras (com comportamento elástico-linear)

Como vimos na última aula, a expressão geral da energia complementar para sistemas estruturais formados por m barras (todas com comportamento elástico-linear), em condições de L.G., é dada por:

$$U^* = \sum_{i=1}^m \left(\int_0^L \frac{N^2(s)}{2EA(s)} ds + \int_0^L \frac{f_y V_y^2(s)}{2GA(s)} ds + \int_0^L \frac{f_z V_z^2(s)}{2GA(s)} ds \right) + \\ + \sum_{i=1}^m \left(\int_0^L \frac{M_y^2(s)}{2EI_y(s)} ds + \int_0^L \frac{M_z^2(s)}{2EI_z(s)} ds + \int_0^L \frac{T^2(s)}{2GI_t(s)} ds \right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Quando em uma determinada barra atuam, simultaneamente, diversos esforços solicitantes (forças normais, forças cortantes, momentos fletores e momentos torçores), as parcelas mais significativas são, em geral, aquelas relacionadas aos momentos fletores e momentos torçores e, neste caso, as parcelas associadas às forças normais e forças cortantes podem ser desprezadas (nesta barra).

Contudo, se, em um dado elemento estrutural (barra, cabo, fio ou mola), tivermos um único esforço solicitante atuando, deve-se, naturalmente, considerar este único esforço para o cálculo da energia complementar do elemento; caso contrário, a solução encontrada partirá do pressuposto de que a rigidez associada a este elemento estrutural (e que corresponde ao esforço aplicado a ele) é infinitamente grande (vide exemplo #1 - slide #9).



2. Limitações do uso do Princípio do Trabalho e da Energia no cálculo de deslocamentos e rotações

Nas aulas anteriores foram apresentados os conceitos de trabalho (W e W^*) e energia (U e U^*) bem como algumas aplicações simples visando ao cálculo de deslocamentos e rotações utilizando o Princípio do Trabalho e da Energia.

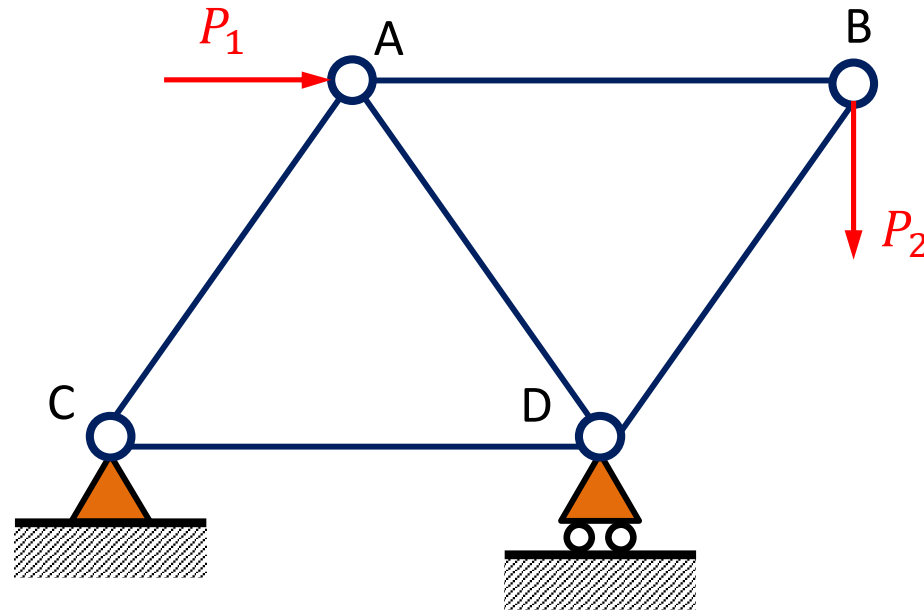
As principais limitações deste método são:

- Só pode ser empregado se um único esforço concentrado (força ou binário) for aplicado sobre a estrutura;
- Só pode ser empregado se o deslocamento a ser calculado for correspondente ao esforço aplicado (leia-se: deslocamento no mesmo ponto de aplicação do esforço, e medido na mesma direção e sentido do esforço aplicado).
- Salvo raras exceções, não pode ser empregado quando há esforços distribuídos aplicados sobre a estrutura.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplos:



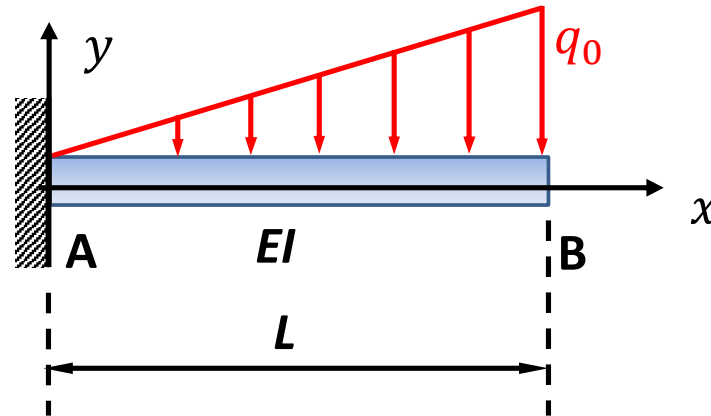
Dada a geometria da estrutura (no caso, isostática), as propriedades dos materiais, as propriedades seccionais das barras, e os valores das forças externas, é perfeitamente possível determinar a energia complementar (U^*) do sistema, mas:

$$W = W^* = \frac{P_1 \delta_{H,A}}{2} + \frac{P_2 \delta_{V,B}}{2}$$

Assim, pelo Princípio do Trabalho e da Energia, ficaremos com uma única equação e com duas incógnitas ($\delta_{H,A}$ e $\delta_{V,B}$)!



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

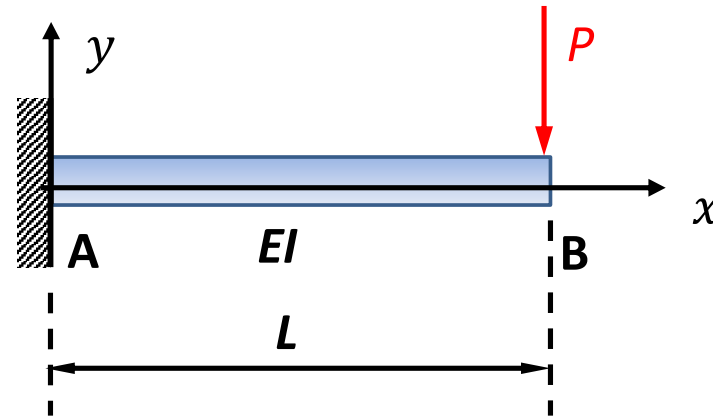


Novamente temos uma estrutura isostática e é simples determinar a energia complementar (U^*) do sistema, mas...

$$W = W^* = -\frac{1}{2} \int_0^L q(x) v(x) dx = ?$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Nesse caso, só é possível aplicar o Princípio do Trabalho e da Energia se quisermos determinar o deslocamento vertical do ponto B. Qualquer outro deslocamento ou rotação não pode ser obtido desta forma, pois:

$$W = W^* = \frac{P\delta_{V,B}}{2}$$



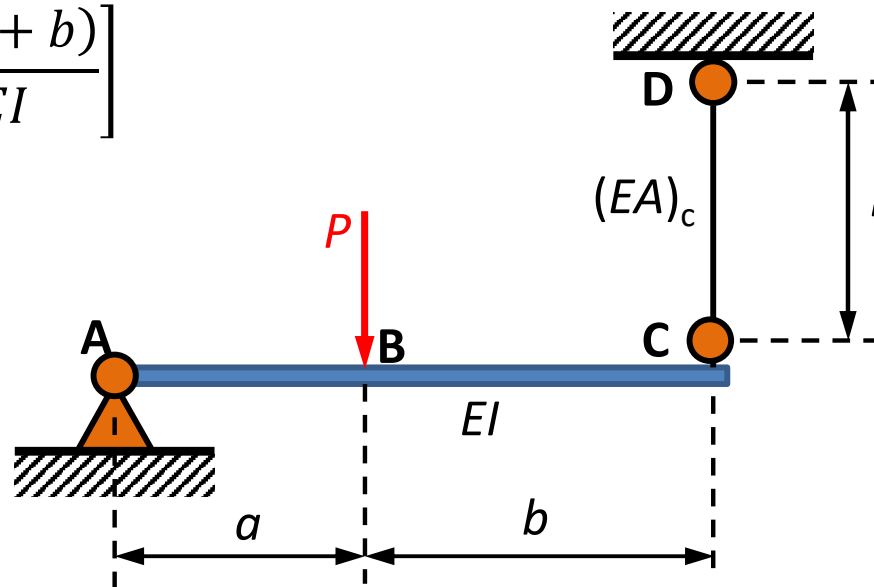
3. Exemplos (Aplicações do P.T.E.)

1) A viga ABC possui rigidez flexional EI e está simplesmente apoiada em A e presa a um cabo de rigidez axial $(EA)_c$ e comprimento L em C. A viga está submetida a uma força concentrada de magnitude P aplicada em B. Determine o deslocamento vertical dos pontos B e C em função dos parâmetros fornecidos.

Resp.:

$$\delta_{v,B} = \frac{Pa^2}{(a+b)^2} \left[\frac{L}{(EA)_c} + \frac{b^2(a+b)}{3EI} \right]$$

$$\delta_{v,C} = \frac{PaL}{(EA)_c(a+b)}$$

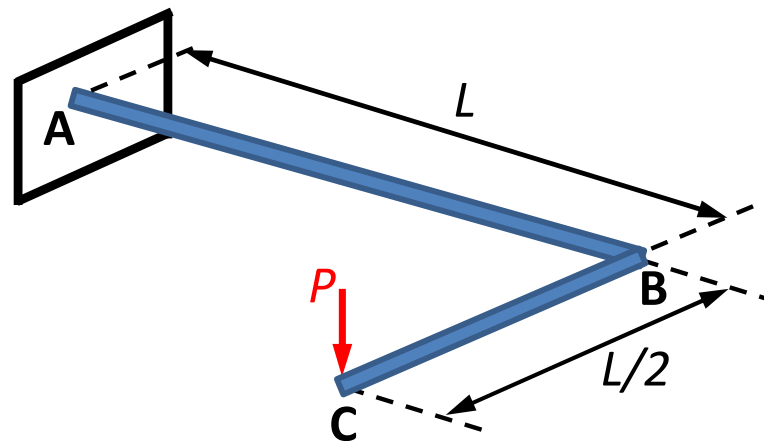




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2) A estrutura ABC é formada pelas barras AB e BC, de seção transversal circular cheia e diâmetro d . O material das barras é elástico-linear, com módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν dados. Considerando que a seção A esteja engastada e que uma força concentrada de magnitude P seja aplicada em C, determine o deslocamento vertical em C pelo Princípio do Trabalho e da Energia.

$$\text{Resp.: } \delta_{v,C} = \frac{3PL^3}{8EI} + \frac{PL^3}{4GI_p} + \frac{3f_c PL}{2GA} = \frac{PL^3}{EI} \left[\frac{3}{8} + \frac{(1+\nu)}{4} + \frac{5(1+\nu)}{24} \left(\frac{d}{L} \right)^2 \right]$$

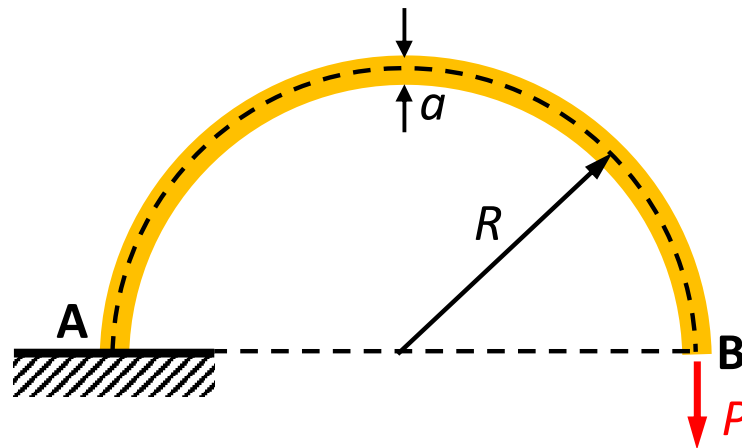


*Desprezível face
aos demais termos.*



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3) O eixo central do arco AB possui raio de curvatura R e sua seção transversal é quadrada de lado a . O material das barras é elástico-linear, com módulo de elasticidade E . Considerando que a seção A esteja engastada e que uma força concentrada de magnitude P seja aplicada em B, determine o deslocamento vertical neste ponto em função dos parâmetros fornecidos usando o Princípio do Trabalho e da Energia. *Obs:* Considere também as parcelas devidas à força normal e à força cortante no cálculo da energia complementar e verifique em quais condições tais parcelas podem ser desprezadas.



*Parcelas desprezíveis
face à 1ª parcela*

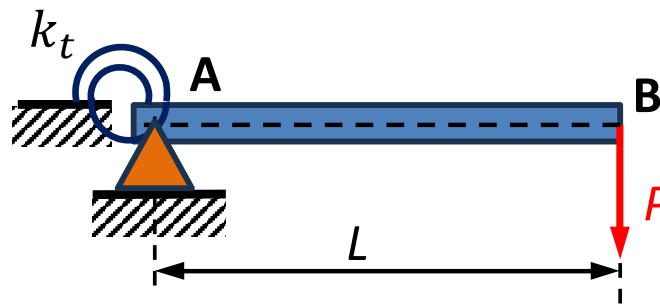
Resp.:

$$\delta_{v,B} = \frac{3\pi PR^3}{2EI} + \frac{\pi PR}{2EA} + \frac{\pi f_c PR}{2GA} = \frac{3\pi PR^3}{2EI} \left[1 + \frac{1}{36} \left(\frac{a}{R} \right)^2 + \frac{(1+\nu)}{15} \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right] \cong \frac{3\pi PR^3}{2EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4) A viga AB possui comprimento L e rigidez flexional EI (constante). A extremidade A está conectada a uma mola de torção (de comportamento linear) com constante k_t (dada). Considerando que uma força concentrada de intensidade P seja aplicada na extremidade livre B, determine o deslocamento vertical neste ponto pelo Princípio do Trabalho e da Energia, em função dos parâmetros fornecidos. Considere válida a hipótese de linearidade geométrica.



Resp.:
$$\delta_{v,B} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^2}{k_t} = \frac{PL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3EI}{k_t L} \right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar, (2021), 105p.
- [2] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.9 (item 9.8).