Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #14

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

01/10/2025

Agenda

1. Critério da máxima energia de distorção
2. Critério da máxima tensão normal
3. Fatores de segurança
4. Exemplos

1. Critério da máxima energia de distorção

- Segundo informações da Wikipedia [2]:

"...Although it has been believed it was formulated by James Clerk Maxwell in 1865, Maxwell only described the general conditions in a letter to William Thomson (Lord Kelvin). Richard Edler von Mises rigorously formulated it in 1913. Tytus Maksymilian Huber (1904), in a paper written in Polish, anticipated to some extent this criterion by properly relying on the distortion strain energy, not on the total strain energy as his predecessors. Heinrich Hencky formulated the same criterion as von Mises independently in 1924. For the above reasons this criterion is also referred to as the ***Maxwell–Huber–Hencky–von Mises theory****."*

- Fornece bons resultados para materiais com comportamento dúctil;
- Segundo esse critério, a falha é devida ao fato de a densidade de energia de distorção na vizinhança do ponto atingir um determinado valor limite (que também pode ser obtido com um simples ensaio como o ensaio de engenharia).

É possível verificar que a densidade de energia de distorção na vizinhança de um ponto é diretamente proporcional ao 2º invariante da componente antiesférica do tensor das tensões:

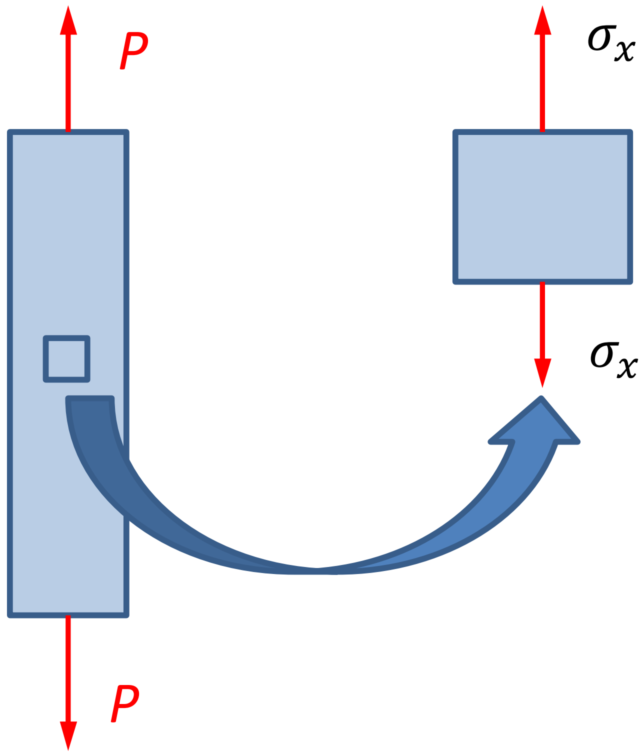
$$u_d = \frac{J_2}{2G}$$

Também é possível verificar que as tensões de cisalhamento que ocorrem nos planos octaédricos são proporcionais a $\sqrt{J_2}$, o que faz com que esse critério também seja conhecido como critério da máxima tensão de cisalhamento octaédrica.

Do exposto, o critério da máxima energia de distorção estabelece que a falha no material ocorre quando:

$$f(T,p) = \left(\sqrt{J_2}\right)_{p.cr.} - \left(\sqrt{J_2}\right)_{ensaio} = 0$$

Considerando o estado de tensão em um ponto de um corpo-de-prova em um ensaio de engenharia:



A "falha" ocorre quando:

$$\sigma_x = \sigma_e$$

E, sendo as tensões principais (no ensaio):

$$\sigma_1 = \sigma_e, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

Teremos (vide Aula #13, slide #15):

$$\left(\sqrt{J_2}\right)_{ensaio} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_e$$

Logo: $$f(T,p) = \left(\sqrt{J_2}\right)_{p.cr.} - \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_e = 0$$

Ou, de forma equivalente: $$\left(\sqrt{3J_2}\right)_{p.cr.} = \sigma_e$$

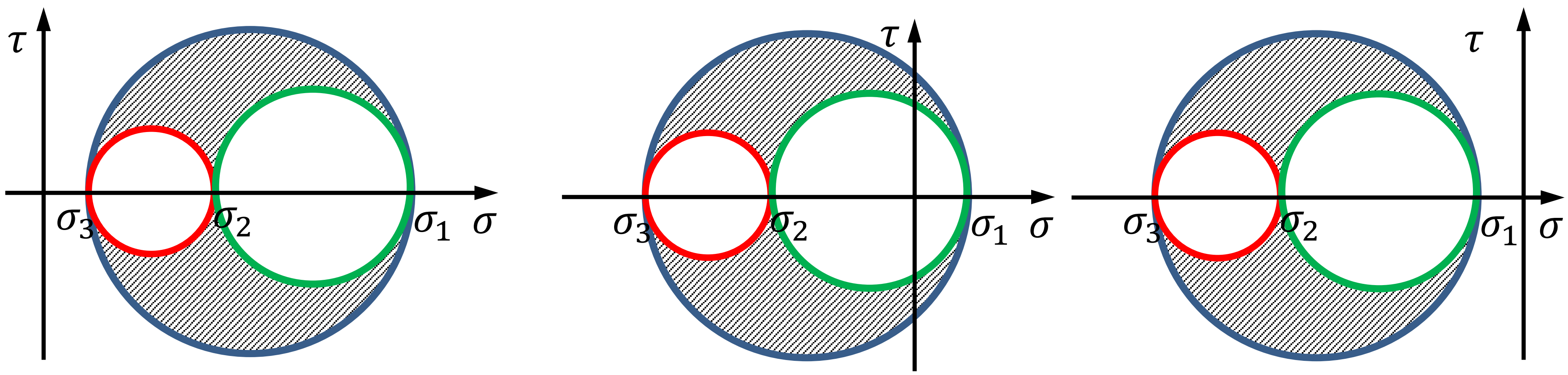
Assim, denominamos tensão equivalente de von Mises à tensão dada por:

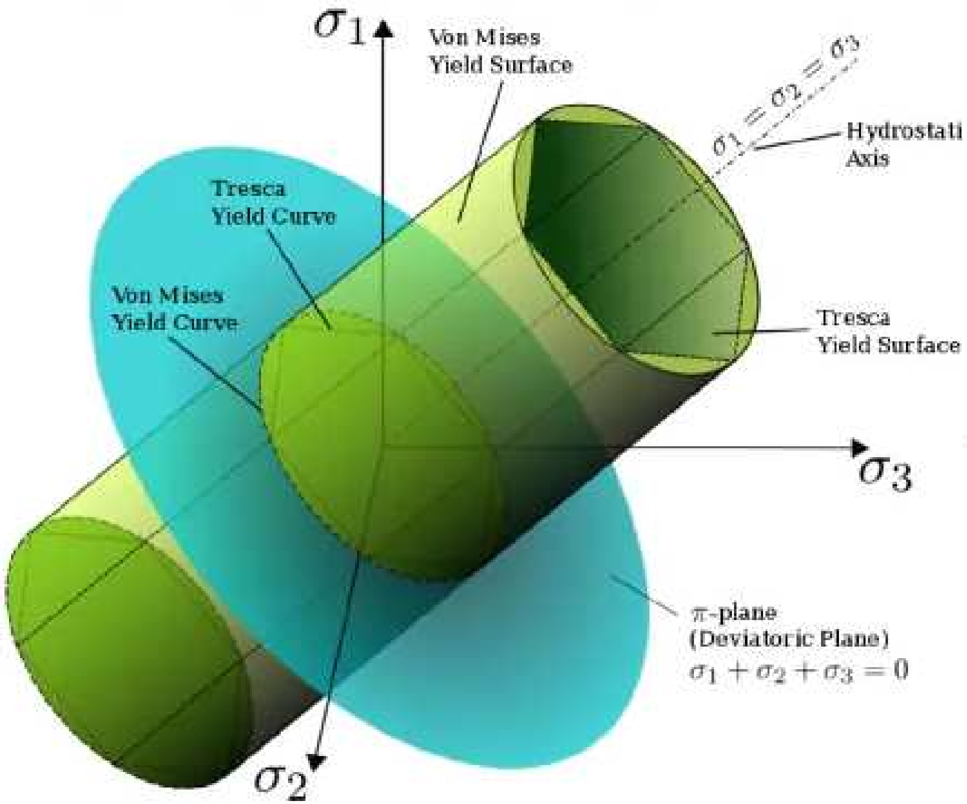
$$\sigma_{eq,vM} = \left(\sqrt{3J_2}\right)_{p.cr.}$$

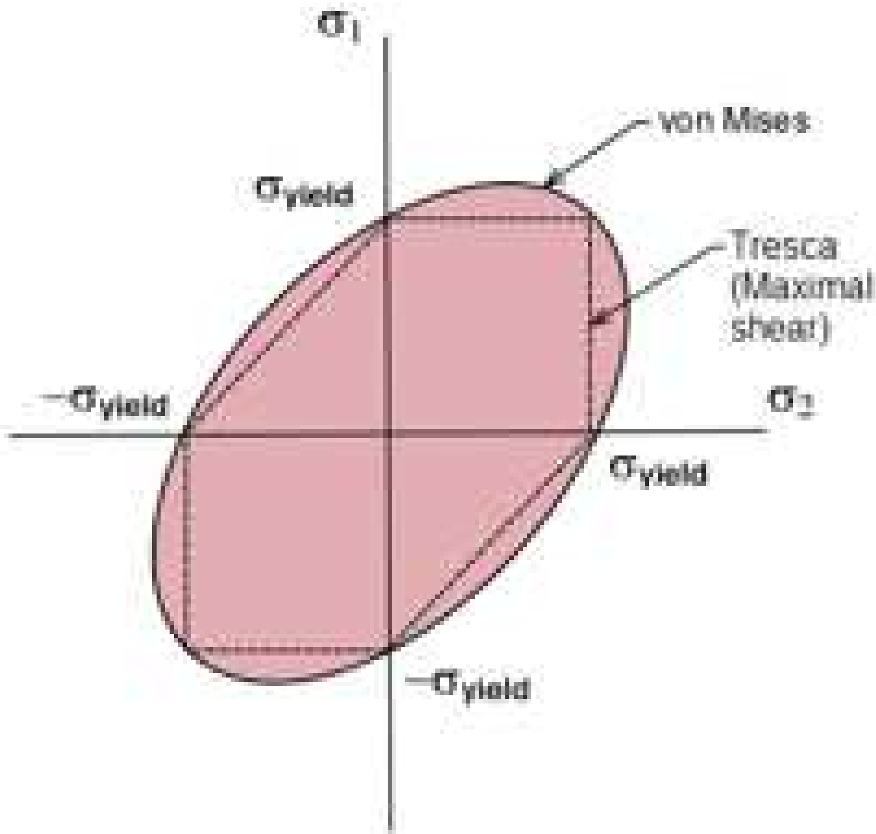
A falha ocorre, portanto, quando tivermos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2]}\right)_{p.cr.} = \sigma_e$$

Observação: Note que, sendo um critério baseado no invariante J_2 (2º invariante da componente antiesférica do tensor das tensões), o critério de von Mises também não depende da componente hidrostática do tensor das tensões:







Note que o critério de Tresca é um pouco mais conservador (está mais a favor da segurança) do que o critério de von Mises, pois indica que a falha ocorre com tensões que podem ser menores do que as que levariam à falha pelo critério de von Mises.

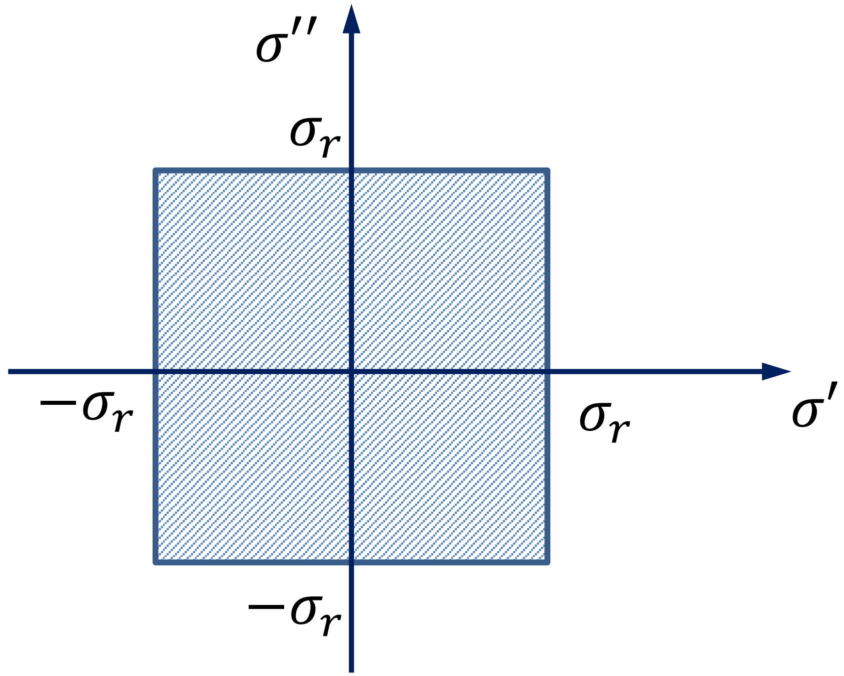
2. Critério da máxima tensão normal

- Critério proposto por William J. M. Rankine em 1857 para prever a falha em materiais litóides como rochas e concreto;
- Fornece bons resultados para materiais com comportamento frágil (ex: concreto, ferro fundido, vidro, porcelana, metais a baixas temperaturas, etc.;
- Considerando que os comportamentos à tração e à compressão do material sejam idênticos, a falha ocorre quando:

$$f(T,p) = máx\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\} - \sigma_r = 0$$

Onde σ_r representa a tensão de ruptura do material, obtida em um ensaio de engenharia.

Para o caso em que pelo menos uma das tensões principais é nula, o traço da superfície de resistência com o plano formado pelas duas outras tensões principais (não necessariamente nulas) fica:



3. Fatores de segurança

* Para qualquer critério: $$FS = \frac{\left(\sigma_{eq}\right)_{ensaio}}{\left(\sigma_{eq}\right)_{p.cr.}}$$

* Para o critério de Tresca:

$$FS = \frac{(\tau_{máx})_{ensaio}}{(\tau_{máx})_{p.cr.}} = \frac{\sigma_e/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = \frac{\sigma_e}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{p.cr.}}$$

* Para o critério de von Mises:

$$FS = \frac{\left(\sqrt{J_2}\right)_{ensaio}}{\left(\sqrt{J_2}\right)_{p.cr.}} = \frac{\sigma_e}{(\sigma_{eq,vM})_{p.cr.}}$$

* Para o critério de Rankine:

$$FS = \frac{\sigma_r}{máx\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\}_{p.cr.}}$$

4. Exemplos

1. As tensões principais no ponto crítico de uma estrutura metálica utilizada em condições normais de temperatura são:

σ_1 = 120 MPa, σ_2 = 0 MPa, σ_3 = -50 MPa

Sabendo que a tensão de escoamento do material é σ_e = 250 MPa, determine o fatores de segurança utilizando:
a) o critério de Tresca;
b) o critério de von Mises.

a) Pelo critério de Tresca:

$$FS = \frac{(\tau_{máx})_{ensaio}}{(\tau_{máx})_{p.cr.}} = \frac{\sigma_e/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = \frac{\sigma_e}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{p.cr.}}$$

Logo: $$FS = \frac{250}{120 - (-50)} = \frac{250}{170} \cong 1{,}47$$

b) Pelo critério de von Mises:

$$FS = \frac{\left(\sqrt{J_2}\right)_{ensaio}}{\left(\sqrt{J_2}\right)_{p.cr.}} = \frac{\sigma_e}{(\sigma_{eq,vM})_{p.cr.}} = \frac{\sigma_e}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}}$$

Logo: $$FS = \frac{250}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{[(120)^2 + (50)^2 + (170)^2]}} \cong \frac{250}{151{,}33} \cong 1{,}65$$

2. As tensões principais no ponto crítico de uma estrutura que possui comportamento frágil são:

σ_1 = 80 MPa, σ_2 = 0 MPa, σ_3 = -60 MPa

Sabendo que a resistência característica do material é σ_r = 100 MPa, determine o fator de segurança utilizando o critério de Rankine.

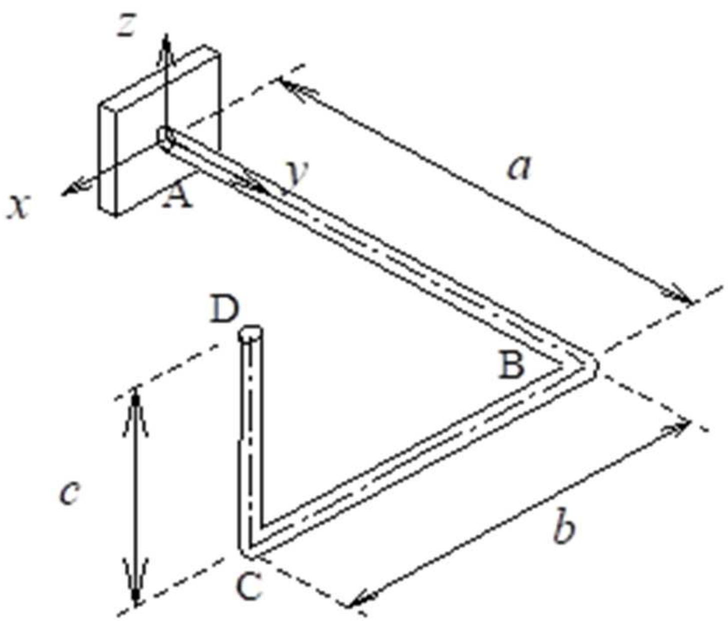
Solução:

Pelo critério de Rankine:

$$FS = \frac{\sigma_r}{máx\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\}_{p.cr.}} = \frac{100}{máx\{80,\ 60\}} = \frac{100}{80} = 1{,}25$$

3. Um extensômetro colado sobre a superfície de um eixo circular de diâmetro d será utilizado para o controle de um determinado dispositivo que deverá ser acionado quando a magnitude do binário (M_0) aplicado à seção D atingir um determinado valor. Considerando que o extensômetro será colado sobre o ponto de coordenadas P = (0; $a/2$; $d/2$), ou seja, a meio comprimento do trecho AB, na parte superior (dorsal) do eixo, e que o binário aplicado em D é dado por: $\vec{M}_0 = \left(\sqrt{3}/3\,,\sqrt{3}/3\,,\sqrt{3}/3\right)M_0$, determine:

a) a melhor orientação que deve ser dada ao extensômetro para que a leitura, em módulo, seja a maior possível (mostre esquematicamente como será esta orientação);
b) a leitura registrada pelo extensômetro nesta situação (expresse o resultado em termos de M_0, d, E e ν).



4. Considere que a estrutura do problema anterior tenha comportamento dúctil e que a tensão de início de escoamento do material seja σ_e . Sejam dados também: M_0, a , b, e c. Determine:

a) o diâmetro mínimo necessário para que o fator de segurança com relação ao início de escoamento no material seja F.S. = *k* pelo critério de Tresca;

b) idem ao item anterior, utilizando o critério de von Mises;

c) considerando que o material venha a ser substituído por outro de comportamento frágil cujo limite de resistência à tração seja f_t, determine, pelo critério de Rankine, o diâmetro mínimo para que o coeficiente de segurança com relação à fratura seja F.S. = *k*.

Referências:

[1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Tensões, (2020), 66p.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Mises_yield_criterion

[3] Popov, E.P. Engineering Mechanics of Solids, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1998, 864p.

[4] Hibbeler, R.C. Mechanics of Materials, 8th ed., Ed. Pearson, 2011, 888p.