



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #16

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

08/10/2025



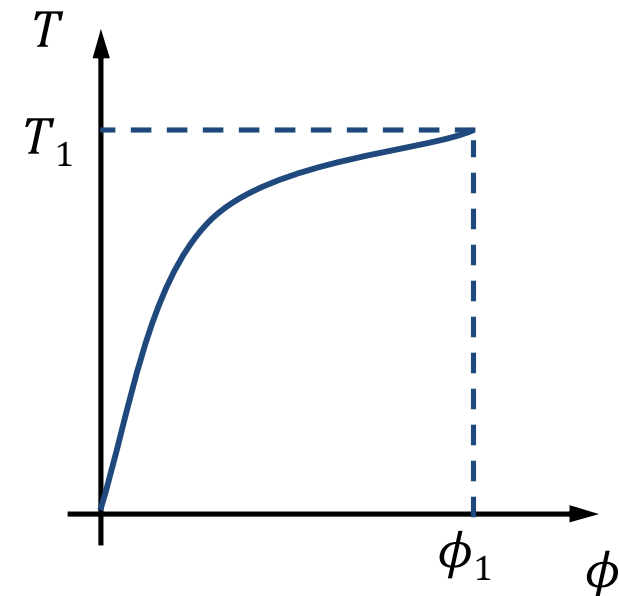
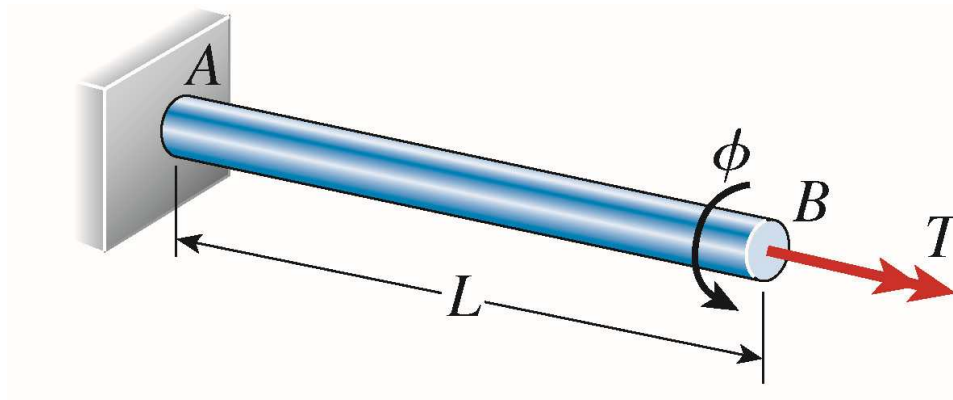
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Trabalho de deformação (W) e trabalho complementar (W^*) na torção de barras de seção circular;
2. Energia de deformação (U) e energia complementar (U^*);
3. Densidade de energia de deformação (u) e densidade de energia complementar (u^*) na torção;
4. Expressão da energia complementar para barras de seção circular submetidas a torção;
5. Expressão da energia de deformação para barras de seção circular submetidas a torção;
6. Ângulo de torção para tubos de parede fina;
7. Exemplos de aplicação.



1. Trabalho de deformação (W) e trabalho complementar (W^*) na torção de barras de seção circular





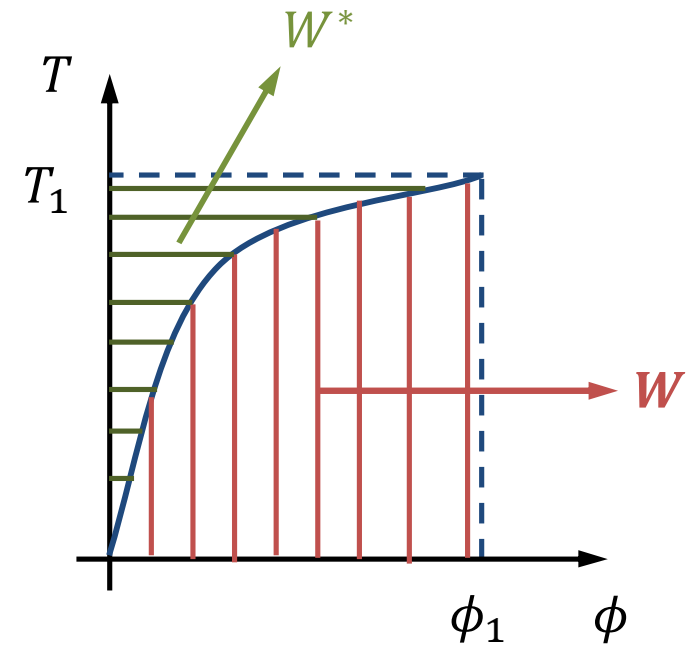
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Definimos o trabalho de deformação (W) realizado pelo torque externo T por:

$$W = \int_0^{\phi_1} T d\phi$$

...e o trabalho complementar (W^*) por:

$$W^* = \int_0^{T_1} \phi dT$$





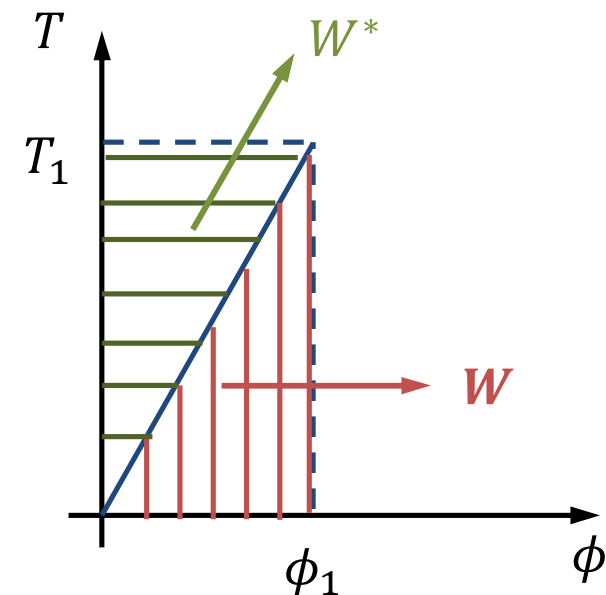
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

No caso particular em que a estrutura possui comportamento elástico-linear, a relação entre o torque externo e o correspondente ângulo de giro da seção em que o torque foi aplicado é dada por:

$$T = k_t \phi \iff \phi = \frac{T}{k_t}$$

$$W = \int_0^{\phi_1} T d\phi = \int_0^{\phi_1} (k_t \phi) d\phi = \frac{k_t \phi_1^2}{2}$$

$$W^* = \int_0^{T_1} \phi dT = \int_0^{T_1} \left(\frac{T}{k_t} \right) dT = \frac{T_1^2}{2k_t}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ainda nesse caso (em que a estrutura possui comportamento elástico-linear), também é imediato perceber que os dois resultados são numericamente iguais:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\phi_1} T d\phi = \int_0^{\phi_1} (k_t \phi) d\phi = \frac{k_t \phi_1^2}{2} \xrightarrow{T_1 = k_t \phi_1} W = \frac{T_1 \phi_1}{2} \\ W^* &= \int_0^{T_1} \phi dT = \int_0^{T_1} \left(\frac{T}{k_t} \right) dT = \frac{T_1^2}{2k_t} \xrightarrow{\phi_1 = \frac{T_1}{k_t}} W^* = \frac{T_1 \phi_1}{2} \end{aligned}$$

□□



2. Energia de deformação (U) e energia complementar (U^*)

Como vimos na aula anterior, a energia complementar e a energia de deformação são definidas, respectivamente, a partir dos esforços internos (tensões normais e cisalhantes) e das deformações (alongamentos e distorções) associadas. Vimos também que, se considerarmos desprezíveis as dissipações de energia da estrutura (por atrito ou qualquer outra causa), podemos estabelecer que:

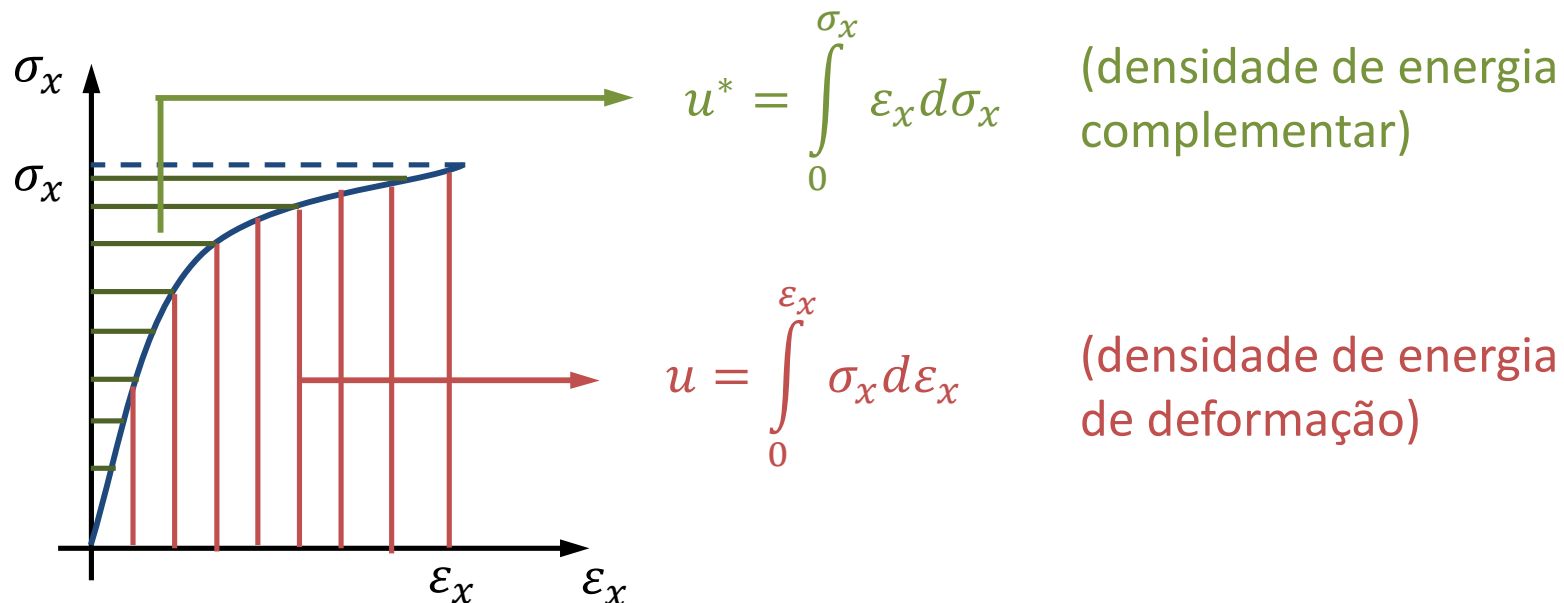
$$W = U \quad \text{e} \quad W^* = U^*$$

Veremos que as energias totais (seja a de deformação ou a complementar) são obtidas pela integração no volume das correspondentes densidades de energia.



3. Densidade de energia de deformação (u) e densidade de energia complementar (u^*) na torção

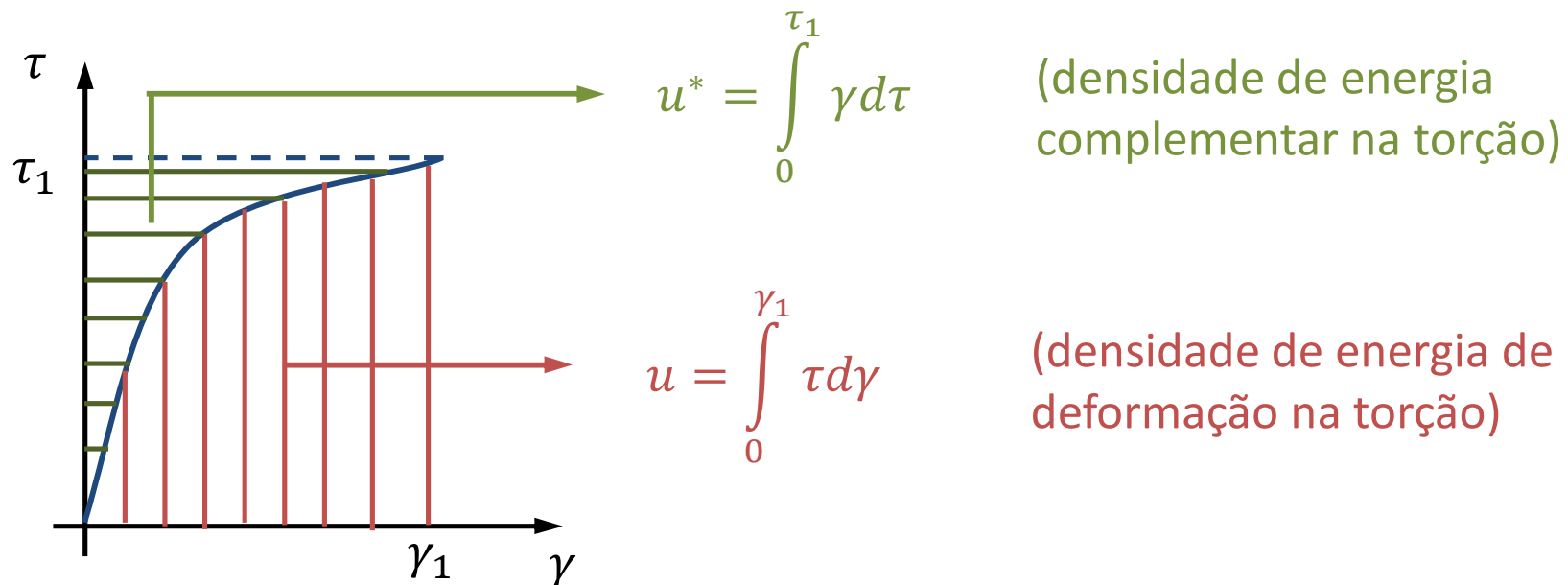
Vimos na aula anterior que, no caso de um estado uniaxial de tensão, onde comparece apenas uma tensão normal σ_x que causa um alongamento ε_x das fibras que estão alinhadas com a direção de aplicação da tensão, a densidade de energia de deformação (u) e a densidade de energia complementar (u^*) ficavam definidas por:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

De forma análoga, para um estado de cisalhamento puro, onde temos apenas a tensão de cisalhamento (τ) que causa uma distorção γ entre duas fibras (antes ortogonais entre si), a densidade de energia de deformação (u) e a densidade de energia complementar (u^*) ficam definidas por:

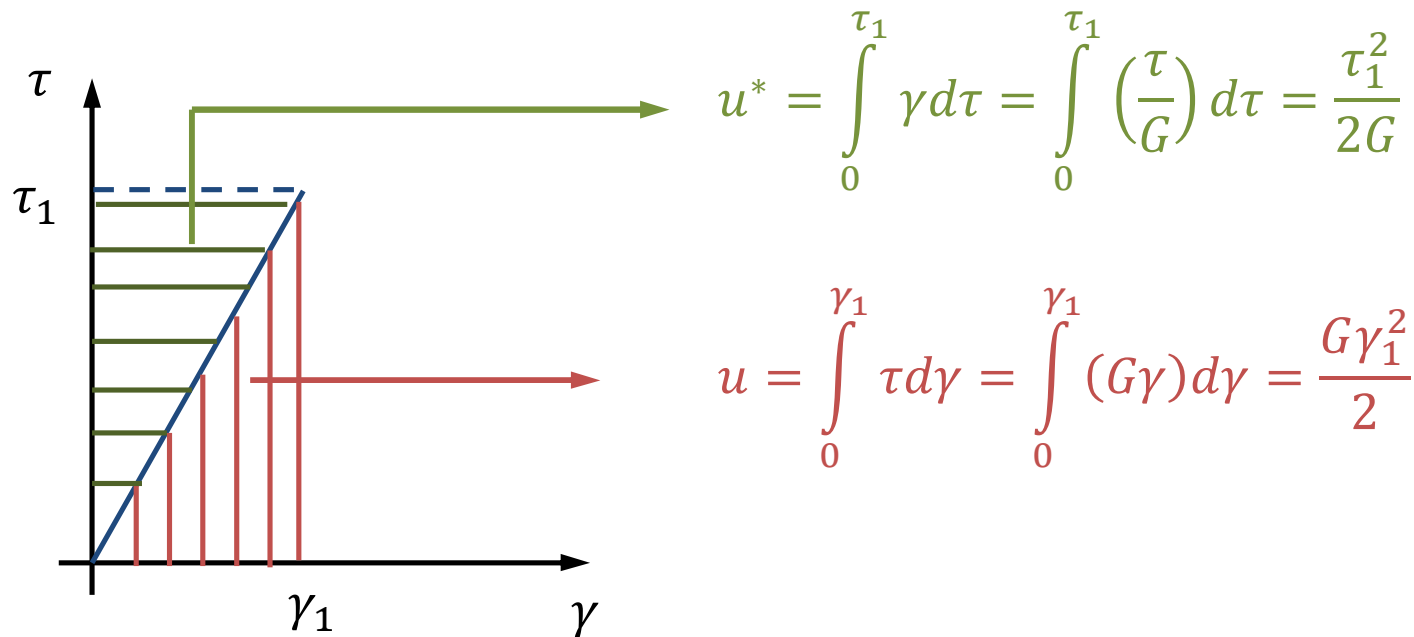




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para os casos em que o material da barra segue a Lei de Hooke, teremos:

$$\tau = G\gamma \quad \longleftrightarrow \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$





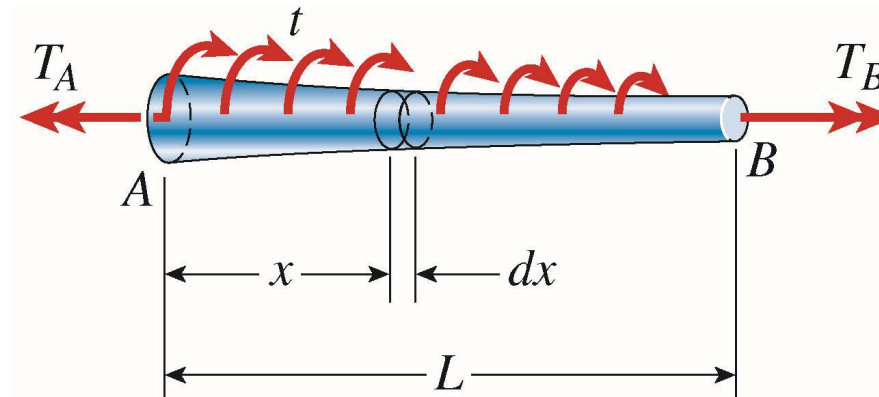
4. Expressão da energia complementar (U^*) para barras de seção circular submetidas a torção

Hipóteses:

- O material da barra (em cada segmento analisado) é homogêneo, isótropo e possui comportamento elástico-linear;
- Condições de linearidade geométrica serão (geralmente) admitidas na solução dos problemas, de tal modo que os esforços solicitantes internos podem ser determinados simplesmente pela aplicação das equações de equilíbrio (para estruturas isostáticas) considerando que a configuração deformada e a de referência são muito próximas;
- O carregamento é aplicado de forma quase-estática;
- No caso de barras com seções transversais variáveis, a variação da geometria ocorre de forma gradual (baixos ângulos de conicidade).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Como vimos na aula anterior, para os casos em que a densidade de energia complementar varia ao longo da estrutura, a energia complementar total é obtida pela integral da densidade de energia complementar no volume da estrutura:

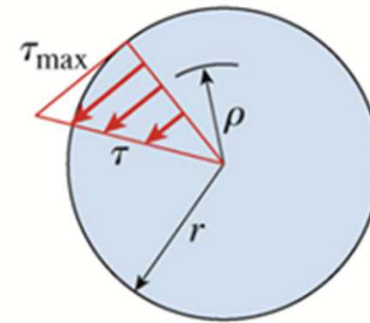
$$u^* = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U^*}{\Delta V} = \frac{dU^*}{dV} \quad \Rightarrow \quad U^* = \iiint_V u^* dV$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

No caso da torção de seções circulares, temos apenas tensões cisalhantes agindo nas seções transversais, causadas pelos torques internos $T = T(x)$, e dadas por:

$$\tau = \frac{T(x)}{I_p(x)} \rho \quad (0 \leq \rho \leq r)$$



Logo (vide slide #10) :

$$u^* = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2G} \frac{(T(x))^2}{(I_p(x))^2} \rho^2$$

Integrando a densidade de energia complementar em todo o volume da barra, teremos:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$U^* = \iiint_V u^* dV = \int_0^L \frac{1}{2G} \frac{(T(x))^2}{(I_p(x))^2} \left(\iint_{A(x)} \rho^2 dA \right) dx$$

$$U^* = \int_0^L \frac{1}{2G} \frac{(T(x))^2}{(I_p(x))^2} I_p(x) dx \quad \Rightarrow \quad U^* = \int_0^L \frac{(T(x))^2}{2G I_p(x)} dx$$

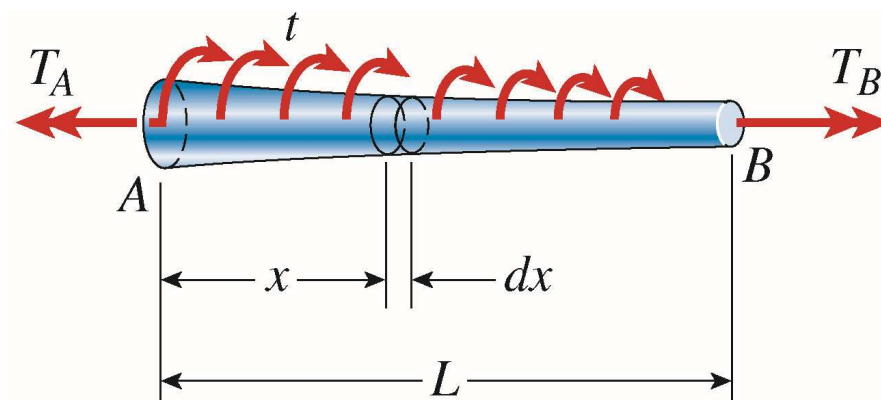
E, no caso em que a estrutura é formada por várias barras (ou por vários segmentos de barra), cada qual com um módulo de elasticidade G_i , com comprimento L_i , e com uma variação de momento de inércia polar $I_{p,i} = I_{p,i}(x_i)$, teremos:

$$U^* = \sum_{i=1}^n U_i^* = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{(T_i(x_i))^2}{2G_i I_{p,i}(x_i)} dx_i$$



5. Expressão da energia de deformação para barras de seção circular submetidas a torção

De forma análoga ao estudo apresentado no item anterior (considerando as mesmas hipóteses), podemos determinar também a expressão da energia de deformação de uma barra de seção variável submetida a carregamentos torcionais que variam ao longo da barra como abaixo:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como a densidade de energia de deformação varia ao longo da estrutura, a energia de deformação total deve ser obtida pela integral da densidade de energia de deformação:

$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{dU}{dV} \quad \Rightarrow \quad U = \iiint_V u dV$$

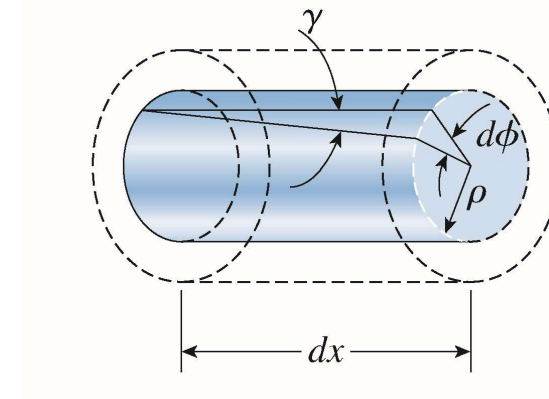
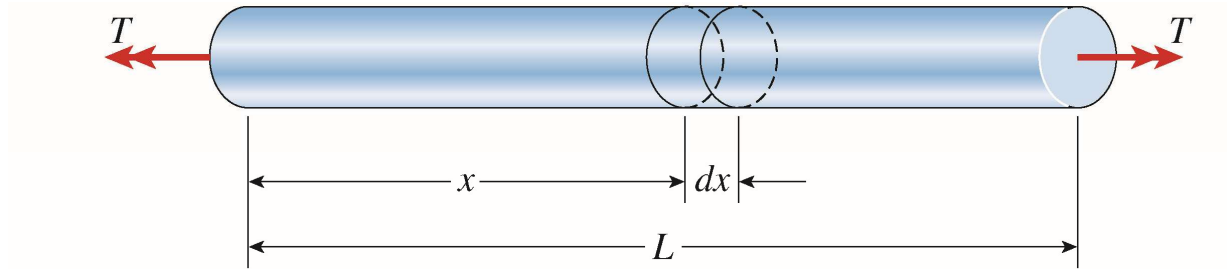
Mas, no caso em tela, teremos (vide slide #10):

$$u = \int_0^{\gamma_1} \tau d\gamma = \int_0^{\gamma_1} (G\gamma) d\gamma = \frac{G\gamma_1^2}{2}$$

Lembrando que as distorções estão relacionadas ao ângulo de giro por unidade de comprimento, ou taxa de torção ($d\phi/dx$), de cada seção transversal, em relação a uma seção de referência, na forma:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\gamma = \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \rho$$

Obtemos:
$$U = \iiint_V u dV = \iiint_V \left(\frac{G}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \rho \right)^2 \right) dV$$

$$U = \int_0^L \frac{G}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \left(\iint_{A(x)} \rho^2 dA \right) dx \quad \Rightarrow \quad U = \int_0^L \frac{GI_p(x)}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E, no caso em que a estrutura é formada por várias barras (ou por vários segmentos de barra), cada qual com um módulo de elasticidade G_i , com comprimento L_i , e com uma variação de momento de inércia polar $I_{p,i} = I_{p,i}(x_i)$, teremos:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \int_0^L \frac{G_i I_{p,i}(x)}{2} \left(\frac{d\phi_i}{dx_i} \right)^2 dx_i$$



6. Ângulo de torção para tubos de parede fina

Este tópico complementa o estudo iniciado na disciplina PME-3210, sobre a torção de tubos de parede fina. As hipóteses admitidas são:

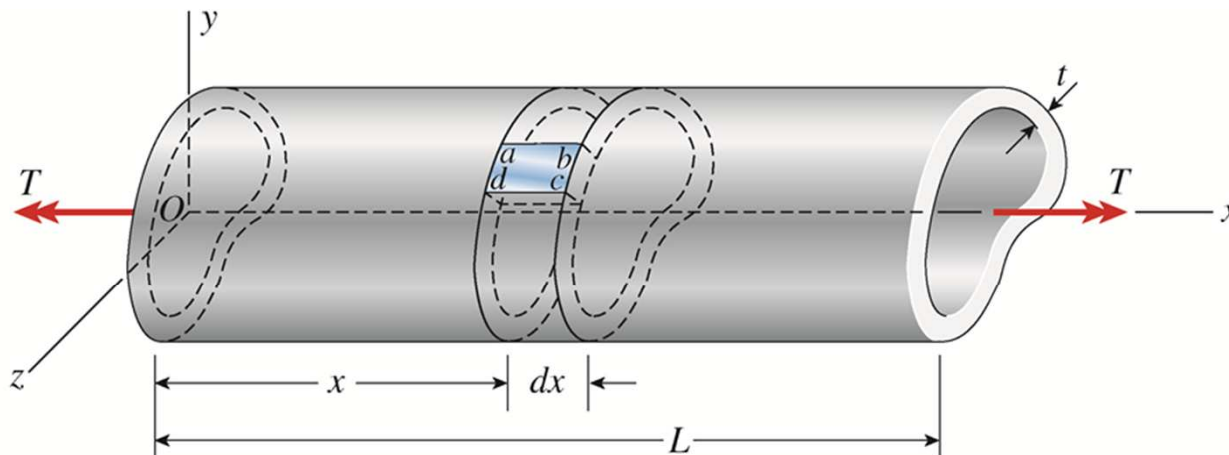
- Tubo é cilíndrico em forma: seções transversais não variam ao longo do comprimento e seu eixo central é reto;
- A espessura do tubo não é necessariamente constante, podendo variar ao longo da seção transversal: $t = t(s)$;
- A espessura da parede deve ser pequena quando comparada às dimensões características da seção transversal (digamos, $t/a < 0,1$);
- O tubo está submetido à torção pura com torques T agindo nas extremidades;
- O material do tubo é homogêneo, isótropo, e possui comportamento elástico-linear;
- O tubo fechado é uma estrutura unicelular (formado por uma única célula);
- O empenamento é livre (não há tensões normais atuantes nas S.T.'s que impeçam o empenamento).



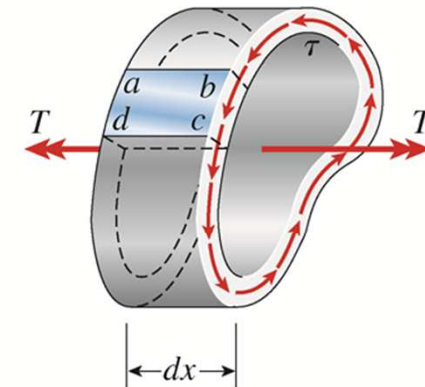
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Das hipóteses estabelecidas, observamos que:

- As tensões de cisalhamento em qualquer seção transversal devem gerar um torque igual (em magnitude) ao torque T aplicado nas extremidades;
- As tensões de cisalhamento nas seções transversais têm a direção dos versores tangentes à curva definida pela linha de meia espessura da seção transversal;
- Como o tubo é de parede fina, podemos admitir que as tensões de cisalhamento são praticamente uniformes ao longo da espessura.



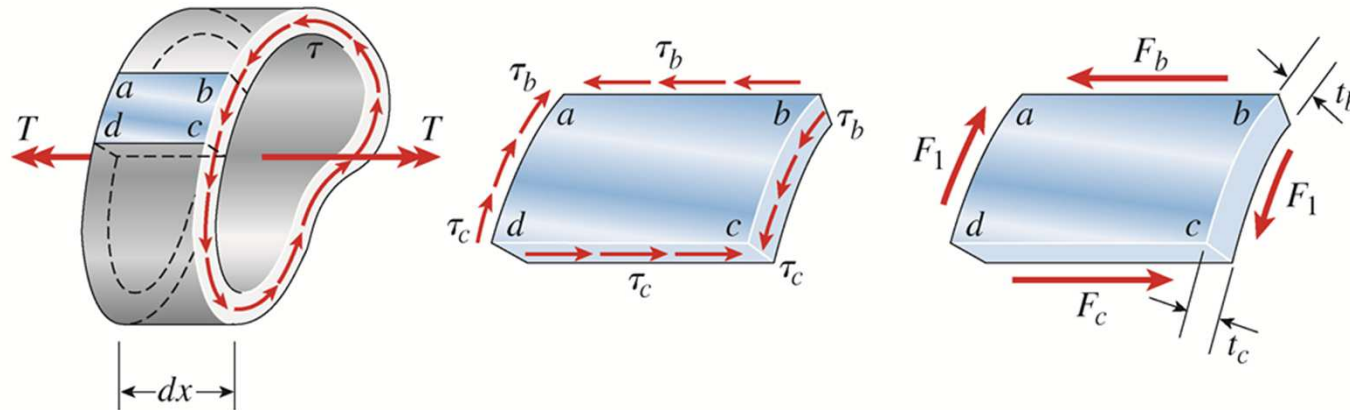
(a)



(b)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Admitindo a inexistência de outras tensões (que não as de cisalhamento indicadas na figura) e impondo o equilíbrio de forças na direção longitudinal para o elemento $abcd$, encontramos:

$$F_b = F_c \Leftrightarrow \tau_b(t_b dx) = \tau_c(t_c dx) \Leftrightarrow \tau_b t_b = \tau_c t_c$$

Conclusão: $f = \tau(s)t(s) = cte$

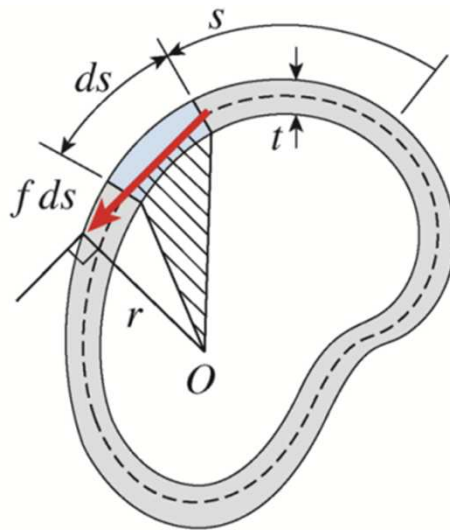
Denominamos f fluxo de cisalhamento. Unidade no S.I.: $[f] = \text{N/m}$.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Calculando o torque interno associado ao fluxo f teremos:

$$T = \oint dT = \oint_0^{L_m} f r(s) ds = f \oint_0^{L_m} r(s) ds$$



Mas: $dA = \frac{ds \cdot r(s)}{2} \Leftrightarrow r(s) ds = 2dA$

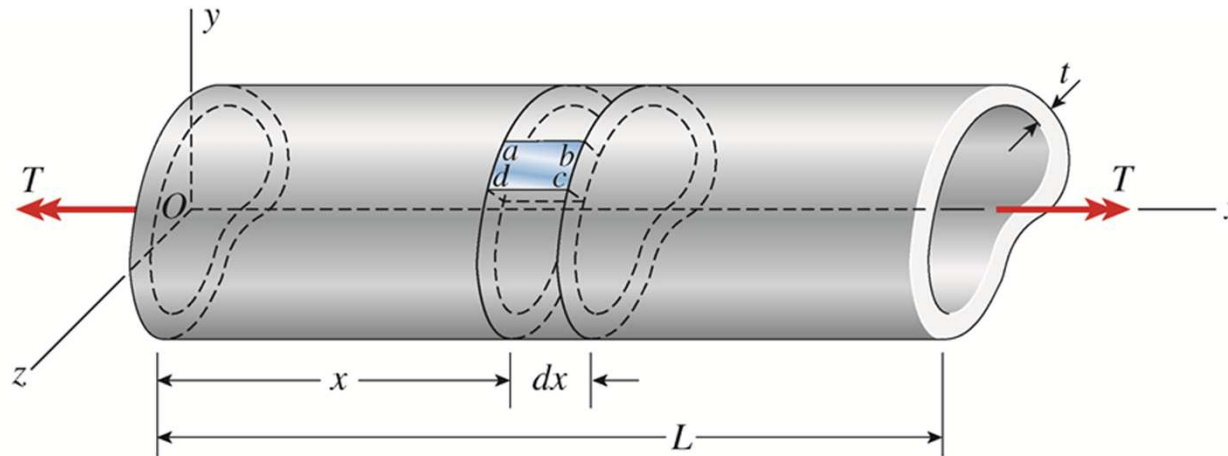
$$T = f \oint_0^{L_m} r(s) ds = 2f \oint_{A_m} dA \Leftrightarrow T = 2f A_m$$

Logo: $\tau(s) = \frac{T}{2A_m t(s)}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Cálculo do ângulo de giro (ϕ)



Pelas hipóteses admitidas, o trabalho de deformação e o trabalho complementar serão iguais e podem ser calculados pela expressão:

$$W = W^* = \frac{T\phi}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Por outro lado, a energia complementar total do tubo pode ser obtida pela expressão (ver slides #10 e #12):

$$U^* = \iiint_V u^* dV = \iiint_V \left(\frac{\tau^2}{2G} \right) dV$$

E, como vimos, no caso em tela, vale: $\tau(s) = \frac{T}{2A_m t(s)}$

Logo:
$$U^* = \iiint_V \frac{1}{2G} \left(\frac{T}{2A_m t(s)} \right)^2 dV = \frac{T^2}{8GA_m^2} \iint \left(\frac{1}{t(s)} \right)^2 t(s) ds dx$$

$$U^* = \frac{T^2 L}{8GA_m^2} \oint_0^{L_m} \frac{ds}{t(s)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Então, pelo Princípio do Trabalho e Energia (aplicado a este caso):

$$W = W^* = U^* = U$$

$$\frac{T\phi}{2} = \frac{T^2 L}{8GA_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t(s)} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{TL}{4GA_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t(s)}$$

Logo:

$$T = k_t \phi$$

$$k_t = \frac{GI_t}{L}$$

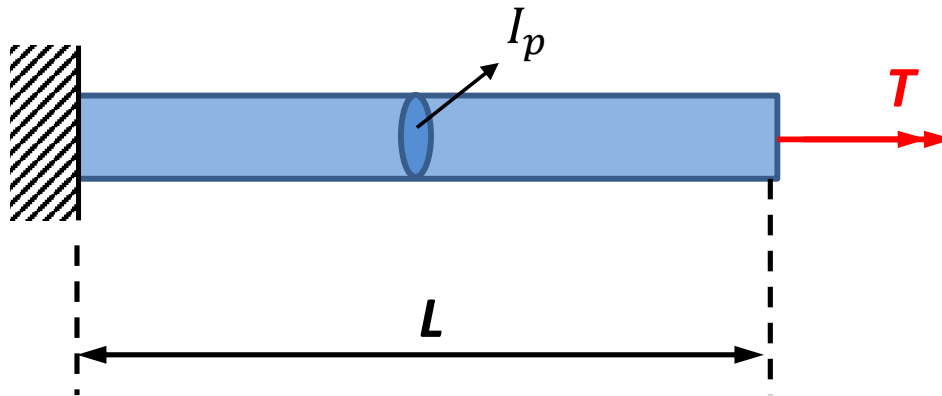
$$I_t = \frac{4A_m^2}{\int_0^{L_m} \frac{ds}{t(s)}}$$

Obs: Não confundir L com L_m , nem A_m com A !!



7. Exemplos de aplicação

Exemplo 1:



Dados:

$T, G, I_p, L.$

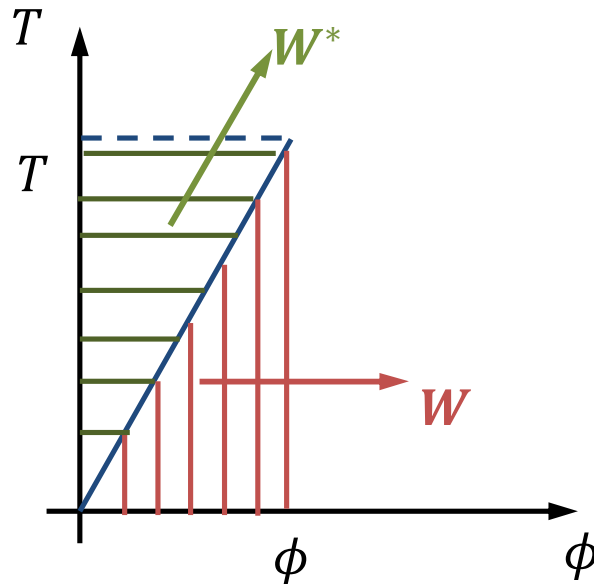
Pede-se:

$\phi = ? \quad k_t = ?$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:



Para estruturas com comportamento linear, vale:

$$W = W^* = \frac{T\phi}{2}$$

Por outro lado, a energia complementar para este caso fica simplesmente:

$$U^* = \int_0^L \frac{(T(x))^2}{2GI_p(x)} dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GI_p} dx = \frac{T^2 L}{2GI_p}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Desta forma, pelo Princípio do Trabalho e Energia:

$$W = W^* = U^* = U \quad \longleftrightarrow \quad \frac{T\phi}{2} = \frac{T^2 L}{2GI_p}$$

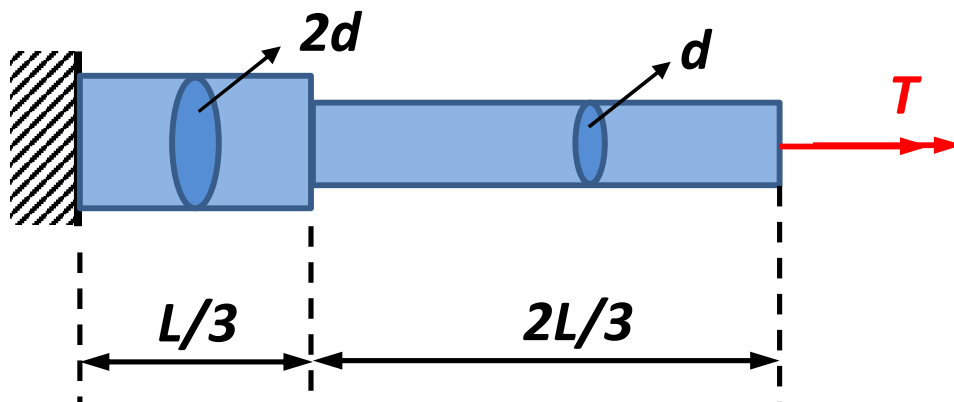
Logo: $\phi = \frac{TL}{GI_p} \quad \longleftrightarrow \quad T = \left(\frac{GI_p}{L}\right)\phi = k_t\phi$

Logo: $k_t = \frac{GI_p}{L}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo 2:



Dados:

$T, G, d, L.$

$$I_p = \pi d^4 / 32$$

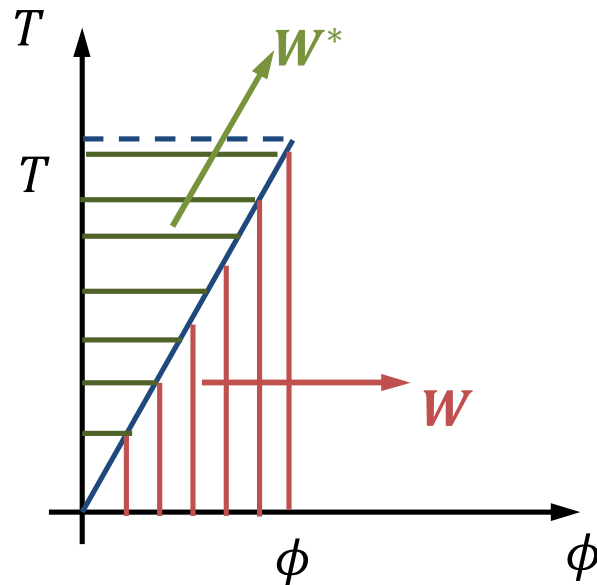
Pede-se:

$$\phi = ? \quad k_t = ?$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:



Para estruturas com comportamento linear, vale:

$$W = W^* = \frac{T\phi}{2}$$

Já a energia complementar para este caso fica dada por:

$$U^* = \int_0^{2L/3} \frac{(T_1(x))^2}{2GI_{p1}} dx + \int_0^{L/3} \frac{(T_2(x))^2}{2GI_{p2}} dx$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como: $T_1(x) = T_2(x) = T$ $I_{p1}(x) = I_p$ $I_{p2}(x) = 16I_p$

Teremos:

$$U^* = \int_0^{2L/3} \frac{T^2}{2GI_p} dx + \int_0^{L/3} \frac{T^2}{32GI_p} dx = \frac{T^2 L}{GI_p} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{96} \right) = \frac{11 T^2 L}{32 GI_p}$$

Desta forma, pelo Princípio do Trabalho e Energia:

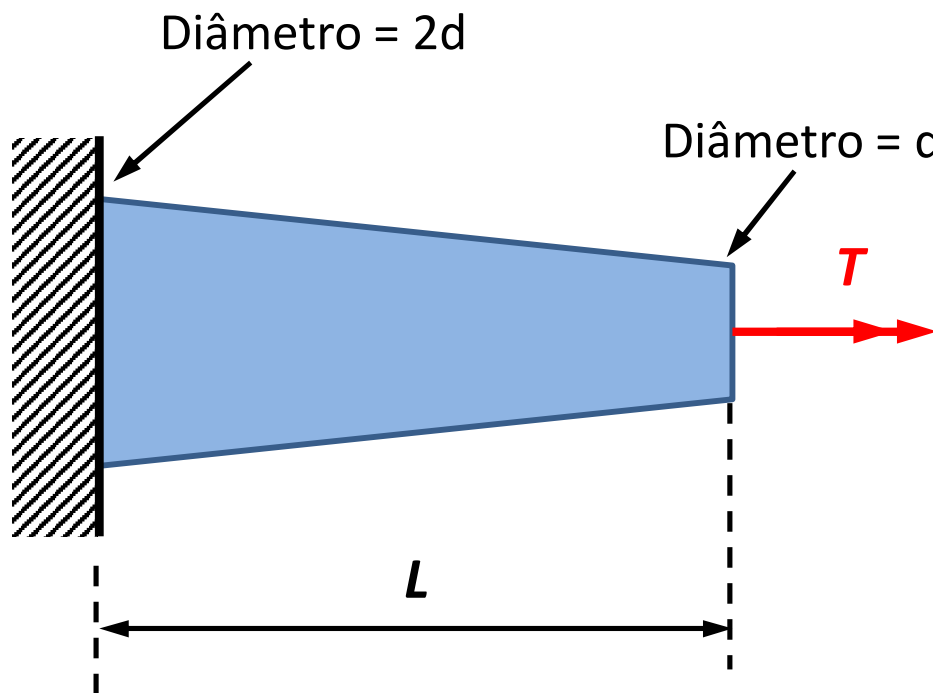
$$\frac{T\phi}{2} = \frac{11 T^2 L}{32 GI_p} \quad \longleftrightarrow \quad \phi = \frac{11 TL}{16 GI_p} \quad \longleftrightarrow \quad T = \left(\frac{16 GI_p}{11 L} \right) \phi = k_t \phi$$

Logo: $k_t = \frac{16 GI_p}{11 L}$ (aumento de 45,5% na rigidez, comparado ao Ex. 1)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo 3:



Dados:

$T, G, L, d.$

$$I_p = \pi d^4 / 32$$

Pede-se:

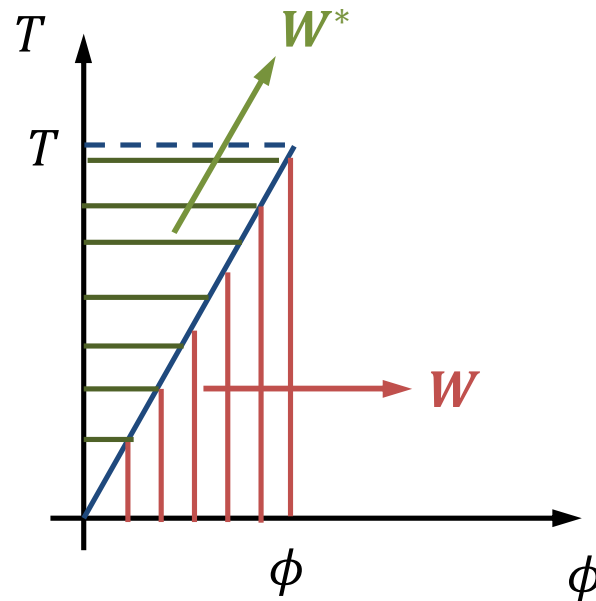
$$\phi = ?$$

$$k_t = ?$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:



Para estruturas com comportamento linear, vale:

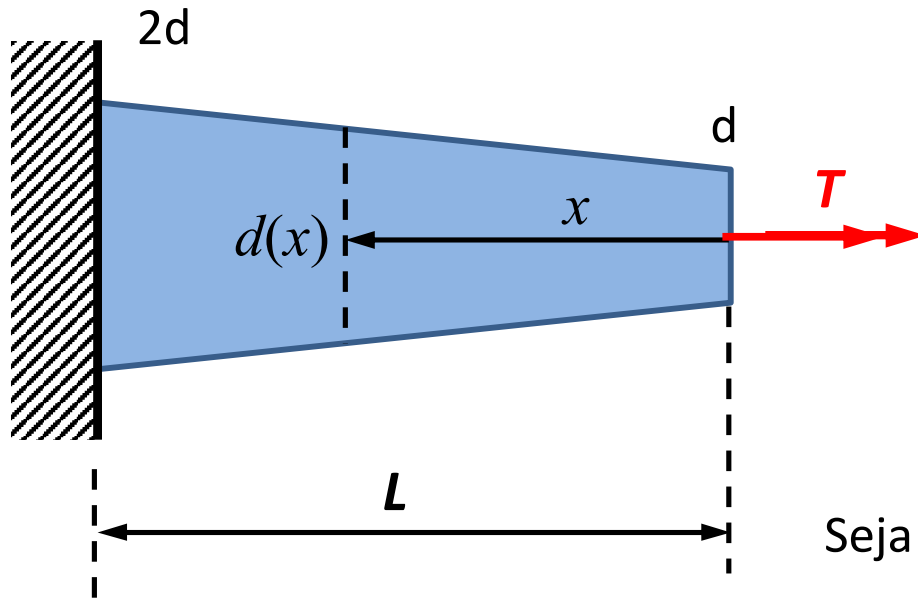
$$W = W^* = \frac{T\phi}{2}$$

A energia complementar para este caso fica dada por:

$$U^* = \int_0^L \frac{(T(x))^2}{2GI_p(x)} dx = \frac{T^2}{2G} \int_0^L \frac{1}{I_p(x)} dx$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$d(x) = d \left(1 + \frac{x}{L} \right)$$

$$I_p(x) = \frac{\pi}{32} (d(x))^4 = \frac{\pi d^4}{32} \left(1 + \frac{x}{L} \right)^4$$

Seja:
$$\left[\begin{array}{l} \eta = 1 + \frac{x}{L} \\ dx = L d\eta \end{array} \right.$$

Logo:
$$\int_0^L \frac{1}{I_p(x)} dx = \frac{32L}{\pi d^4} \int_1^2 \frac{d\eta}{\eta^4} = \frac{32L}{\pi d^4} \left(-\frac{1}{3\eta^3} \right) \Big|_1^2 = \frac{28L}{3\pi d^4}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$U^* = \frac{T^2}{2G} \int_0^L \frac{1}{I_p(x)} dx = \frac{T^2}{2G} \frac{28L}{3\pi d^4} = \frac{14}{3} \frac{T^2 L}{G\pi d^4} = \frac{7}{48} \frac{T^2 L}{GI_p}$$

Desta forma, pelo Princípio do Trabalho e Energia:

$$\frac{T\phi}{2} = \frac{7}{48} \frac{T^2 L}{GI_p} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi = \frac{7}{24} \frac{TL}{GI_p} \quad \Longleftrightarrow \quad T = \left(\frac{24}{7} \frac{GI_p}{L} \right) \phi = k_t \phi$$

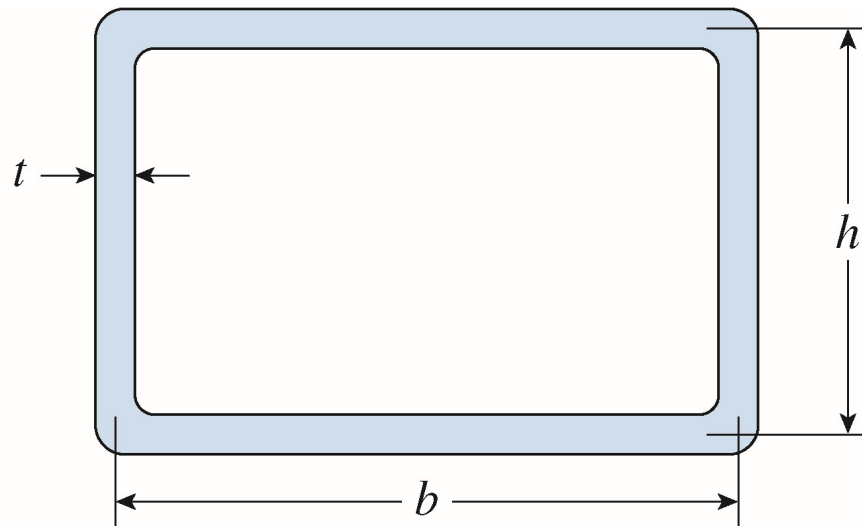
Logo: $k_t = \frac{24}{7} \frac{GI_p}{L}$ (aumento de 243% na rigidez, comparado ao Ex. 1)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.10-3. Um tubo de alumínio de paredes finas e seção transversal retangular tem dimensões (segundo a linha central) $b = 50$ mm e $h = 20$ mm. A espessura da parede é constante e igual a $t = 3$ mm.

- a) Determine a tensão de cisalhamento no tubo devida ao torque $T = 90$ N.m;
- b) Determine o ângulo de torção (em graus) se o comprimento do tubo é $L = 0,25$ m e o módulo de cisalhamento é $G = 26$ GPa.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução: $f = \tau(s)t(s) = \frac{T}{2A_m} \longleftrightarrow \tau = \frac{T}{2tA_m} = \frac{T}{2tbh}$

$$\tau = \frac{90000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{2 \times 3 \times 50 \times 20 \text{ mm}^3} = 15 \text{ MPa}$$

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\oint_0^{L_m} \frac{ds}{t(s)}} = \frac{4(bh)^2}{\frac{2(b+h)}{t}} = \frac{2(bh)^2 t}{b+h} = \frac{2 \times (50 \times 20)^2 \times 3}{50 + 20} \text{ mm}^4 = 85714 \text{ mm}^4$$

$$k_t = \frac{GI_t}{L} = \frac{26000 \times 85714}{250} \text{ Nmm} = 8914 \text{ Nm}$$

$$\phi = \frac{T}{k_t} = \frac{90}{8914} \cong 0,01 \text{ rad} \cong 0,578^\circ$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar, (2021), 105p.
- [2] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.3 (itens 3.9 e 3.10).