



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II*

*Aula #15*

*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

*07/10/2025*

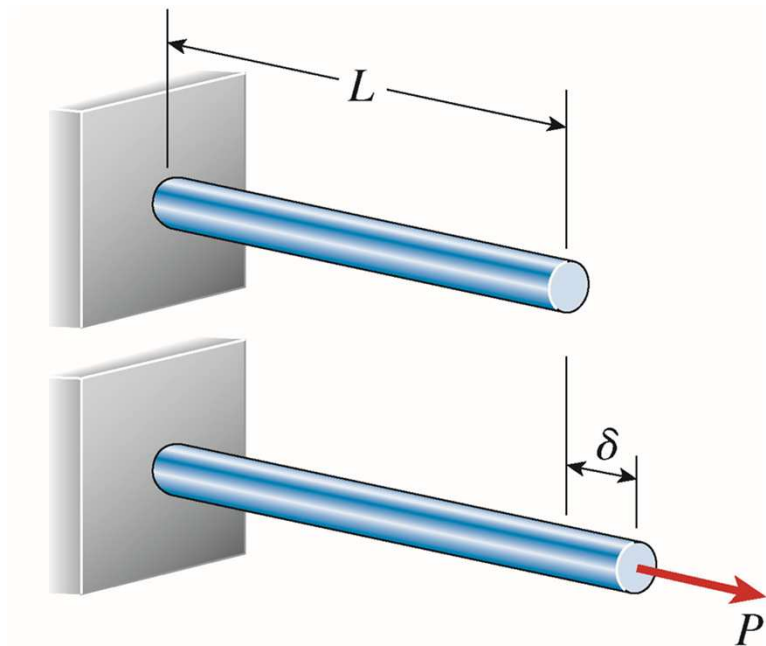


## Agenda:

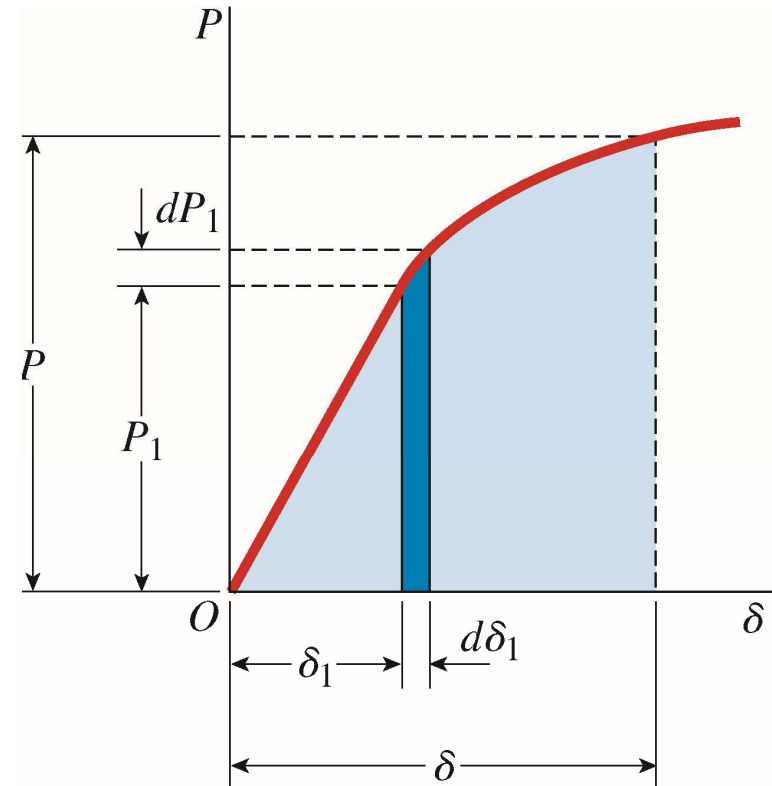
1. Trabalho de deformação ( $W$ ) e trabalho complementar ( $W^*$ ) na tração ou compressão de barras;
2. Energia de deformação ( $U$ ) e energia complementar ( $U^*$ );
3. Densidade de energia de deformação ( $u$ ) e densidade de energia complementar ( $u^*$ );
4. Expressão da energia complementar para barras submetidas a esforços de tração ou compressão;
5. Expressão da energia de deformação para barras submetidas a esforços de tração ou compressão;
6. Princípio do Trabalho e Energia;
7. Exemplos de aplicação.



## 1. Trabalho de deformação ( $W$ ) e trabalho complementar ( $W^*$ ) na tração ou compressão de barras



**FIG. 2-41** Prismatic bar subjected to a statically applied load



**FIG. 2-42** Load-displacement diagram



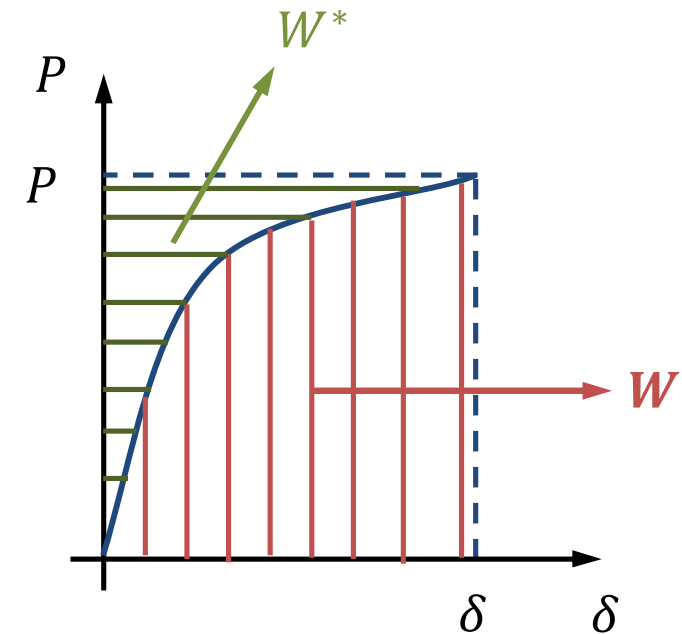
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Definimos o trabalho de deformação ( $W$ ) realizado pela força externa  $P$  por:

$$W = \int_0^{\delta} P d\delta$$

...e o trabalho complementar ( $W^*$ ) por:

$$W^* = \int_0^P \delta dP$$





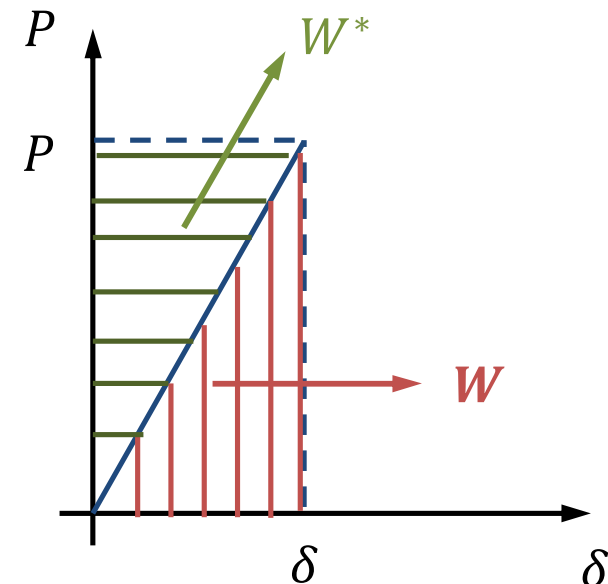
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

No caso particular em que a estrutura possui comportamento elástico-linear, a relação entre a força externa aplicada e o deslocamento de seu ponto de aplicação é dada por:

$$P = k\delta \quad \Longleftrightarrow \quad \delta = \frac{P}{k}$$

$$W = \int_0^{\delta} P d\delta = \int_0^{\delta} (k\delta) d\delta = \frac{k\delta^2}{2}$$

$$W^* = \int_0^P \delta dP = \int_0^P \left(\frac{P}{k}\right) dP = \frac{P^2}{2k}$$





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Ainda nesse caso (em que a estrutura possui comportamento elástico-linear), também é imediato perceber que os dois resultados são numericamente iguais:

$$W = \int_0^{\delta} P d\delta = \int_0^{\delta} (k\delta) d\delta = \frac{k\delta^2}{2} \quad \xrightarrow{P = k\delta} \quad W = \frac{P\delta}{2}$$



$$W^* = \int_0^P \delta dP = \int_0^{\delta} \left(\frac{P}{k}\right) dP = \frac{P^2}{2k} \quad \xrightarrow{\delta = \frac{P}{k}} \quad W^* = \frac{P\delta}{2}$$



## 2. Energia de deformação ( $U$ ) e energia complementar ( $U^*$ )

Ao contrário do trabalho complementar e do trabalho de deformação, que são definidos, respectivamente, a partir dos esforços externos aplicados à estrutura e dos deslocamentos relacionados aos pontos de aplicação destes esforços, a energia complementar e a energia de deformação serão definidas (como veremos) a partir dos esforços internos (tensões normais e cisalhantes) e das deformações (alongamentos e distorções) associadas. Considerando que sejam desprezíveis as dissipações de energia da estrutura (por atrito ou qualquer outra causa), podemos estabelecer que:

$$W = U$$

Ou seja, que o trabalho de deformação ( $W$ ), associado aos deslocamentos dos pontos de aplicação dos esforços externos, é numericamente igual à energia de deformação ( $U$ ) associada às deformações internas.



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Da mesma forma, também podemos estabelecer que:

$$W^* = U^*$$

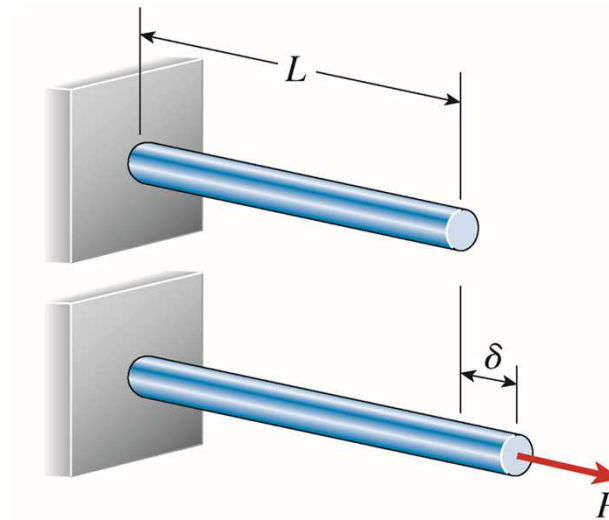
Ou seja, que o trabalho complementar ( $W^*$ ), associado aos esforços externos, é numericamente igual à energia complementar ( $U^*$ ) devida aos esforços internos (tensões) existentes na estrutura.

Como veremos adiante, estas duas quantidades de energia serão determinadas a partir das integrações (no volume) das densidades de energia associadas.



### 3. Densidade de energia de deformação ( $u$ ) e densidade de energia complementar ( $u^*$ )

Para introduzir os conceitos de energia de deformação e de energia complementar, consideremos novamente a barra prismática sob ação da força axial externa  $P$  como indicado na figura. Consideremos dados:  $P$ ,  $E$ ,  $A$  e  $L$ .



**FIG. 2-41** Prismatic bar subjected to a statically applied load



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Devemos notar que este caso é bastante particular, no sentido de termos um estado de tensões uniaxiais praticamente uniformes ao longo de toda a estrutura. Assim, em termos da tensão de engenharia:

$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

Tal estado de tensões leva a um estado de deformações longitudinais que também é praticamente uniforme ao longo de toda a estrutura, de tal forma que, se denotarmos por  $\delta$  o deslocamento do ponto de aplicação da força  $P$  (que coincide com a variação do comprimento da barra), podemos confundir o alongamento da barra com o alongamento das fibras dispostas na mesma direção do eixo central da barra, ou seja:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\delta}{L}$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Consideremos, agora, um sólido na sua configuração deformada e um certo volume  $\Delta V$  tomado na vizinhança de um dado ponto do sólido. Seja  $\Delta U$  a quantidade de energia de deformação armazenada nesta região (desde a configuração de referência até a configuração deformada). Definimos a densidade de energia de deformação ( $u$ ) como:

$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V}$$

De forma análoga, definimos a densidade de energia complementar ( $u^*$ ) como:

$$u^* = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U^*}{\Delta V}$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Para o caso particular em que os estados de tensão e de deformação são uniformes (ou seja, não variam de ponto para ponto do sólido), podemos considerar que estas razões  $\Delta U/\Delta V$  e  $\Delta U^*/\Delta V$  independem do volume considerado, sendo possível tomar todo o volume do sólido para o cálculo das densidades. Em outras palavras, estamos considerando que as densidades de energia locais são iguais às densidades médias. Assim:

$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{U}{V}$$

$$u^* = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U^*}{\Delta V} = \frac{U^*}{V}$$

Porém, lembrando que:

$$U = W = \int_0^{\delta} P d\delta$$

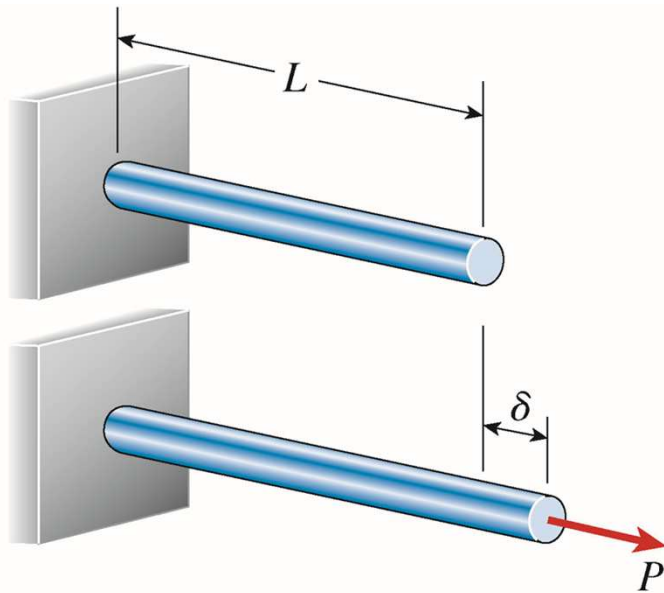
e

$$U^* = W^* = \int_0^P \delta dP$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Virá:  $u = \frac{U}{V} = \frac{1}{V} \int_0^\delta P d\delta$   $u^* = \frac{U^*}{V} = \frac{1}{V} \int_0^P \delta dP$



**FIG. 2-41** Prismatic bar subjected to a statically applied load

No caso em tela,  $V = AL$ , logo:

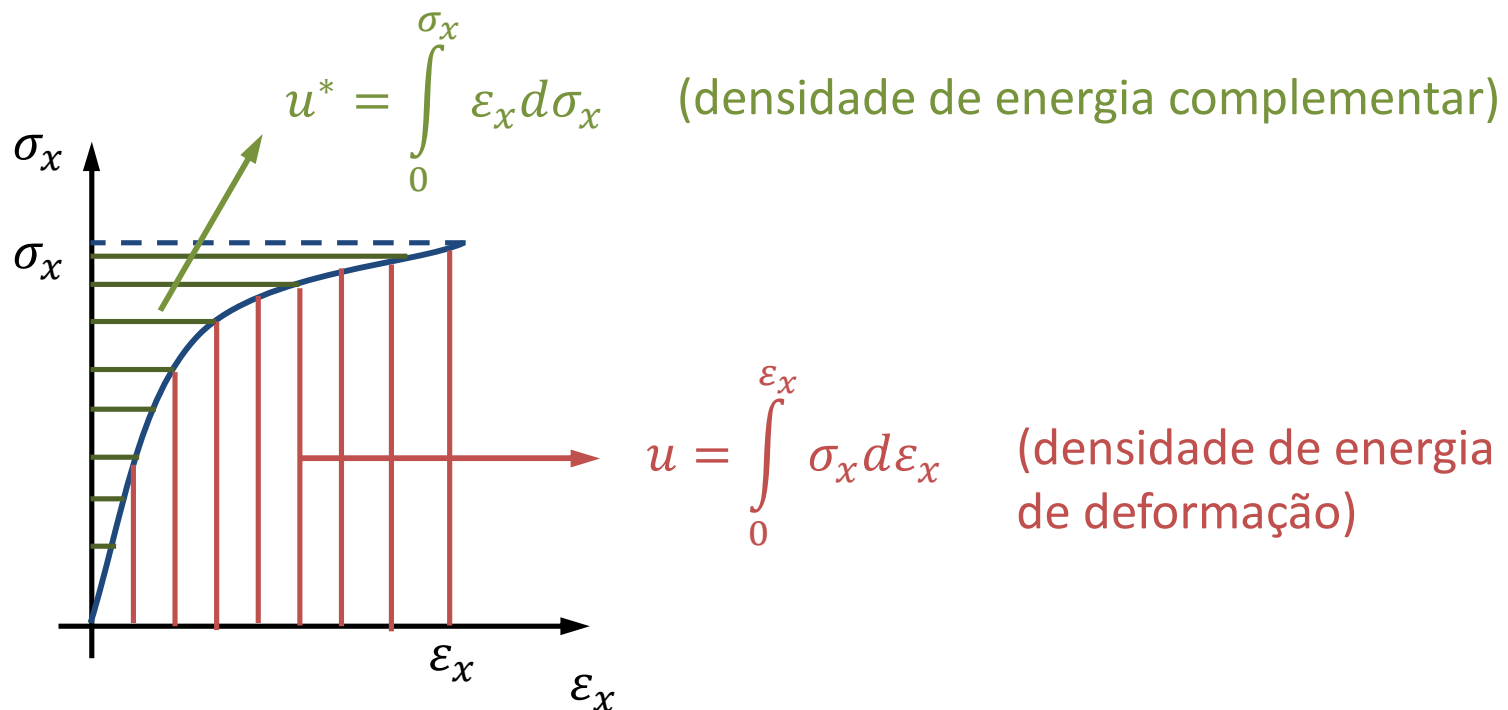
$$u = \frac{1}{AL} \int_0^\delta P d\delta = \int_0^\delta \frac{P}{A} \frac{d\delta}{L} = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x$$

$$u^* = \frac{1}{V} \int_0^P \delta dP = \int_0^P \frac{\delta}{L} \frac{dP}{A} = \int_0^{\sigma_x} \epsilon_x d\sigma_x$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Considerando a curva tensão  $\times$  deformação do material da barra na forma genérica (não linear):

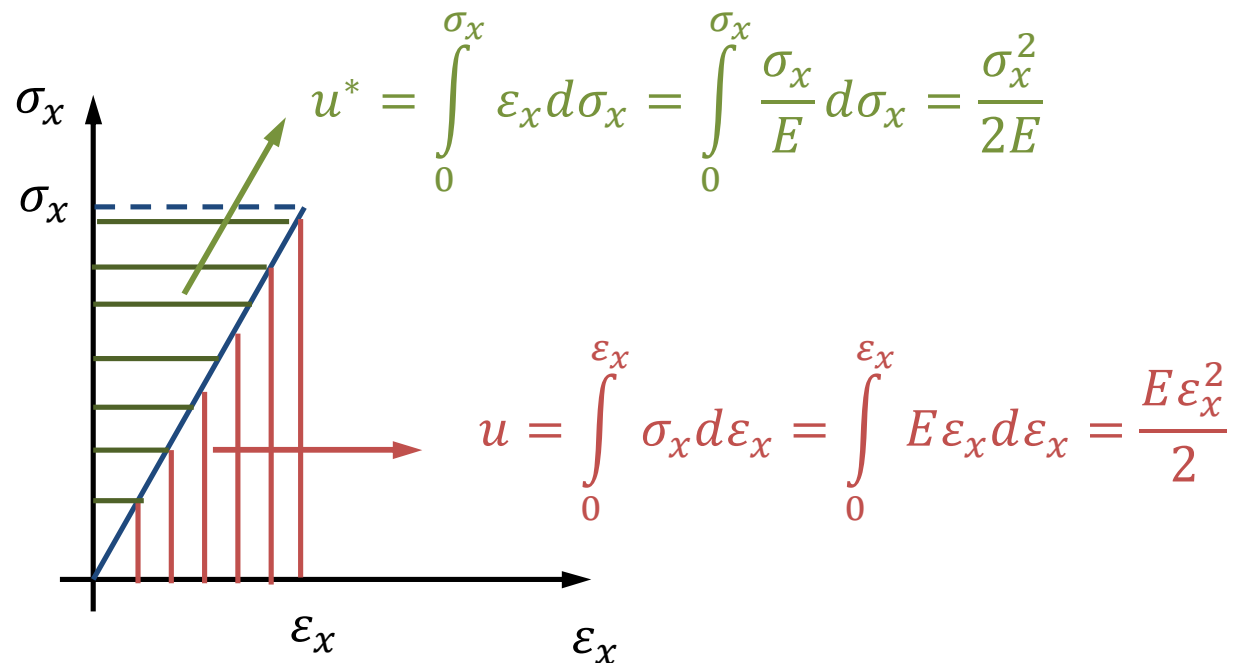




**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Para os casos em que o material da barra segue a Lei de Hooke, teremos (para o caso de estado uniaxial de tensão):

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad \longleftrightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Também neste caso é imediato verificar que:  $u = u^* = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2}$

Já, para estados de tensão mais complexos (mas ainda considerando o caso de material com comportamento elástico-linear e isótropo), a expressão das densidades de energia (de deformação ou complementar) ficam dadas por:

$$u = u^* = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2} + \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} + \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{2} + \frac{\tau_{zx} \gamma_{zx}}{2}$$

Considerando que o material seja isótropo, podemos facilmente determinar a expressão da energia complementar se utilizarmos as equações constitutivas na forma:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left( \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right)$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Além das relações:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Obtemos, assim, a seguinte expressão para a densidade de energia complementar:

$$u^* = \frac{1}{2E} \left[ (\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2 + (\sigma_z)^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) \right] + \\ + \frac{1}{2G} \left[ (\tau_{xy})^2 + (\tau_{yz})^2 + (\tau_{zx})^2 \right]$$

Procedendo de forma análoga, mas colocando as tensões em função das deformações, ou seja, utilizando as equações constitutivas na forma:



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

$$\sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

...obteremos a seguinte expressão para a densidade de energia de deformação:

$$u = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + G\left[(\varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_z)^2\right] + \frac{G}{2}\left[(\gamma_{xy})^2 + (\gamma_{yz})^2 + (\gamma_{zx})^2\right]$$

Porém as expressões acima não são válidas para casos mais gerais (em que a curva tensão × deformação do material não é linear).



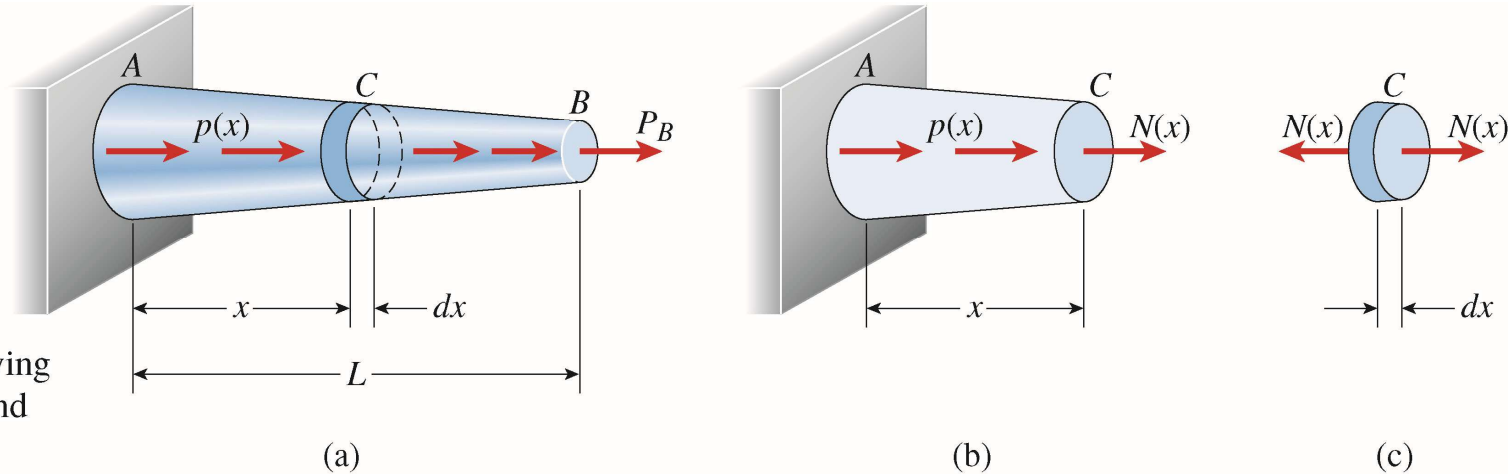
## 4. Expressão da energia complementar para barras submetidas a esforços de tração ou compressão

Nesta seção vamos determinar a expressão da energia complementar para barras submetidas a esforços de tração ou compressão. As seguintes hipóteses serão admitidas:

- O material da barra (em cada segmento analisado) é homogêneo, isótropo e possui comportamento elástico-linear;
- Condições de linearidade geométrica serão (geralmente) admitidas na solução dos problemas, de tal modo que os esforços solicitantes internos podem ser determinados simplesmente pela aplicação das equações de equilíbrio (para estruturas isostáticas) considerando que a configuração deformada e de referência são muito próximas;
- O carregamento é aplicado de forma quase-estática;
- No caso de barras com seções transversais variáveis, a variação da geometria ocorre de forma gradual (baixos ângulos de conicidade).



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



Para os casos em que a densidade de energia complementar varia ao longo da estrutura, a energia complementar total é obtida pela integração da densidade de energia complementar no volume da estrutura:

$$u^* = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U^*}{\Delta V} = \frac{dU^*}{dV} \quad \Rightarrow \quad U^* = \iiint_V u^* dV$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

No caso em tela, temos apenas tensões uniaxiais, causadas pelas forças normais  $N = N(x)$ , e dadas por:

$$\sigma_x \cong \frac{N(x)}{A(x)}$$

Logo (vide slide #15) :

$$u^* = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x d\sigma_x = \int_0^{\sigma_x} \frac{\sigma_x}{E} d\sigma_x = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{1}{2E} \frac{(N(x))^2}{(A(x))^2}$$

Como a densidade de energia complementar é (de forma aproximada) uma função apenas da coordenada  $x$ , teremos:



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

$$U^* = \iiint_V u^* dV = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{(N(x))^2}{(A(x))^2} \left( \iint_{A(x)} dA \right) dx$$

$$U^* = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{(N(x))^2}{(A(x))^2} A(x) dx \quad \Rightarrow \quad U^* = \int_0^L \frac{(N(x))^2}{2EA(x)} dx$$

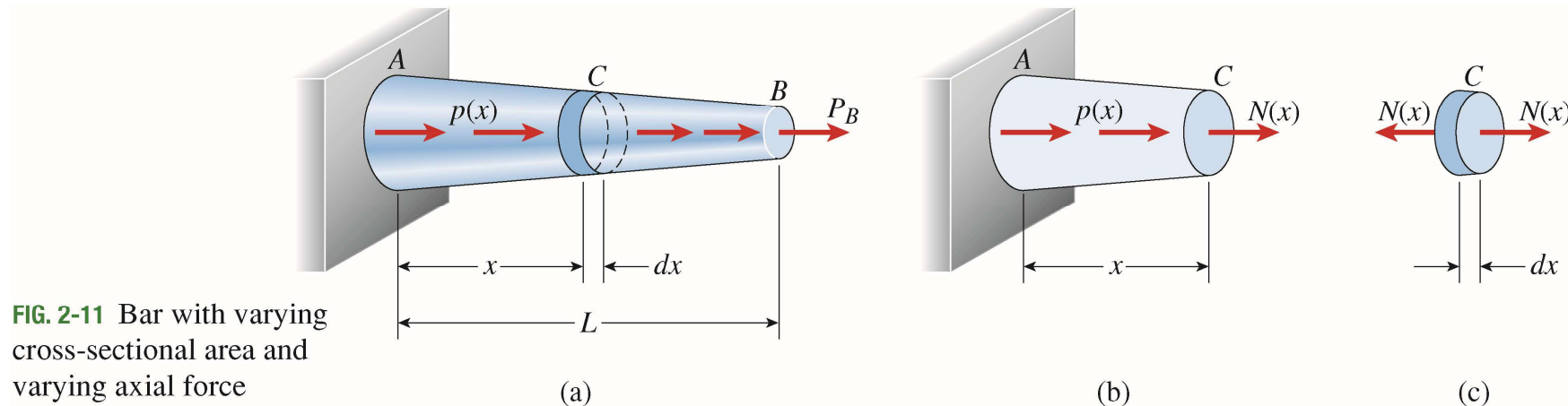
E, no caso em que a estrutura é formada por várias barras (ou por vários segmentos de barra), cada qual com um módulo de elasticidade  $E_i$ , com comprimento  $L_i$  e com uma variação de área  $A_i = A_i(x_i)$ , teremos:

$$U^* = \sum_{i=1}^n U_i^* = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{(N_i(x_i))^2}{2E_i A_i(x_i)} dx_i$$



## 5. Expressão da energia de deformação para barras submetidas a esforços de tração ou compressão

De forma análoga ao estudo apresentado no item anterior (baseando-nos nas mesmas hipóteses), podemos determinar também a expressão da energia de deformação de uma barra de seção variável submetida a carregamentos axiais que variam ao longo da barra como abaixo:





***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Como a densidade de energia de deformação varia ao longo da estrutura, a energia de deformação total deve ser obtida pela integração da densidade de energia de deformação:

$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{dU}{dV} \quad \Rightarrow \quad U = \iiint_V u dV$$

Mas, no caso em tela, teremos (vide slide #15):

$$u = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x = \int_0^{\varepsilon_x} E \varepsilon_x d\varepsilon_x = \frac{E \varepsilon_x^2}{2}$$

E os alongamentos axiais  $\varepsilon_x$  podem ser obtidos a partir da relação deformação-deslocamento linearizada dada por:



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Onde, na relação acima,  $u = u(x)$  é o campo de deslocamentos axiais dos pontos da barra (não o confunda com a densidade de energia de deformação). Assim, obtemos:

$$U = \iiint_V u dV = \iiint_V \left( \frac{E}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dV$$

$$U = \int_0^L \frac{E}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left( \iint_{A(x)} dA \right) dx \quad \Rightarrow \quad U = \int_0^L \frac{EA(x)}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

E, no caso em que a estrutura é formada por várias barras (ou por vários segmentos de barra), cada qual com um módulo de elasticidade  $E_i$ , com comprimento  $L_i$  e com uma variação de área  $A_i = A_i(x_i)$ , teremos:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{E_i A_i(x)}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i$$



## 6. Princípio do Trabalho e Energia

Como já comentado anteriormente, se desprezamos as dissipações de energia, podemos considerar que:

$$W = U \quad \text{e que} \quad W^* = U^*$$

E, se a estrutura possuir comportamento linear (o que significa que o material deve ter comportamento elástico-linear e que existam condições de linearidade geométrica), então também teremos:

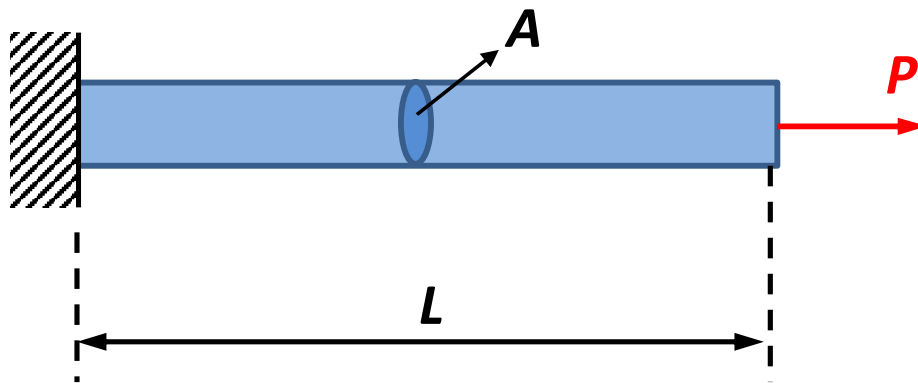
$$W = W^* = U^* = U$$

A igualdade acima pode, assim, ser utilizada para resolver problemas relativamente simples, como os que veremos a seguir.



## 7. Exemplos de aplicação

Exemplo 1:



Dados:

$P, E, A, L.$

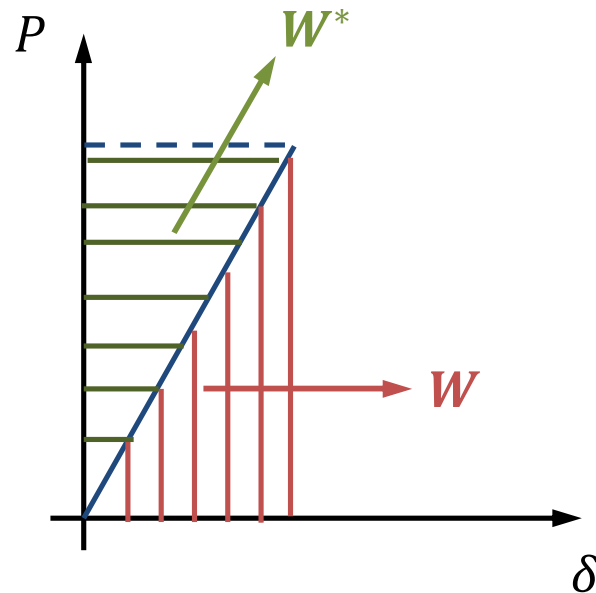
Pede-se:

$\delta = ? \quad k = ?$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Solução:



Para estruturas com comportamento linear, vale:

$$W = W^* = \frac{P\delta}{2}$$

Por outro lado, a energia complementar para este caso fica simplesmente:

$$U^* = \int_0^L \frac{(N(x))^2}{2EA(x)} dx = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx = \frac{P^2 L}{2EA}$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Desta forma, pelo Princípio do Trabalho e Energia:

$$W = W^* = U^* = U \quad \longleftrightarrow \quad \frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 L}{2EA}$$

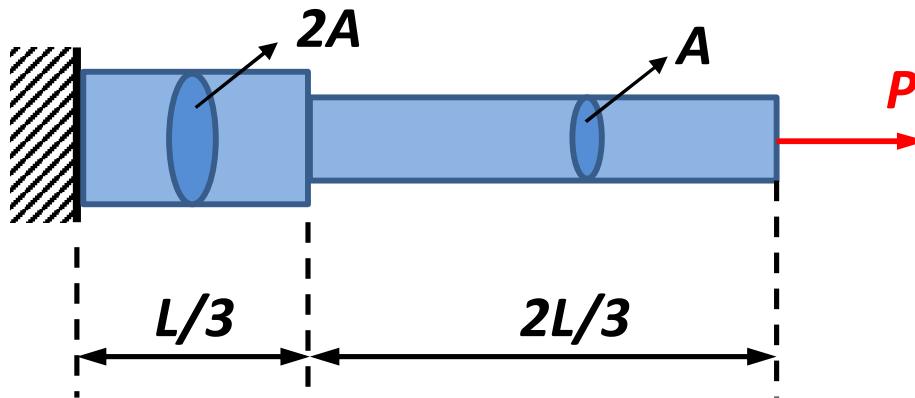
Logo:  $\delta = \frac{PL}{EA} \quad \longleftrightarrow \quad P = \left(\frac{EA}{L}\right)\delta = k\delta$

Logo:  $k = \frac{EA}{L}$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Exemplo 2:



Dados:

$P, E, A, L.$

Pede-se:

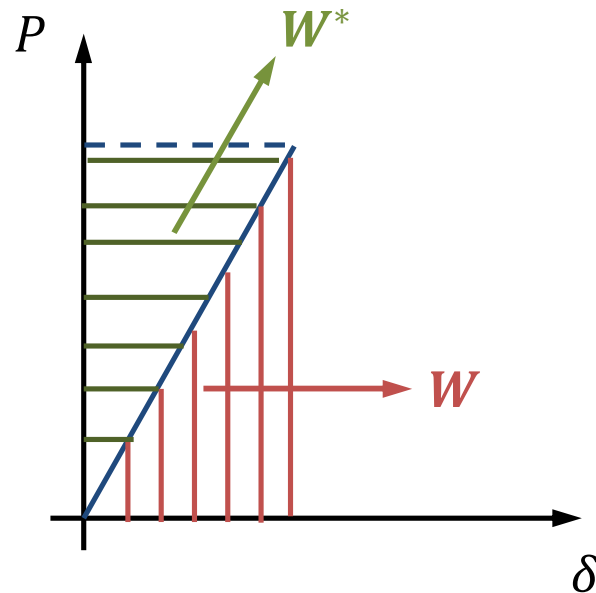
$\delta = ?$

$k = ?$



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

Solução:



Para estruturas com comportamento linear, vale:

$$W = W^* = \frac{P\delta}{2}$$

Já a energia complementar para este caso fica dada por:

$$U^* = \int_0^{2L/3} \frac{(N_1(x))^2}{2EA_1} dx + \int_0^{L/3} \frac{(N_2(x))^2}{2EA_2} dx$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Como:  $N_1(x) = N_2(x) = P$        $A_1(x) = A$        $A_2(x) = 2A$

Teremos:

$$U^* = \int_0^{2L/3} \frac{P^2}{2EA} dx + \int_0^{L/3} \frac{P^2}{4EA} dx = \frac{P^2 L}{EA} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) = \frac{5}{12} \frac{P^2 L}{EA}$$

Desta forma, pelo Princípio do Trabalho e Energia:

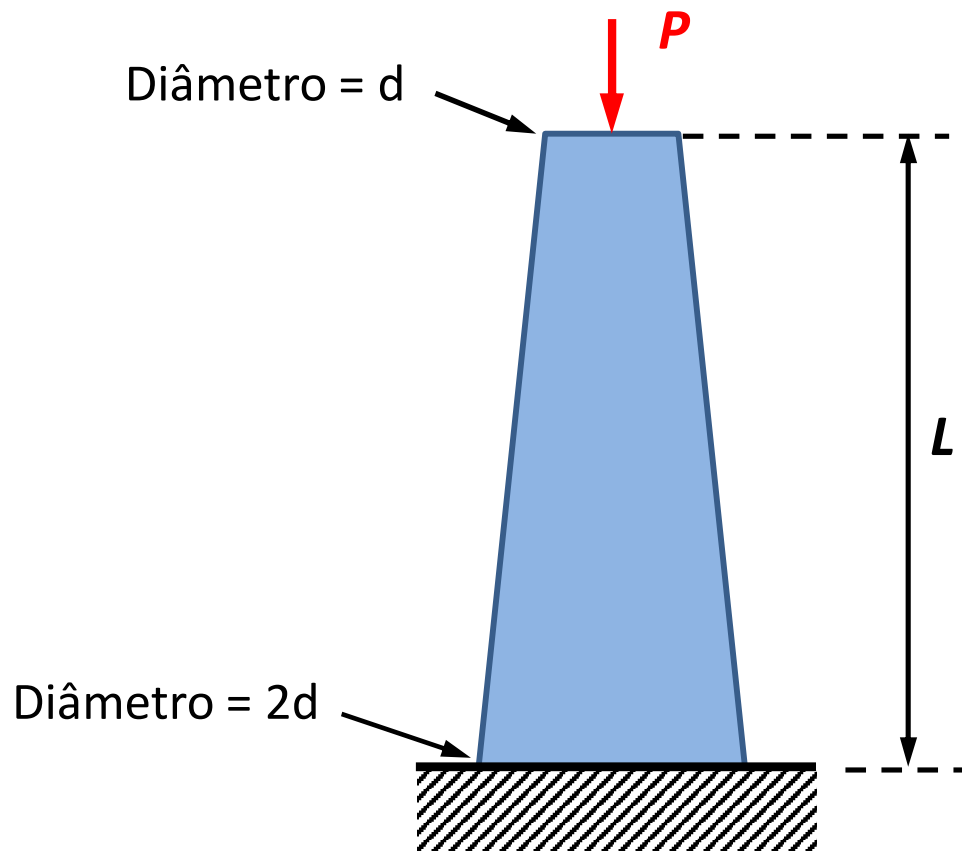
$$\frac{P\delta}{2} = \frac{5}{12} \frac{P^2 L}{EA} \quad \longleftrightarrow \quad \delta = \frac{5}{6} \frac{PL}{EA} \quad \longleftrightarrow \quad P = \left( \frac{6EA}{5L} \right) \delta = k\delta$$

Logo:  $k = \frac{6EA}{5L}$  (aumento de 20% na rigidez, comparado ao Ex. 1)



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

Exemplo 3:



Dados:

$P, E, L, d.$

Pede-se:

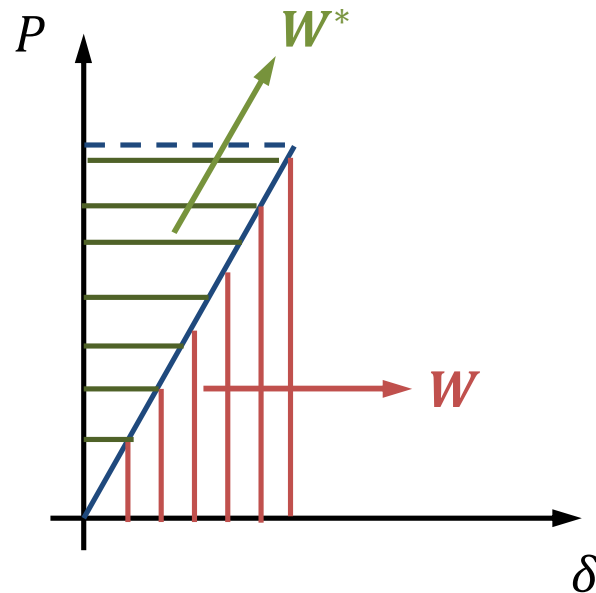
$\delta = ?$

$k = ?$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Solução:



Para estruturas com comportamento linear, vale:

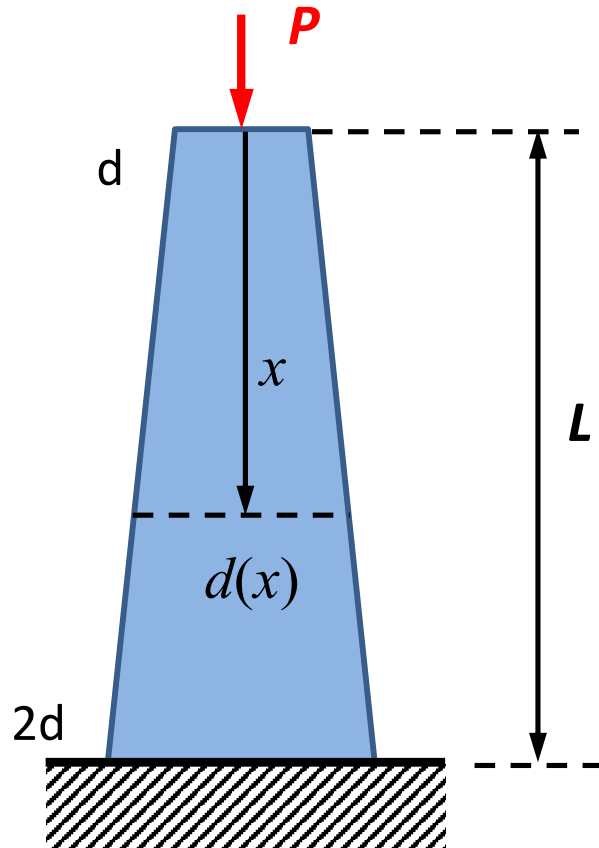
$$W = W^* = \frac{P\delta}{2}$$

A energia complementar para este caso fica dada por:

$$U^* = \int_0^L \frac{(N(x))^2}{2EA(x)} dx = \frac{P^2}{2E} \int_0^L \frac{1}{A(x)} dx$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



$$d(x) = d \left( 1 + \frac{x}{L} \right)$$

$$A(x) = \frac{\pi}{4} (d(x))^2 = \frac{\pi d^2}{4} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2$$

Seja: 
$$\left[ \begin{array}{l} \eta = 1 + \frac{x}{L} \\ dx = L d\eta \end{array} \right.$$

Logo: 
$$\int_0^L \frac{1}{A(x)} dx = \frac{4L}{\pi d^2} \int_1^2 \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{4L}{\pi d^2} \left( -\frac{1}{\eta} \right) \Big|_1^2$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

$$\int_0^L \frac{1}{A(x)} dx = \frac{4L}{\pi d^2} \left( -\frac{1}{\eta} \right) \Big|_1^2 = \frac{4L}{\pi d^2} \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{2L}{\pi d^2}$$

$$U^* = \frac{P^2}{2E} \int_0^L \frac{1}{A(x)} dx = \frac{P^2}{E} \frac{L}{\pi d^2}$$

Desta forma, pelo Princípio do Trabalho e Energia:

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2}{E} \frac{L}{\pi d^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta = 2 \frac{P}{E} \frac{L}{\pi d^2} \quad \Longleftrightarrow \quad P = \left( \frac{E\pi d^2}{2L} \right) \delta = k\delta$$

Logo:  $k = \frac{E\pi d^2}{2L}$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Referências:***

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar, (2021), 105p.
- [2] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.2 (item 2.7).