



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #13

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

30/09/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda

1. Introdução: Critérios de Resistência
2. Componentes esférica e antiesférica do tensor das tensões
3. Espaço das tensões principais
4. Critério da máxima tensão de cisalhamento



1. Introdução: Critérios de Resistência

Objetivo: o objetivo de um critério de segurança é verificar se um dado estado tensional é, ou não, aceitável para um determinado material utilizado na fabricação (ou construção) de uma dada estrutura.

Desta forma, os critérios de resistência são sempre binários no que tange a verificação de uma possível falha, devendo dizer se determinado ponto da estrutura atende, ou não, ao critério de resistência utilizado.

Verifica-se de plano que um critério de resistência está intrinsecamente ligado a uma “falha” do material, que deve ser entendida como uma condição não desejada. Este conceito pode ser, naturalmente, extrapolado dando origem a outros critérios que poderiam ser empregados para verificar a adequação de determinado material nas condições de operação do componente (exemplo: deformações excessivas, variação de suas propriedades físicas, fadiga do material, nucleação de trincas, etc.).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como o próprio nome sugere, os critérios de resistência têm como ponto central a verificação da resistência do material. Em geral, um critério de resistência pode sempre ser colocado na forma:

$$f(T, p) = 0$$

Onde T representa o tensor das tensões em um dado ponto da estrutura, e p representa alguma propriedade do material que atesta sua resistência nas condições de operação do componente (ex: temperatura, ambiente, etc.). Para materiais com comportamento dúctil, a “falha” está geralmente associada ao início do escoamento no ponto mais solicitado, e, nesse caso, a propriedade utilizada para atestar a resistência do material é a tensão de início de escoamento.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

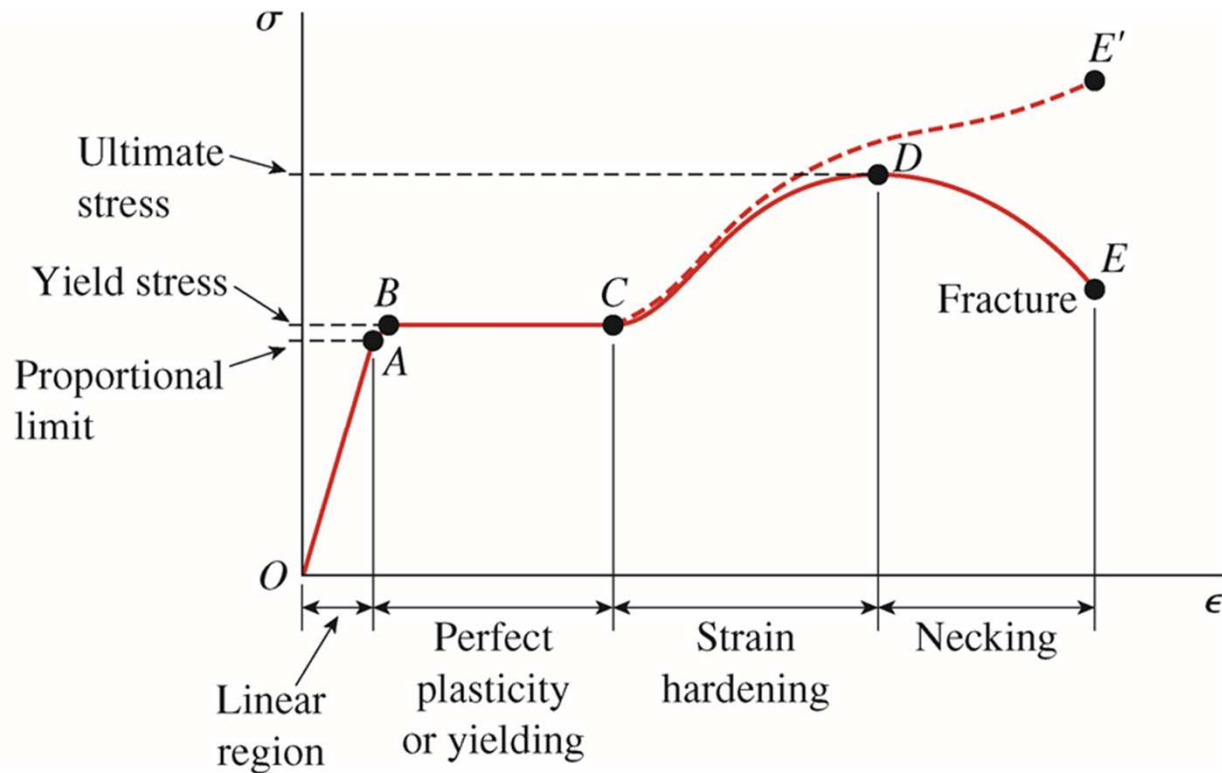


FIG. 1-10 Stress-strain diagram for a typical structural steel in tension (not to scale)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Já para materiais com comportamento frágil, a “falha” está associada à ruptura do material , e a propriedade utilizada para atestar sua resistência pode ser sua tensão de ruptura (ou, de forma mais segura, a tensão limite de proporcionalidade).

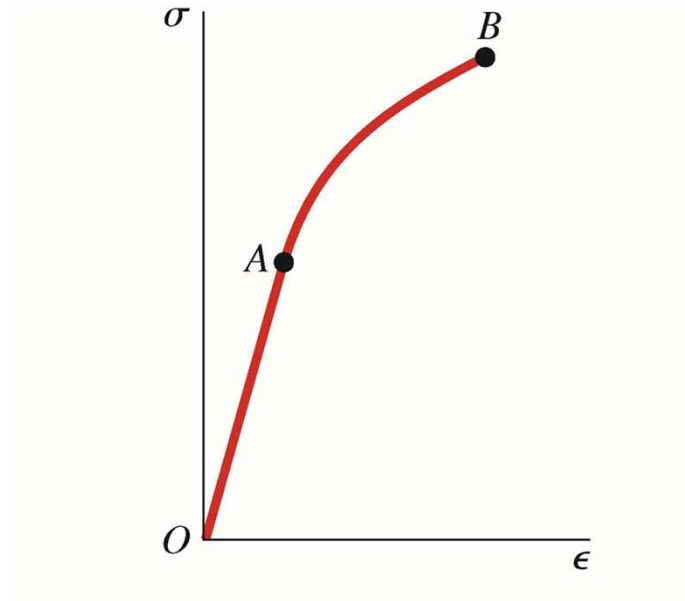
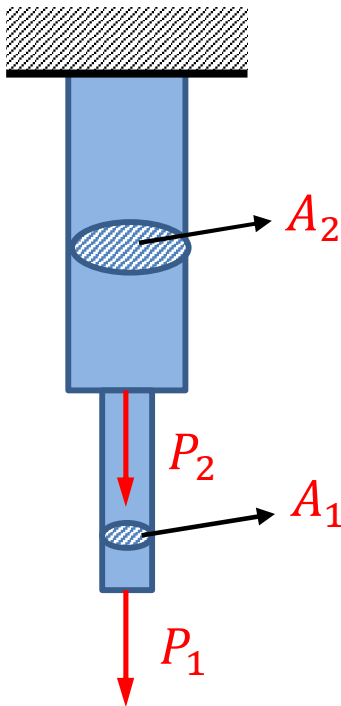


FIG. 1-16 Typical stress-strain diagram for a brittle material showing the proportional limit (point *A*) and fracture stress (point *B*)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para estados de tensão simples (como os estados de tensão uniaxial), a aplicação de um critério de resistência é, sem dúvida, algo que passa despercebido já que, nesses casos, basta comparar a tensão no ponto crítico da estrutura com a tensão que leva à falha, como ilustrado abaixo:



$$\sigma_{cr} = \max \left\{ \frac{P_1}{A_1}, \frac{(P_1 + P_2)}{A_2} \right\}$$

$$\sigma_{adm} = \sigma_e \text{ (por exemplo)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim, a falha (associada ao início de escoamento no ponto mais crítico) ocorre quando alcançamos a situação limite:

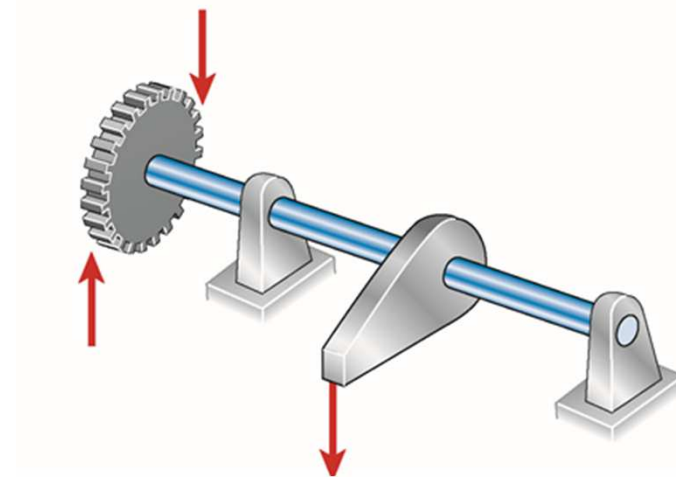
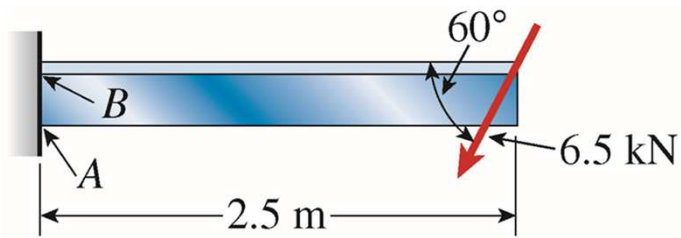
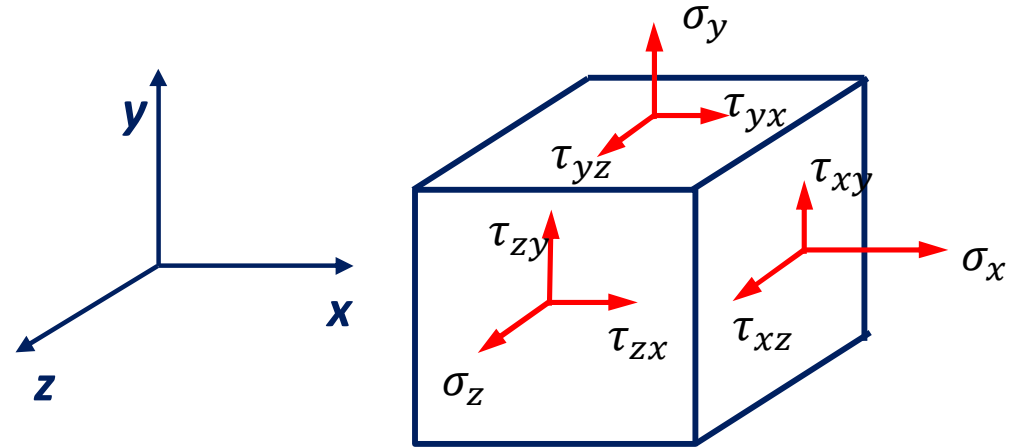
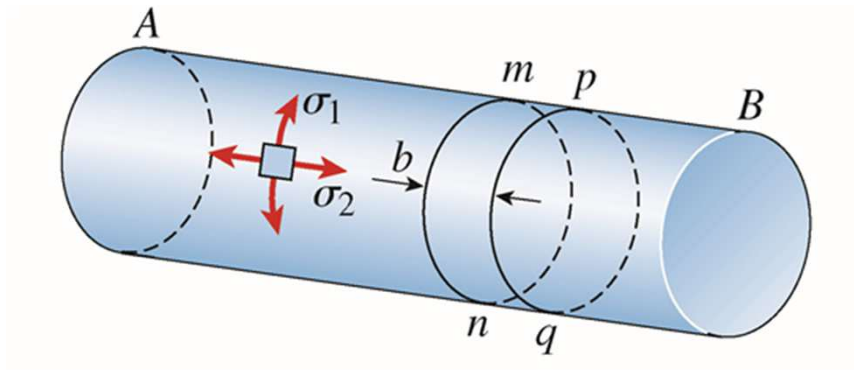
$$\sigma_{cr} - \sigma_{adm} = 0$$

$$\max \left\{ \frac{P_1}{A_1}, \frac{(P_1 + P_2)}{A_2} \right\} - \sigma_e = 0 \quad \boxed{f(T, p) = 0}$$

Porém, a análise não é tão simples quando o estado tensional é mais complexo, envolvendo várias componentes do tensor das tensões, como nos exemplos a seguir:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





2. Componentes esférica (hidrostática) e antiesférica (desviante) do tensor das tensões

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_x & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_y & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_z \end{bmatrix}$$

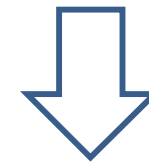
Onde:

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3} = \frac{I_1}{3}$$



$[T]_{e,b}$

(componente esférica,
ou hidrostática, do
tensor das tensões)



$[T]_{a,b}$

(componente antiesférica,
ou desviante, do tensor
das tensões)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como vimos na Aula #05, denominando $[T]_b$ e $[T]_{b'}$, as matrizes do tensor das tensões, de um mesmo ponto de um sólido, em duas bases ortonormais distintas, a transformação de tensão leva a:

$$[T]_{b'} = [M]^t [T]_b [M]$$

Logo:

$$\begin{aligned} [T]_{b'} &= [M]^t ([T]_{e,b} + [T]_{a,b}) [M] = \\ &= [M]^t [T]_{e,b} [M] + [M]^t [T]_{a,b} [M] = \\ &= [T]_{e,b'} + [T]_{a,b'} \end{aligned}$$

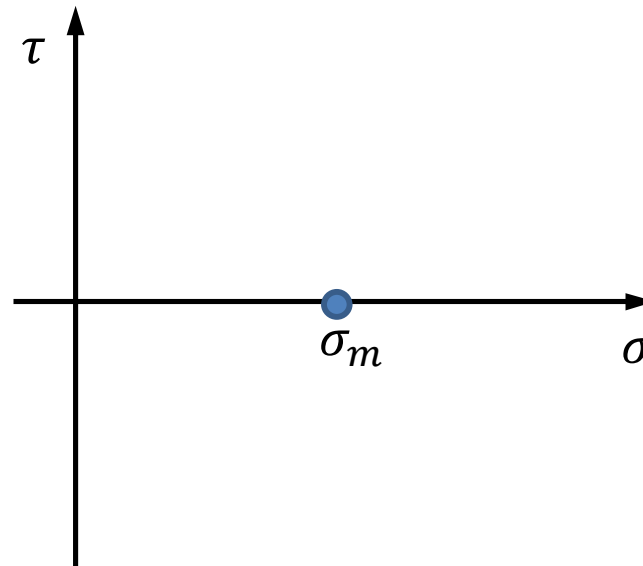
É imediato observar que a componente esférica (hidrostática) do tensor das tensões é escrita da mesma forma em qualquer base ortonormal (ou seja, tal componente independe da base). Note:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\begin{aligned}[T]_{e,b'} &= [M]^t [T]_{e,b} [M] = \sigma_m [M]^t [I] [M] = \\ &= \sigma_m [M]^t [M] = \sigma_m [I] = [T]_{e,b}\end{aligned}$$

As tensões principais da componente esférica do tensor das tensões são naturalmente todas iguais a σ_m e os círculos de Mohr das tensões desta componente do tensor das tensões são reduzidos a um único ponto:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Já a componente antiesférica do tensor fica dada por (conforme definição):

$$[T]_{a,b} = \begin{bmatrix} S_x & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_y & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

É possível determinar as tensões principais (s_i) da componente antiesférica do tensor das tensões (como um tensor qualquer) por meio da relação:

$$[T]_a \{\vec{n}\} = s \{\vec{n}\} \Leftrightarrow ([T]_a - s[I])\{\vec{n}\} = \{\vec{0}\}$$

$$\begin{bmatrix} S_x - s & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_y - s & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_z - s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para que haja soluções diferentes da solução trivial, devemos ter:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\det \begin{bmatrix} s_x - s & s_{yx} & s_{zx} \\ s_{xy} & s_y - s & s_{zy} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_z - s \end{bmatrix} = 0 \iff s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0$$

Onde:

$$J_1 = \text{tr}([T]_a) = s_x + s_y + s_z = (\sigma_x - \sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m) = \\ = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_m = 0$$

$$J_2 = - \left\| \begin{array}{cc} s_y & s_{zy} \\ s_{yz} & s_z \end{array} \right\| - \left\| \begin{array}{cc} s_x & s_{zx} \\ s_{xz} & s_z \end{array} \right\| - \left\| \begin{array}{cc} s_x & s_{yx} \\ s_{xy} & s_y \end{array} \right\| = \\ = -s_x s_y - s_y s_z - s_z s_x + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2$$

$$J_3 = \det([T]_a)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

É possível demonstrar que o invariante J_2 também pode ser expresso nas seguintes formas alternativas:

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

$$J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2$$



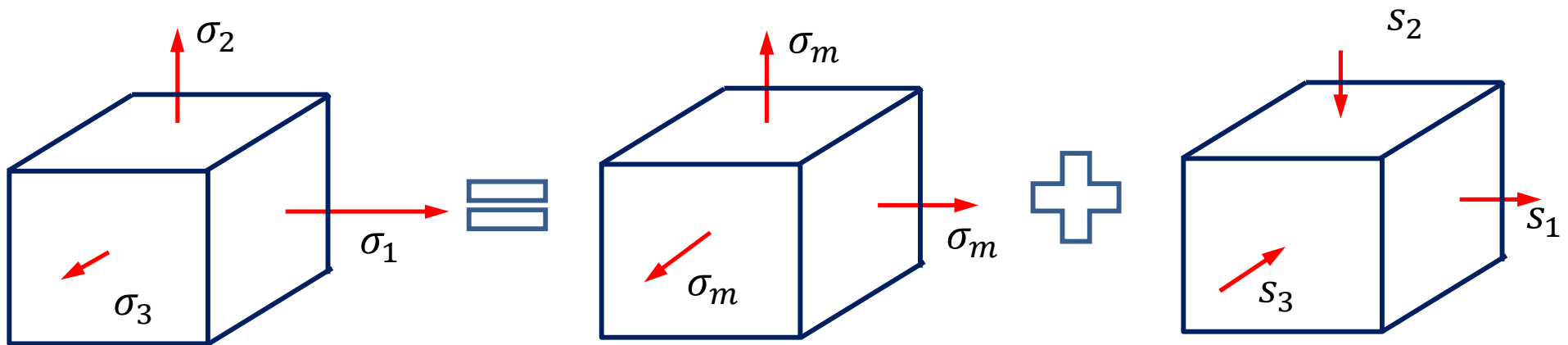
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Relação entre as tensões principais de $[T]$ e de $[T]_a$:

Como: $[T]_b = [T]_{e,b} + [T]_{a,b}$

Então, na base formada pelas direções principais de tensão:

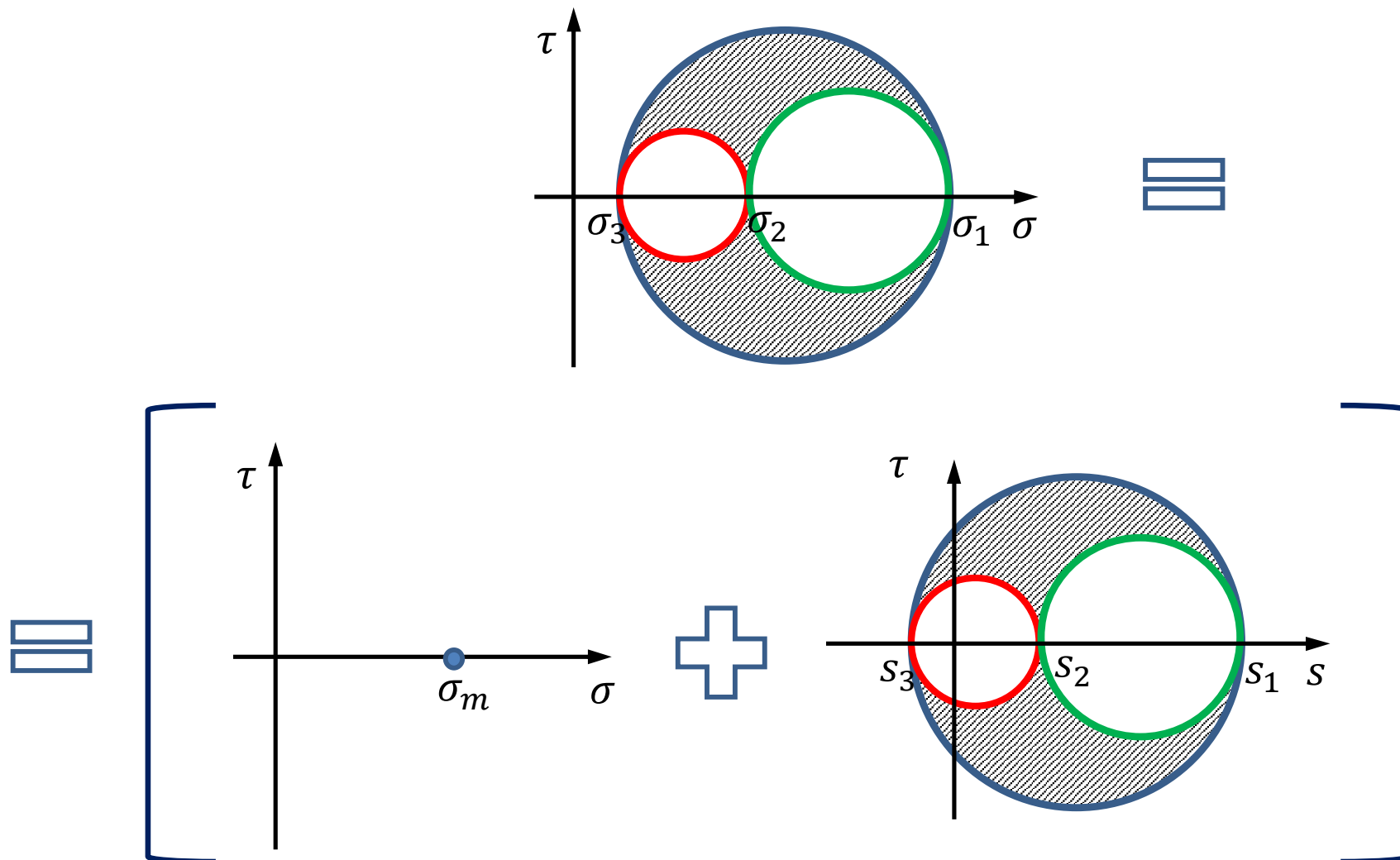
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Representando o estado tensional pelos círculos de Mohr das tensões:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Finalmente, é possível também verificar que:

1. Em um meio isótropo, a componente esférica do tensor das tensões em um dado ponto é a responsável pela mudança de volume na vizinhança do ponto, sem alterar sua forma (já que a parte esférica não provoca distorções neste caso);
2. Em um meio isótropo, a componente antiesférica do tensor das tensões em um dado ponto é responsável pela mudança de forma, sem provocar alteração do volume na vizinhança do ponto.



3. Espaço das tensões principais

Como o estado de tensões em um dado ponto do sólido fica totalmente caracterizado se conhecermos as componentes do tensor das tensões em uma base qualquer, fica mais simples analisarmos os critérios de resistência na base formada pelas direções principais de tensão, na qual o tensor das tensões assume a forma:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

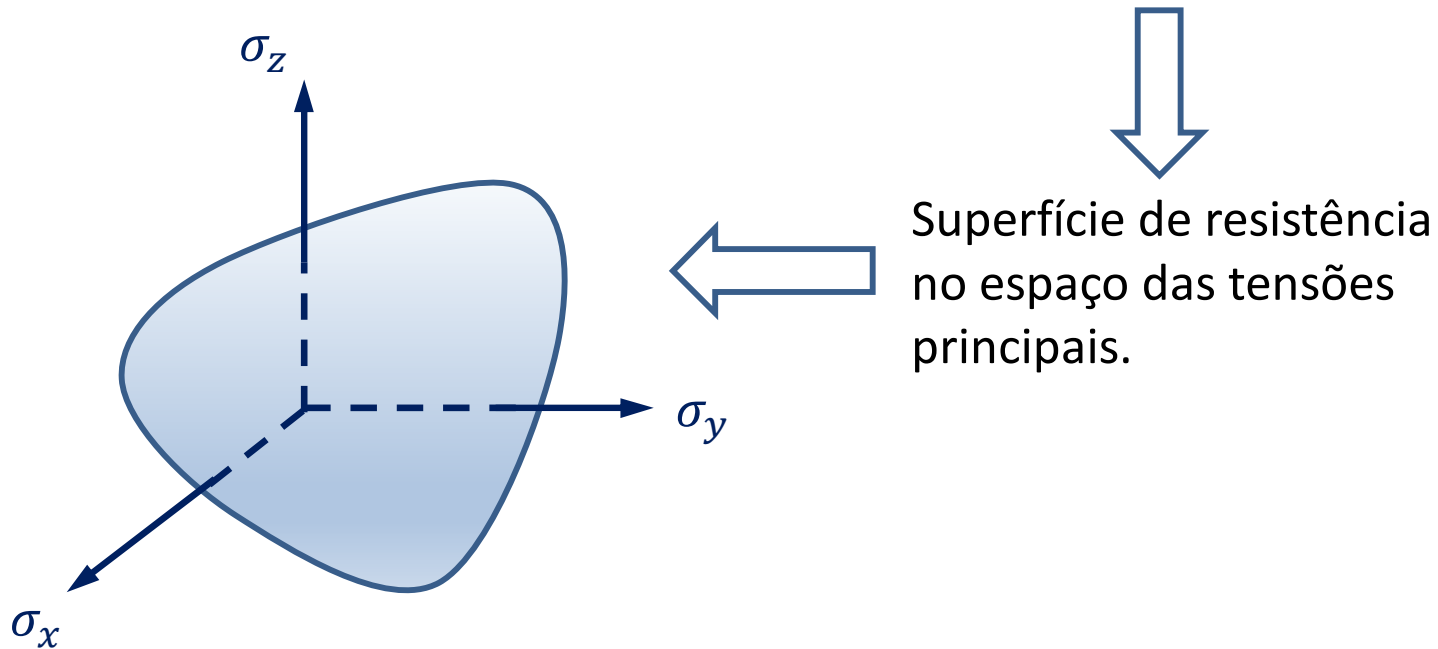
Sendo:

$b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ a base formada pelas direções principais de tensão.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Critério de resistência: $f(T, p) = 0 \iff f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, p) = 0$



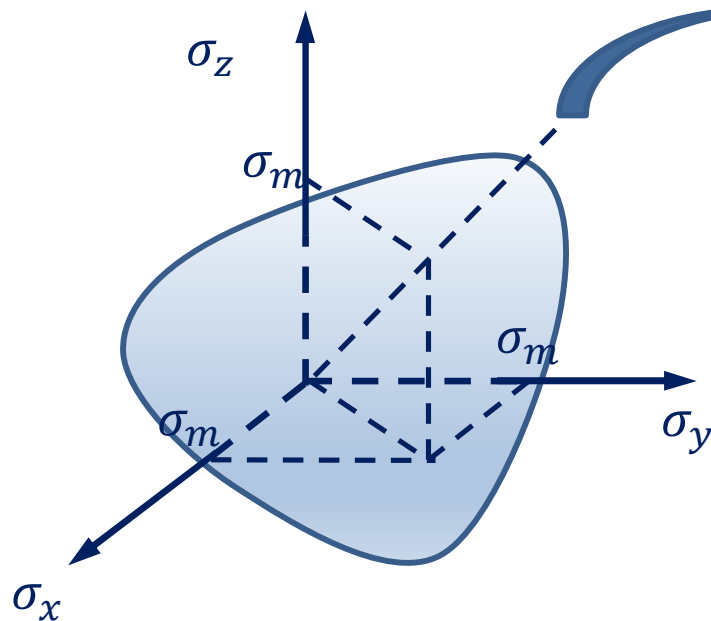
$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, p) < 0$ (ponto está seguro!)

$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, p) = 0$ (limite de resistência foi alcançado!)

$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, p) > 0$ (ponto falhou!)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Eixo hidrostático: eixo formado pelos pontos do espaço das tensões principais para os quais temos:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_m$$

Plano anti-esférico: é o plano ortogonal ao eixo hidrostático. É possível demonstrar que a distância de um ponto de coordenadas $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, no espaço das tensões principais, até o eixo hidrostático é dada por $\sqrt{2J_2}$.



4. Critério da máxima tensão de cisalhamento

- Critério proposto por H. Tresca em 1868 (para prever a falha em metais);
- Fornece bons resultados para materiais com comportamento dúctil;
- Segundo esse critério, a falha é devida ao fato de a máxima tensão de cisalhamento no ponto atingir um determinado valor limite (que pode ser obtido com um simples ensaio, como o ensaio de engenharia).

Como a máxima tensão de cisalhamento em um ponto é dada por:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

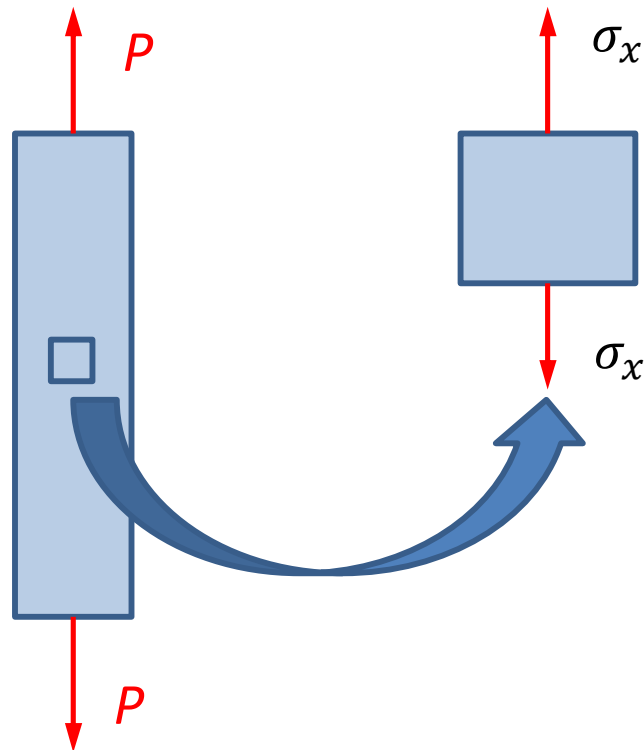
Então, o critério da máxima tensão de cisalhamento estabelece que a falha ocorre quando:

$$f(T, p) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)_{p.cr.} - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)_{ensaio} = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Considerando o estado de tensão em um ponto de um corpo-de-prova em um ensaio de engenharia:



A “falha” ocorre quando:

$$\sigma_x = \sigma_e$$

E, sendo as tensões principais (no ensaio):

$$\sigma_1 = \sigma_e, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

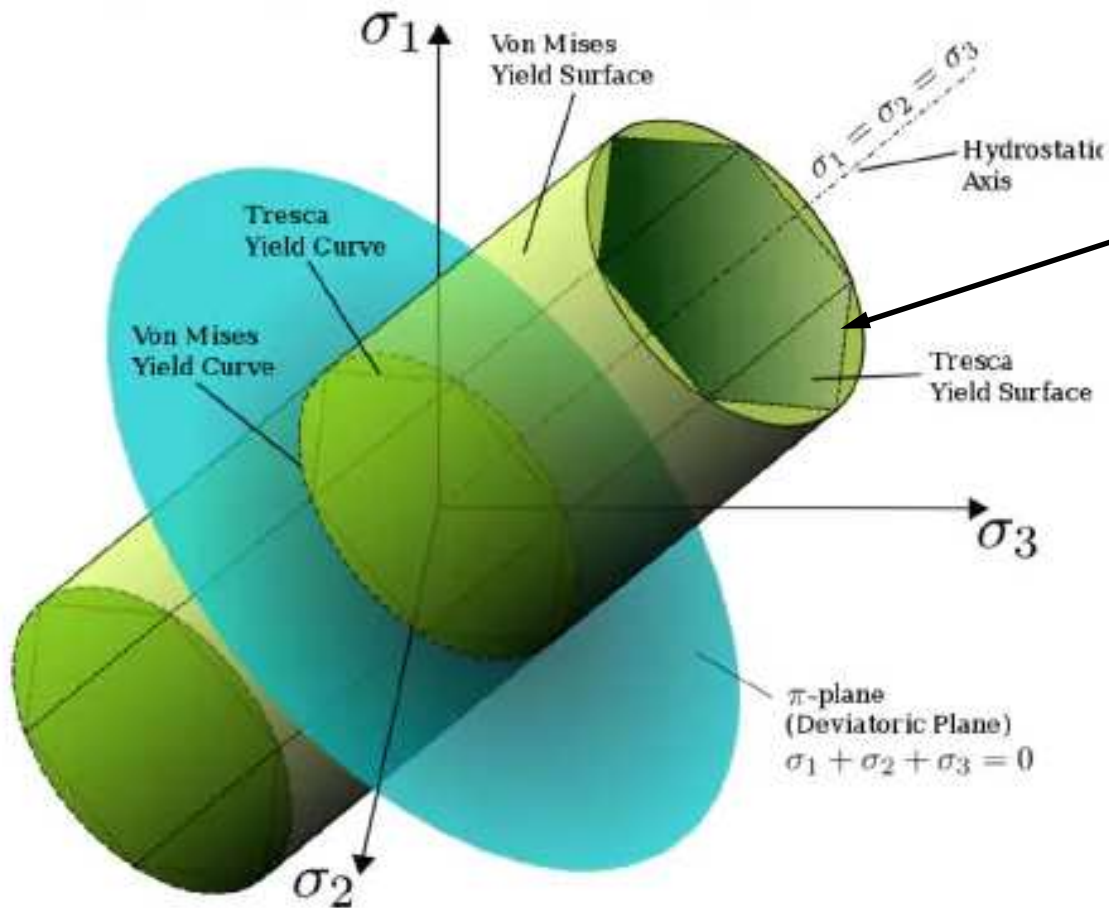
Teremos:

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)_{\text{ensaio}} = \frac{\sigma_e}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo: $f(T, p) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)_{p.cr.} - \left(\frac{\sigma_e}{2} \right) = 0$

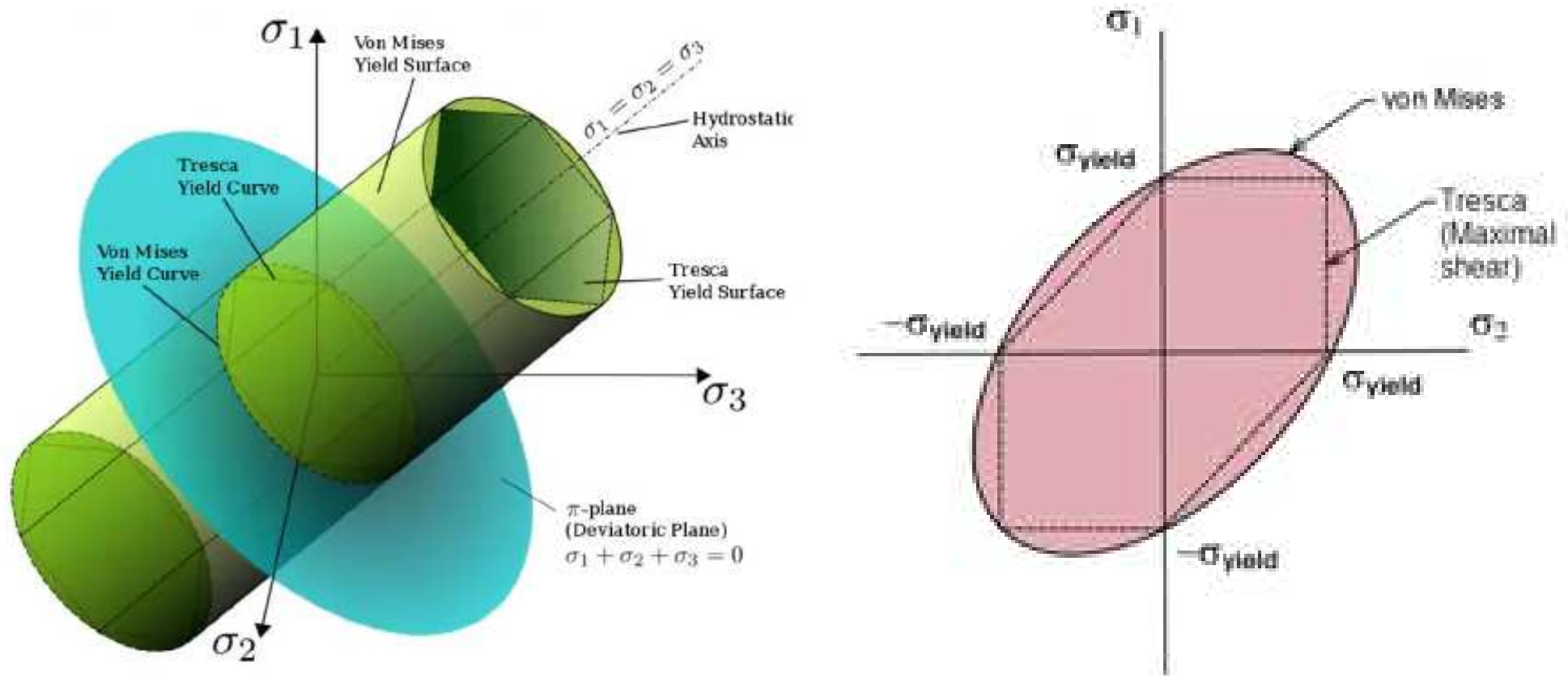


No espaço das tensões principais, a superfície de resistência associada ao critério de Tresca é um prisma reto cujo eixo é o eixo hidrostático e cuja seção é um hexágono regular.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

É possível mostrar que o traço desta superfície de resistência em um dos planos coordenados (ou seja, para o caso em que uma das tensões principais é nula) leva a um hexágono inscrito na elipse da figura abaixo à esquerda (vide linha pontilhada):





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

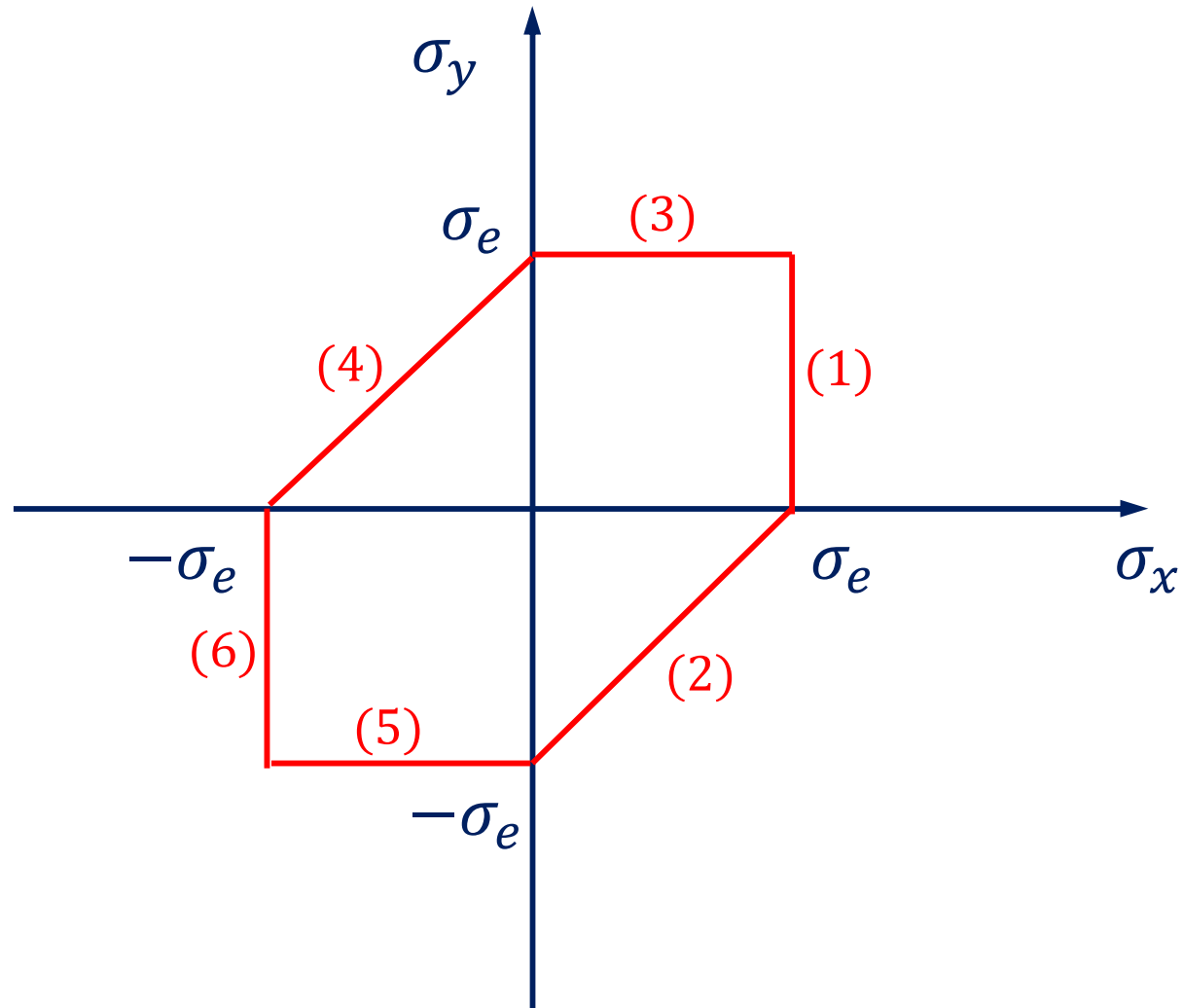
Demonstração:

Denotando as três tensões principais por σ_x, σ_y e σ_z , e considerando que uma delas (digamos σ_z) é obrigatoriamente nula, temos, pelo Princípio Fundamental da Contagem, seis possibilidades para ordenar a terna formada pelas três tensões principais:

$$\begin{aligned} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) & \begin{cases} \nearrow (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = (\sigma_x, \sigma_y, 0) \longrightarrow \tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_e}{2} & (1) \\ \nearrow (\sigma_x, \sigma_z, \sigma_y) = (\sigma_x, 0, \sigma_y) \longrightarrow \tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_e}{2} & (2) \\ \nearrow (\sigma_y, \sigma_x, \sigma_z) = (\sigma_y, \sigma_x, 0) \longrightarrow \tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_e}{2} & (3) \\ \nearrow (\sigma_y, \sigma_z, \sigma_x) = (\sigma_y, 0, \sigma_x) \longrightarrow \tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = \frac{\sigma_e}{2} & (4) \\ \searrow (\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y) = (0, \sigma_x, \sigma_y) \longrightarrow \tau_{m\acute{a}x} = -\frac{\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_e}{2} & (5) \\ \searrow (\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x) = (0, \sigma_y, \sigma_x) \longrightarrow \tau_{m\acute{a}x} = -\frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_e}{2} & (6) \end{cases} \end{aligned}$$



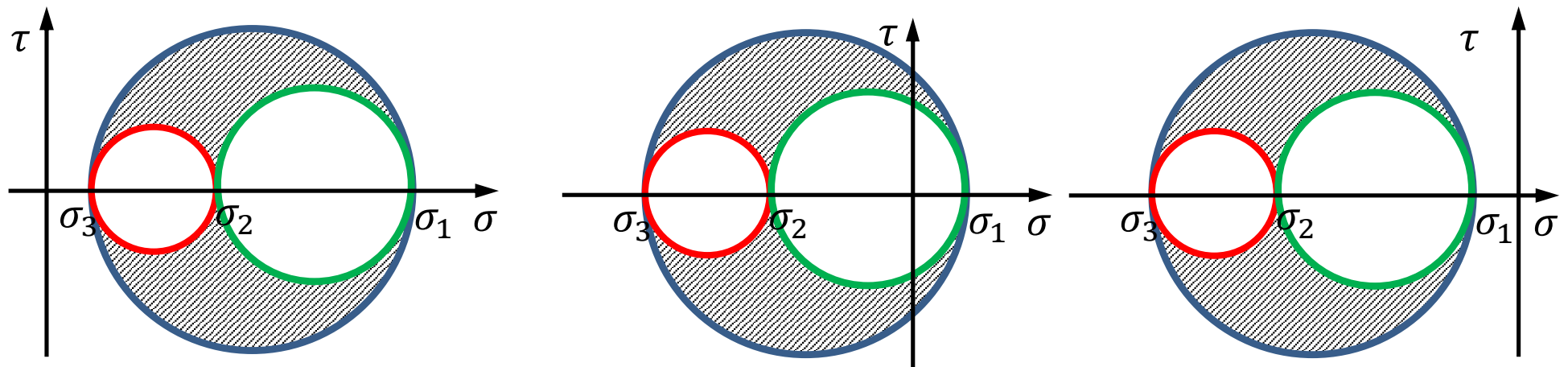
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observação: Note que, sendo um critério baseado na máxima tensão de cisalhamento (ou seja, no raio do maior círculo de Mohr das tensões para o ponto em análise), o critério de Tresca não depende da componente hidrostática do tensor das tensões:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Tensões, (2020), 66p.
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Mises_yield_criterion
- [3] Popov, E.P. Engineering Mechanics of Solids, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1998, 864p.
- [4] Hibbeler, R.C. Mechanics of Materials, 8th ed., Ed. Pearson, 2011, 888p.