



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #17

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

14/10/2025



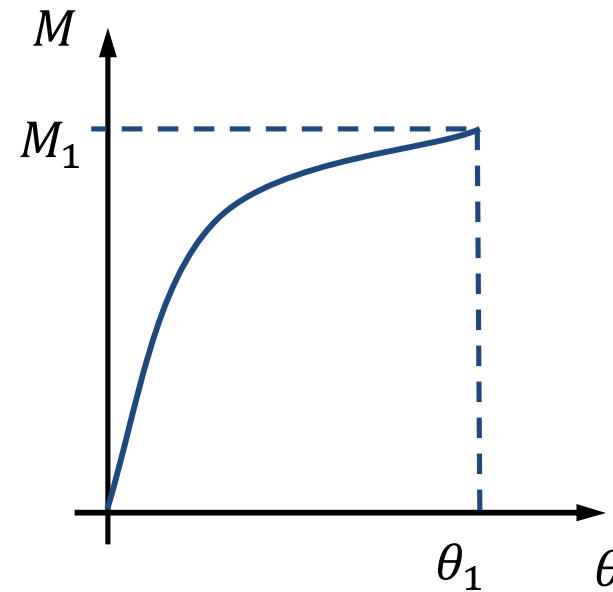
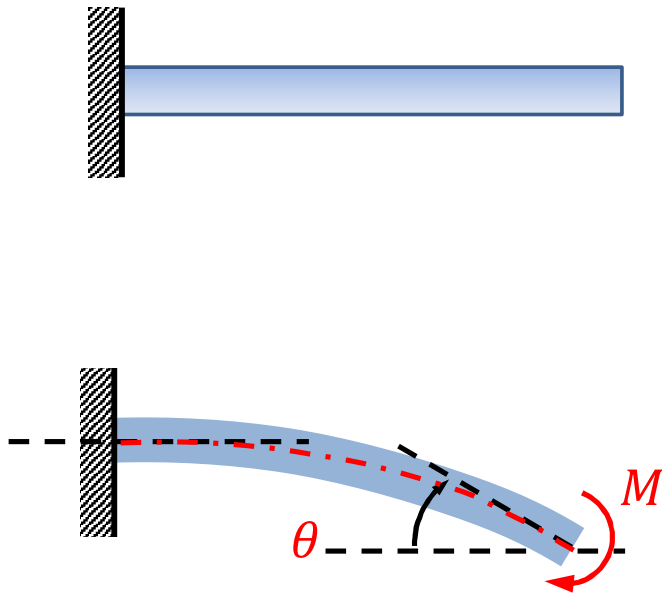
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Trabalho de deformação (W) e trabalho complementar (W^*) na flexão uniforme de barras;
2. Expressões da energia complementar e da energia de deformação para barras submetidas à flexão uniforme;
3. Expressão da energia complementar na flexão não uniforme composta (flexo-tração ou flexo-compressão);
4. Expressão da energia complementar na flexão simples de barras;
5. Exemplos de aplicação;
6. Expressão geral da energia complementar para barras.



1. Trabalho de deformação (W) e trabalho complementar (W^*) na flexão uniforme de barras





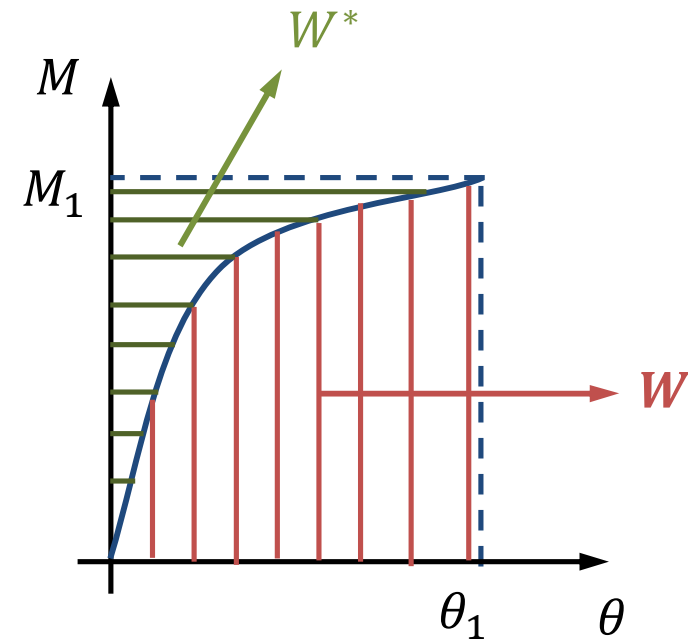
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Definimos o trabalho de deformação (W) realizado pelo momento externo M por:

$$W = \int_0^{\theta_1} M d\theta$$

...e o trabalho complementar (W^*) por:

$$W^* = \int_0^{M_1} \theta dM$$





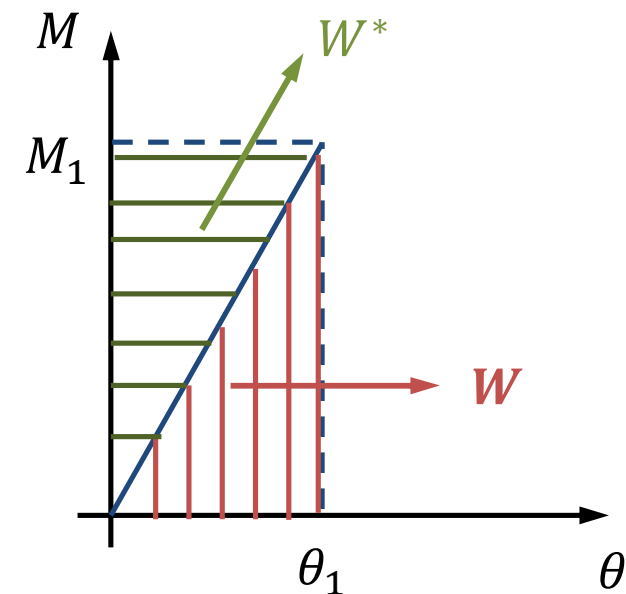
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

No caso particular em que a estrutura possui comportamento elástico-linear, a relação entre o momento aplicado e a rotação do eixo central da barra (no ponto de aplicação do momento aplicado) é dada por:

$$M = k\theta \iff \theta = \frac{M}{k}$$

$$W = \int_0^{\theta_1} M d\theta = \int_0^{\theta_1} (k\theta) d\theta = \frac{k\theta_1^2}{2}$$

$$W^* = \int_0^{M_1} \theta dM = \int_0^{M_1} \left(\frac{M}{k}\right) dM = \frac{M_1^2}{2k}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ainda nesse caso (em que a estrutura possui comportamento elástico-linear), também é imediato perceber que os dois resultados são numericamente iguais:

$$W = \int_0^{\theta_1} M d\theta = \int_0^{\theta_1} (k\theta) d\theta = \frac{k\theta_1^2}{2} \xrightarrow{M_1 = k\theta_1} W = \frac{M_1\theta_1}{2}$$

$$W^* = \int_0^{M_1} \theta dM = \int_0^{M_1} \left(\frac{M}{k}\right) dM = \frac{M_1^2}{2k} \xrightarrow{\theta_1 = \frac{M_1}{k}} W^* = \frac{M_1\theta_1}{2}$$

|||



2. Expressões da energia complementar e da energia de deformação para barras submetidas a flexão uniforme

Hipóteses admitidas:

- O material da barra (em cada segmento analisado) é homogêneo, isótropo e possui comportamento elástico-linear;
- Condições de linearidade geométrica serão admitidas na solução dos problemas, de tal modo que os esforços solicitantes internos podem ser determinados simplesmente pela aplicação das equações de equilíbrio (para estruturas isostáticas) considerando que a configuração deformada e de referência são muito próximas;
- O momento fletor não varia ao longo do comprimento da barra;
- A seção transversal é uniforme ao longo do comprimento da barra.



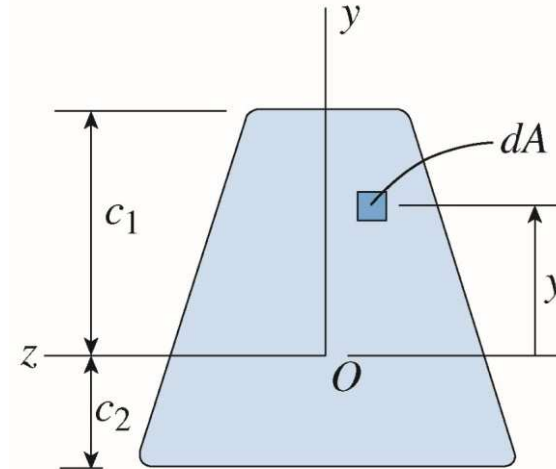
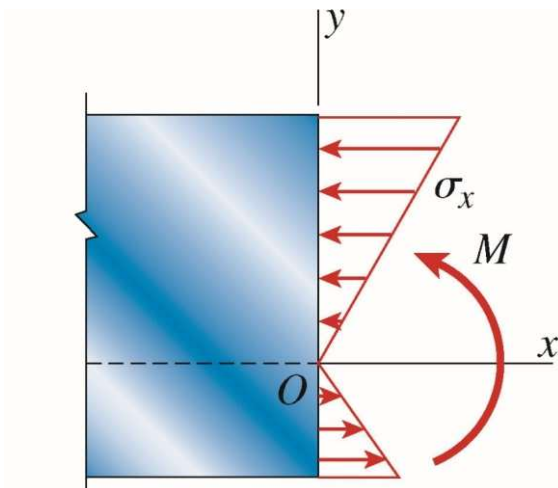
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como vimos anteriormente (para os casos em que as densidades de energia variam ao longo da estrutura):

$$u^* = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U^*}{\Delta V} = \frac{dU^*}{dV} \quad \Rightarrow \quad U^* = \iiint_V u^* dV$$

$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{dU}{dV} \quad \Rightarrow \quad U = \iiint_V u dV$$

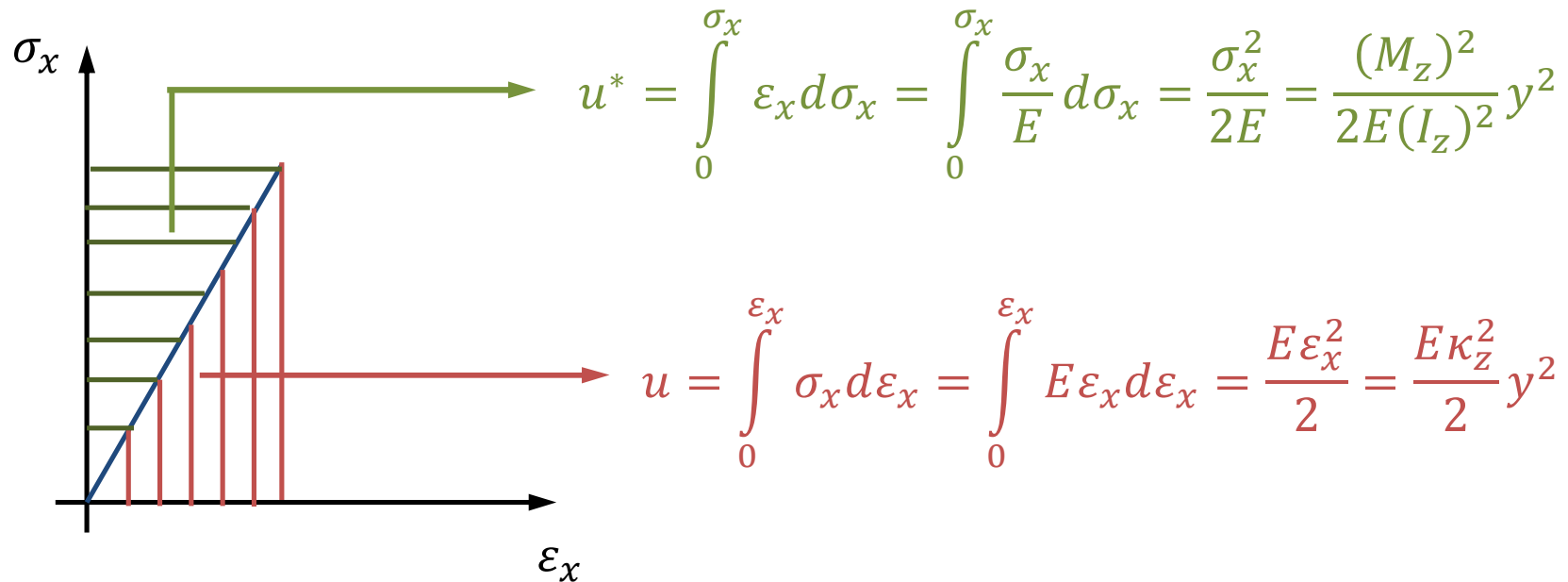
No caso em tela, temos apenas tensões uniaxiais, dadas por: $\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim a densidade de energia complementar e a densidade de energia de deformação ficam dadas por:



Obs: Note que as expressões acima são válidas apenas se o material possuir comportamento elástico linear (vide gráfico acima).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo:
$$U^* = \iiint_V u^* dV = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{(M_z)^2}{(I_z)^2} \left(\iint_A y^2 dA \right) dx$$

$$U^* = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{(M_z)^2}{(I_z)^2} I_z dx \quad \Rightarrow \quad U^* = \int_0^L \frac{M_z^2}{2EI_z} dx$$

E, de forma análoga para a energia de deformação:

$$U = \iiint_V u dV = \int_0^L \frac{E\kappa_z^2}{2} \left(\iint_A y^2 dA \right) dx \quad \Rightarrow \quad U = \int_0^L \frac{EI_z\kappa_z^2}{2} dx$$



3. Expressão da energia complementar na flexão não uniforme composta (flexo-tração ou flexo-compressão)

Hipóteses:

- Barras submetidas a flexão não uniforme composta, com estados de tensão uniaxiais;
- Material homogêneo, isotrópico e com comportamento elástico linear;
- Admite-se a existência de condições que garantem a linearidade geométrica (pequenas deformações, pequenas rotações e pequenos deslocamentos);
- Problemas decorrentes de instabilidade estrutural não fazem parte do escopo, tampouco os efeitos de momentos de 2ª ordem na flexo-compressão.

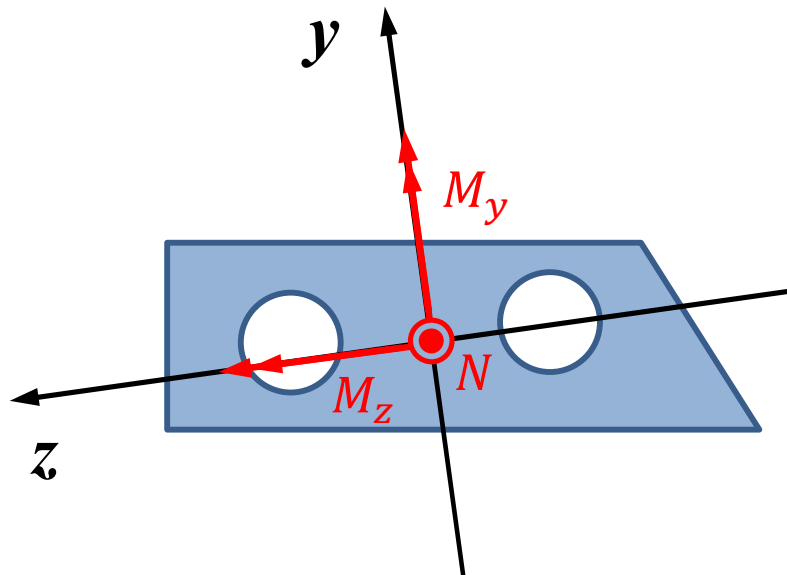


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

No caso em tela, teremos:

$$u^* = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x d\sigma_x = \int_0^{\sigma_x} \frac{\sigma_x}{E} d\sigma_x = \frac{\sigma_x^2}{2E}$$

Para um sistema de eixos locais, com origem no centroide de uma dada seção transversal da barra, e sendo os eixos C_y e C_z eixos centrais e principais de inércia, a distribuição de tensões normais na flexão composta é dada por:



$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo: $u^* = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{1}{2E} \left[\frac{(N(s))^2}{(A(s))^2} + \frac{(M_y(s))^2 z^2}{(I_y(s))^2} + \frac{(M_z(s))^2 y^2}{(I_z(s))^2} \right] +$
 $+ \frac{1}{E} \left[\frac{N(s) M_y(s)}{A(s) I_y(s)} z - \frac{N(s) M_z(s)}{A(s) I_z(s)} y - \frac{M_y(s) M_z(s)}{I_y(s) I_z(s)} yz \right]$

$$U^* = \iiint_V u^* dV = \frac{1}{2E} \left[\int_0^L \frac{(N(s))^2}{(A(s))^2} \left(\iint_A dA \right) ds + \int_0^L \frac{(M_y(s))^2}{(I_y(s))^2} \left(\iint_A z^2 dA \right) ds \right]$$
$$+ \frac{1}{2E} \left[\int_0^L \frac{(M_z(s))^2}{(I_z(s))^2} \left(\iint_A y^2 dA \right) ds \right] + \frac{1}{E} \left[\int_0^L \frac{N(s) M_y(s)}{A(s) I_y(s)} \left(\iint_A z dA \right) ds \right]$$
$$- \frac{1}{E} \left[\int_0^L \frac{N(s) M_z(s)}{A(s) I_z(s)} \left(\iint_A y dA \right) ds + \int_0^L \frac{M_y(s) M_z(s)}{I_y(s) I_z(s)} \left(\iint_A yz dA \right) ds \right]$$



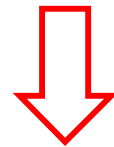
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$U^* = \frac{1}{2E} \left[\int_0^L \frac{N^2(s)}{A(s)} ds + \int_0^L \frac{M_y^2(s)}{I_y(s)} ds + \int_0^L \frac{M_z^2(s)}{I_z(s)} ds \right]$$

$$U^* = \int_0^L \frac{N^2(s)}{2EA(s)} ds + \int_0^L \frac{M_y^2(s)}{2EI_y(s)} ds + \int_0^L \frac{M_z^2(s)}{2EI_z(s)} ds$$



Energia devida às
forças normais



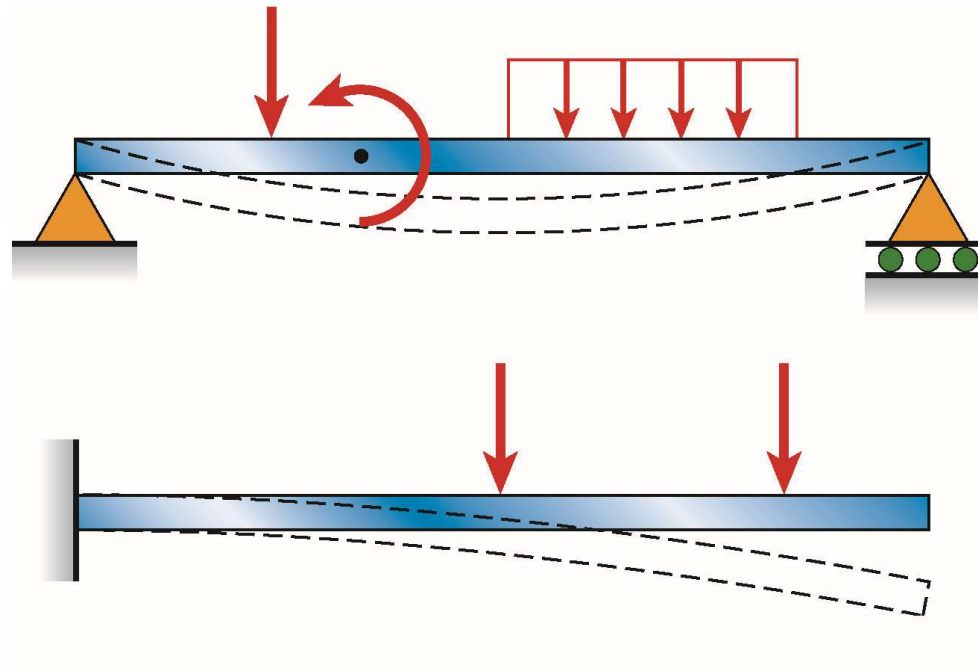
Energia devida à
flexão em torno do
eixo principal C_y



Energia devida à
flexão em torno do
eixo principal C_z



4. Expressão da energia complementar na flexão simples de barras

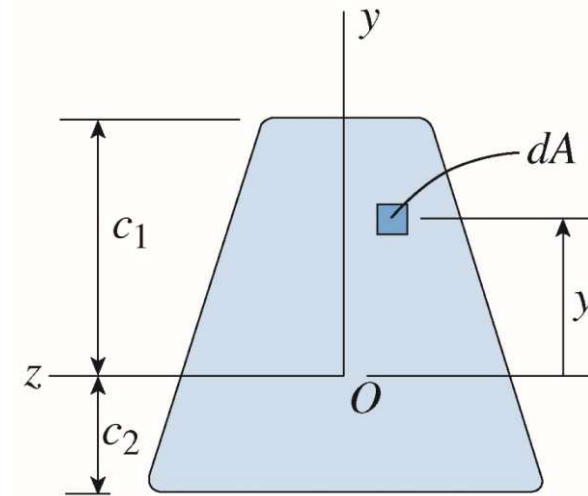
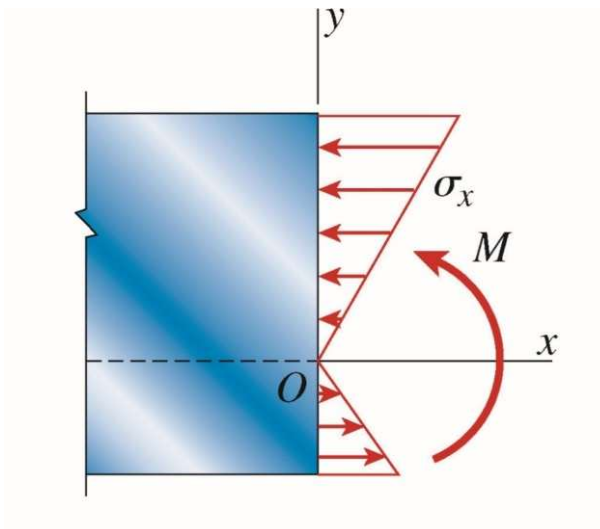




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

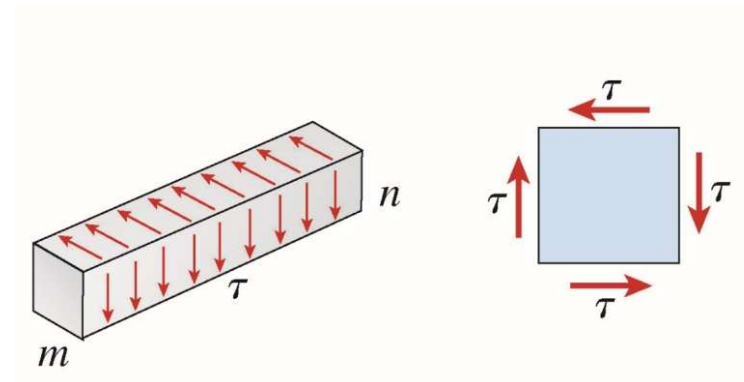
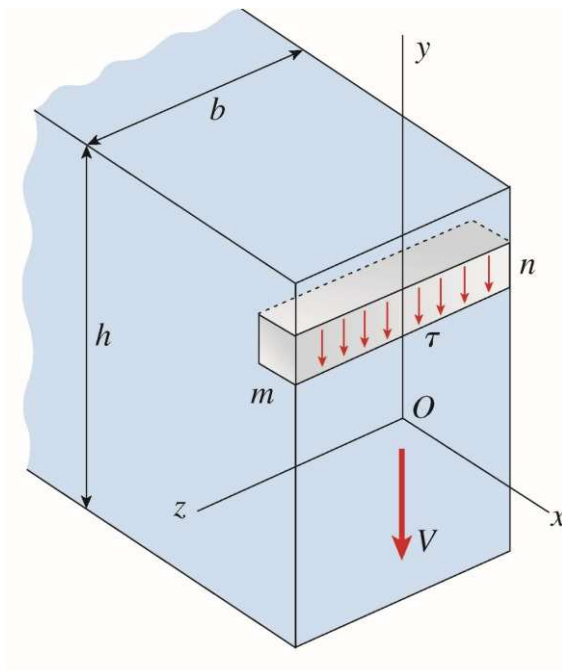
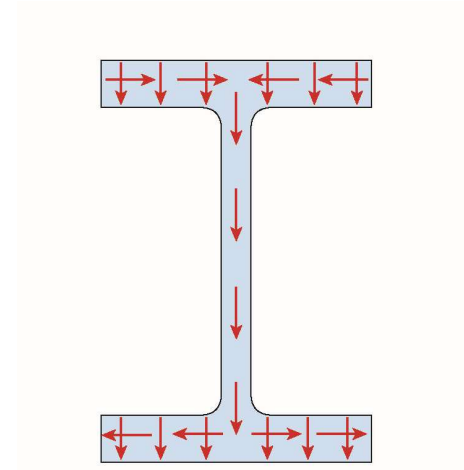
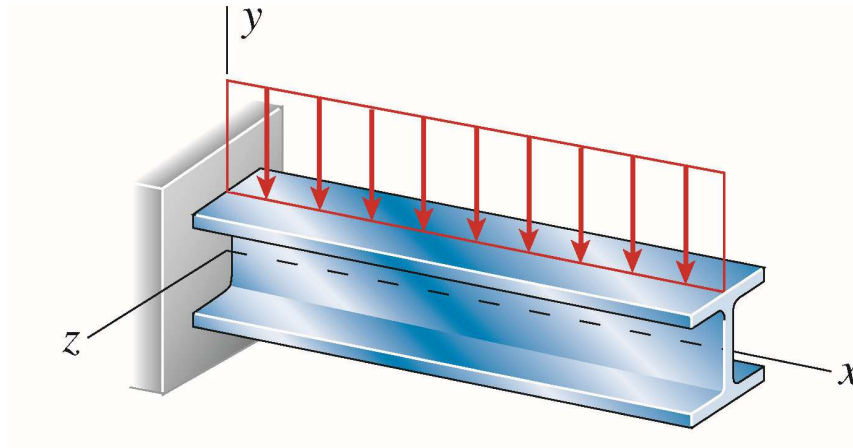
Em barras submetidas a carregamentos transversais aplicados no plano xy , e que são simétricas em relação a esse mesmo plano, a flexão ocorre no próprio plano xy (denominado plano de flexão). Nesse caso, temos apenas duas tensões agindo nas seções transversais:

- As tensões normais σ_x associadas aos momentos fletores e
- As tensões cisalhantes τ_{xy} (ou τ_{xz}) associadas às forças cortantes.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



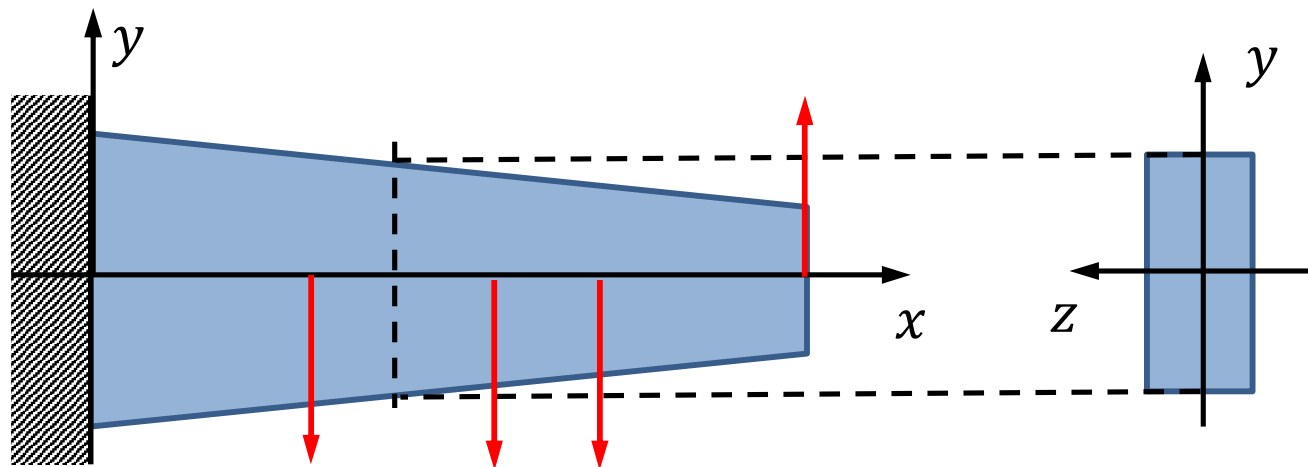


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Se o material é homogêneo, isótropo e possui comportamento elástico linear, a densidade de energia complementar nesses casos fica dada por (vide Aula #15, slides 16-17):

$$u^* = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\tau_{xy}^2}{2G} + \frac{\tau_{xz}^2}{2G}$$

Para simplificar um pouco, vamos considerar apenas os casos em que temos apenas as tensões cisalhantes τ_{xy} , considerando, por exemplo, que as seções transversais são retangulares, como no exemplo abaixo:






Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Nesse caso: $u^* = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$

$$\sigma_x = -\frac{M_z(x)}{I_z(x)} y \qquad \tau_{xy} = \frac{V_y(x)Q(x, y)}{I_z(x)b(x, y)}$$

$$u^* = \frac{M_z^2(x)y^2}{2EI_z^2(x)} + \frac{V_y^2(x)}{2G} \frac{Q^2(x, y)}{I_z^2(x)b^2(x, y)}$$

$$U^* = \iiint_V u^* dV = \iiint_V \left(\frac{M_z^2(x)y^2}{2EI_z^2(x)} + \frac{V_y^2(x)}{2G} \frac{Q^2(x, y)}{I_z^2(x)b^2(x, y)} \right) dV$$


$$\int_0^L \frac{M_z^2(x)}{2EI_z(x)} dx$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A parcela devida apenas às forças cortantes (associadas às tensões cisalhantes) fica dada por:

$$U_V^* = \iiint_V \left(\frac{V_y^2(x)}{2G} \frac{Q^2(x, y)}{I_z^2(x) b^2(x, y)} \right) dV = \int_0^L \frac{V_y^2(x)}{2G I_z^2(x)} \left(\iint_{A(x)} \frac{Q^2(x, y)}{b^2(x, y)} dA \right) dx$$

Denotando: $f = \frac{A(x)}{I_z^2(x)} \iint_{A(x)} \frac{Q^2(x, y)}{b^2(x, y)} dA$

Obtemos: $U_V^* = \int_0^L \frac{f V_y^2(x)}{2GA(x)} dx$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo, a expressão completa da energia complementar para este caso fica dada por:

$$U^* = \int_0^L \frac{M_z^2(x)}{2EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{fV_y^2(x)}{2GA(x)} dx$$

O fator f , denominado fator de forma, é um adimensional que depende apenas do formato da seção transversal. Para seções transversais retangulares, por exemplo, pode-se mostrar que $f = 6/5$.

Pode-se verificar também que este fator de forma é um fator de correção (para o cálculo da energia) que leva em conta o fato de que as tensões de cisalhamento não são distribuídas uniformemente nas seções transversais.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Nota:

Se considerássemos, no cálculo da parcela U_V^* da energia complementar, apenas as tensões de cisalhamento médias na seção transversal, teríamos:

$$U_V^* = \iiint_V \left(\frac{\tau_{xy}^2}{2G} \right) dV$$

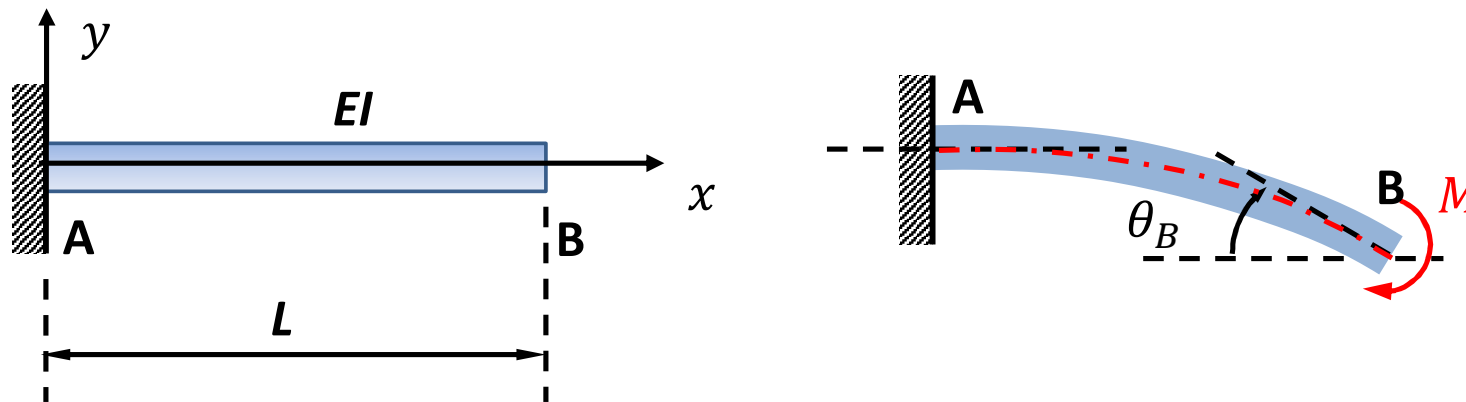
Sendo: $\tau_{xy} \cong \bar{\tau}_{xy} = \frac{V_y(x)}{A(x)}$

Logo: $U_V^* \cong \int_0^L \frac{1}{2G} \left(\frac{V_y^2(x)}{A^2(x)} \right) A(x) dx \quad \Rightarrow \quad U_V^* \cong \int_0^L \frac{V_y^2(x)}{2GA(x)} dx$



5. Exemplos de aplicação

Ex.1. A barra AB, engastada em A e livre em B, está submetida a um momento fletor M na extremidade B. Determine o ângulo de rotação θ_B pelo Princípio do Trabalho e da Energia.



Dados: M, L, EI .



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

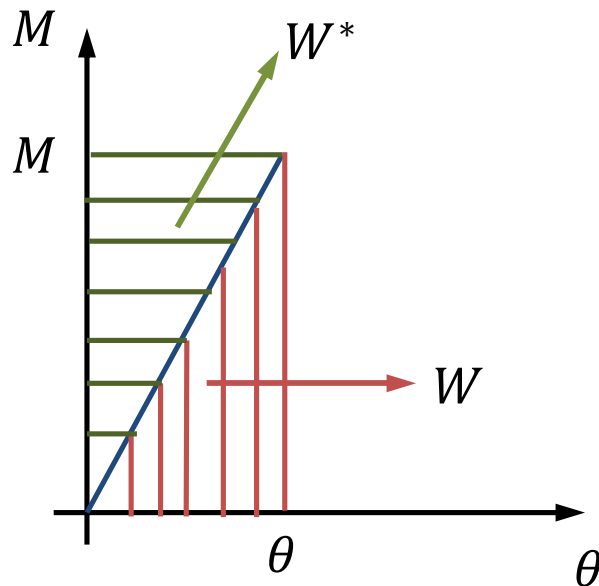
Solução:

Para estruturas que possuem comportamento elástico linear, vale:

$$W = W^* = \frac{M\theta_B}{2}$$

A energia complementar por sua vez é dada por:

$$U^* = \int_0^L \frac{M_z^2(x)}{2EI_z(x)} dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI_z} dx = \frac{M^2L}{2EI_z}$$



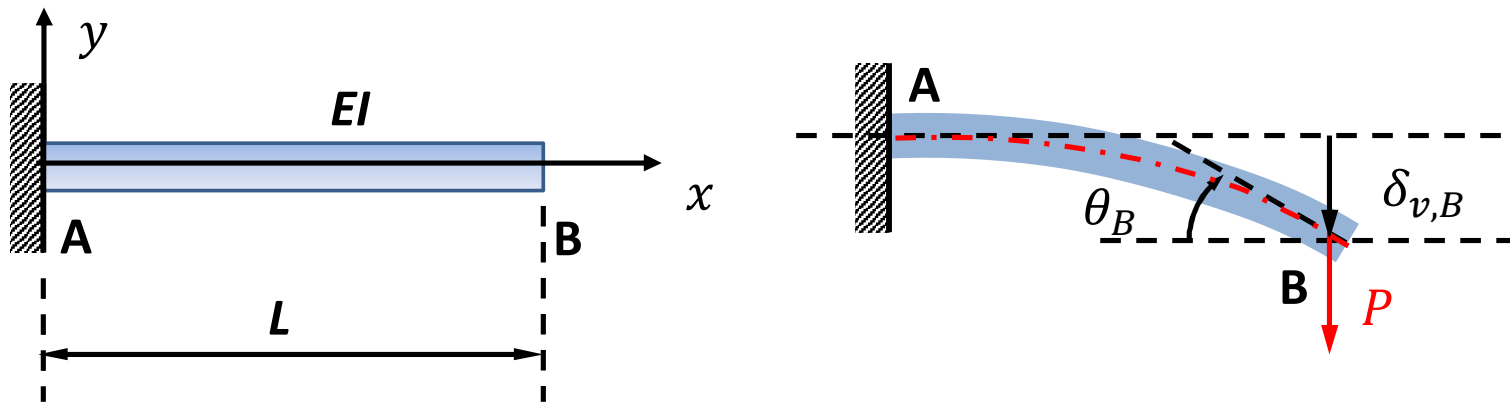
Logo, pelo Princípio do Trabalho e da Energia (aplicado a estruturas com comportamento elástico linear):

$$W = W^* = U = U^* \iff \frac{M\theta_B}{2} = \frac{M^2L}{2EI_z} \iff \theta_B = \frac{ML}{EI_z}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.2. A barra AB, engastada em A e livre em B, está submetida a uma carga concentrada P na extremidade B. A barra possui seção transversal retangular ($b \times h$). Determine o deslocamento vertical $\delta_{v,B}$ do ponto B pelo Princípio do Trabalho e da Energia.

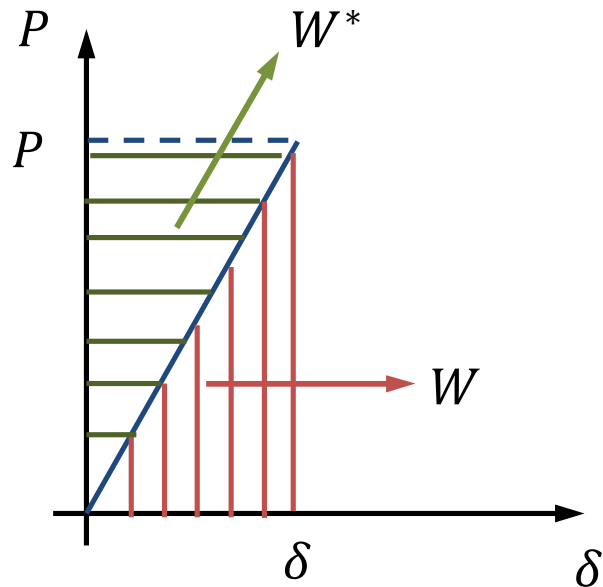


Dados: $P, L, E, b, h, f = 6/5, \nu = 0,3$.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

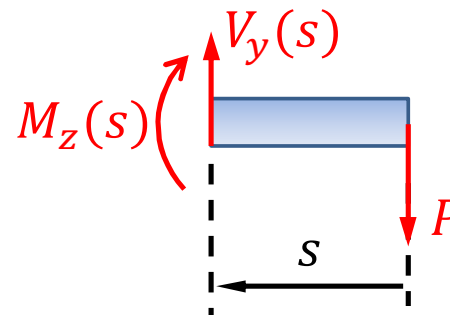
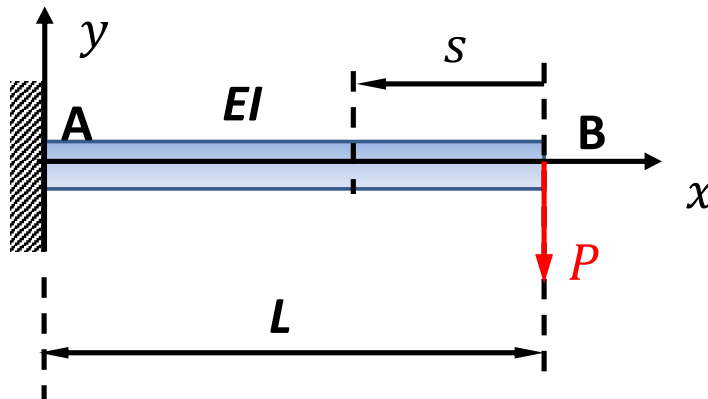


Para estruturas que possuem comportamento elástico linear, vale:

$$W = W^* = \frac{P\delta_{v,B}}{2}$$

A energia complementar por sua vez é dada por:

$$U^* = \int_0^L \frac{M_z^2(s)}{2EI_z(s)} ds + \int_0^L \frac{fV_y^2(s)}{2GA(s)} ds$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Do equilíbrio de forças e de momentos para o trecho de comprimento s , obtemos:

$$V_y(s) = P \qquad M_z(s) = -Ps$$

Assim:
$$U^* = \int_0^L \frac{P^2 s^2}{2EI_z} ds + \int_0^L \frac{fP^2}{2GA} ds = \frac{P^2 L^3}{6EI_z} + \frac{fP^2 L}{2GA}$$

Logo, pelo Princípio do Trabalho e da Energia (aplicado a estruturas com comportamento elástico linear):

$$W = W^* = U = U^* \quad \longleftrightarrow \quad \frac{P\delta_{v,B}}{2} = \frac{P^2 L^3}{6EI_z} + \frac{fP^2 L}{2GA} \quad \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \quad \delta_{v,B} = \frac{PL^3}{3EI_z} + \frac{fPL}{GA}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

De posse dos dados adicionais do problema (formato da seção e coeficiente de Poisson do material), vamos analisar qual é a importância relativa da parcela do deslocamento devida às forças cortantes frente à parcela devida aos momentos fletores:

$$\delta_{v,B} = \frac{PL^3}{3EI_z} + \frac{fPL}{GA} = \frac{PL^3}{3EI_z} \left[1 + \frac{3fEI_z}{GAL^2} \right]$$

Seja:
$$\eta = \frac{3fEI_z}{GAL^2} = 3f \frac{E}{G} \frac{I_z}{AL^2} = 3f(2 + 2\nu) \frac{bh^3}{12} \frac{1}{bhL^2}$$

$$\eta = f(1 + \nu) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{L} \right)^2 = \frac{6}{5} (1,3) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{L} \right)^2 = 0,78 \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

Como as vigas possuem, em geral, relações $h/L < 0,1$, nota-se que a parcela do deslocamento devida às forças cortantes pode ser desprezada em quase todos os casos práticos.



6. Expressão geral da energia complementar para barras





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Considerando que em uma seção transversal genérica de uma estrutura formada por barras, possam existir três componentes de força (a força normal $N(s)$ e as duas componentes de forças cortantes, segundo os eixos principais de flexão da seção, $V_y(s)$ e $V_z(s)$) e três componentes de momento (os momentos fletores $M_y(s)$ e $M_z(s)$ e o momento de torção $T(s)$), a expressão “geral” para o cálculo da energia complementar de um dado segmento de barra fica dada por:

$$U^* = \int_0^L \frac{N^2(s)}{2EA(s)} ds + \int_0^L \frac{f_y V_y^2(s)}{2GA(s)} ds + \int_0^L \frac{f_z V_z^2(s)}{2GA(s)} ds + \\ + \int_0^L \frac{M_y^2(s)}{2EI_y(s)} ds + \int_0^L \frac{M_z^2(s)}{2EI_z(s)} ds + \int_0^L \frac{T^2(s)}{2GI_t(s)} ds$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar, (2021), 105p.
- [2] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.9 (item 9.8).