



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #12

(Exercícios: Estudo das Deformações)

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

24/09/2025

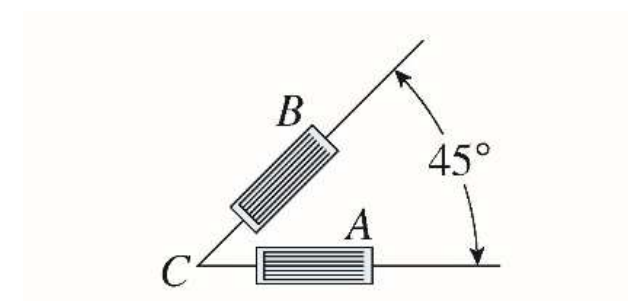
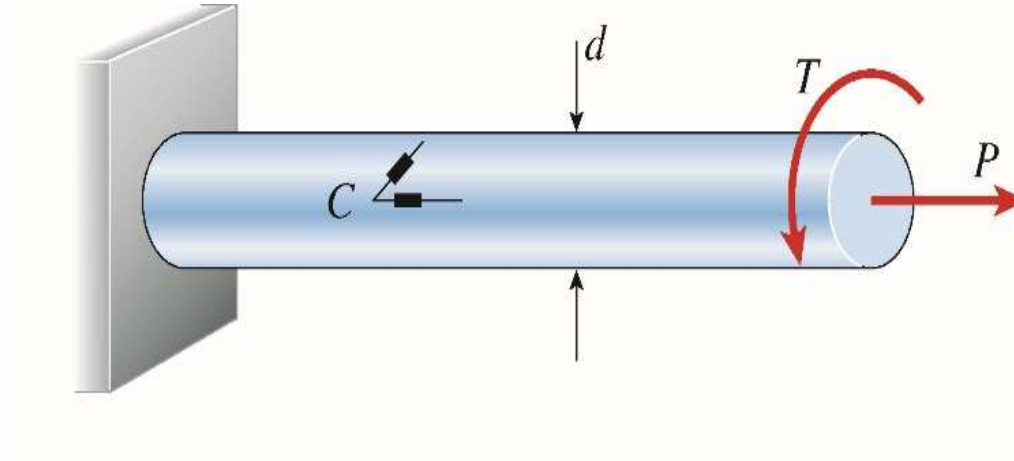


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

7.7-17. Uma barra circular sólida de diâmetro $d = 40$ mm está submetida a uma força axial P e a um torque T (vide figura). Os extensômetros A e B montados na superfície da barra fornecem as leituras $\varepsilon_a = 100 \times 10^{-6}$ e $\varepsilon_b = -55 \times 10^{-6}$. A barra é feita de aço tendo $E = 200$ GPa e $\nu = 0,29$. Pede-se:

- a) Determine a força axial P e o torque T ;
- b) Determine a distorção máxima e a tensão de cisalhamento máxima na barra.

Resp.: a) $P = 25,133$ kN, $T = 176,327$ N.m, b) $\gamma_{m\acute{a}x} = 222 \times 10^{-6}$, $\tau_{m\acute{a}x} = 17,78$ MPa.

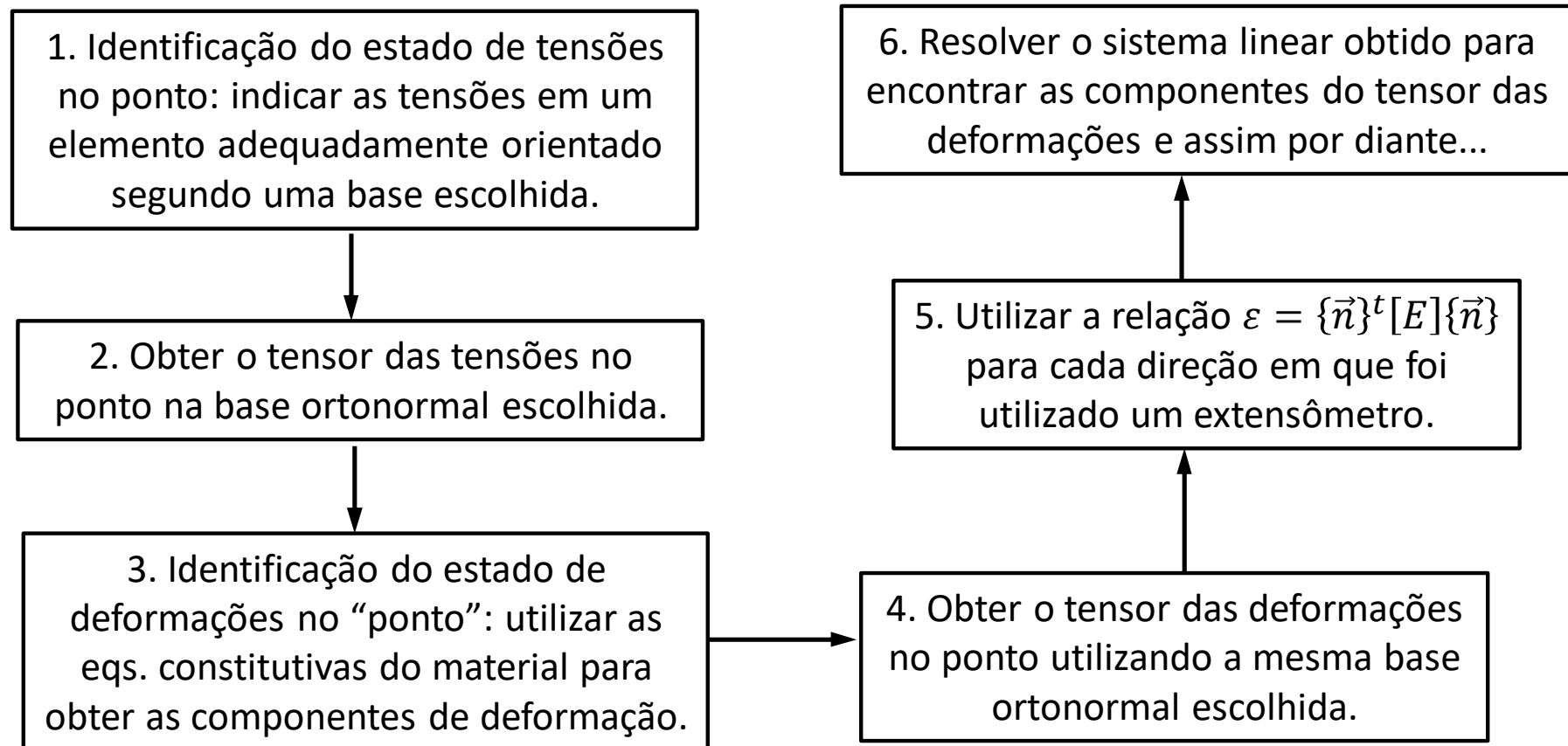




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

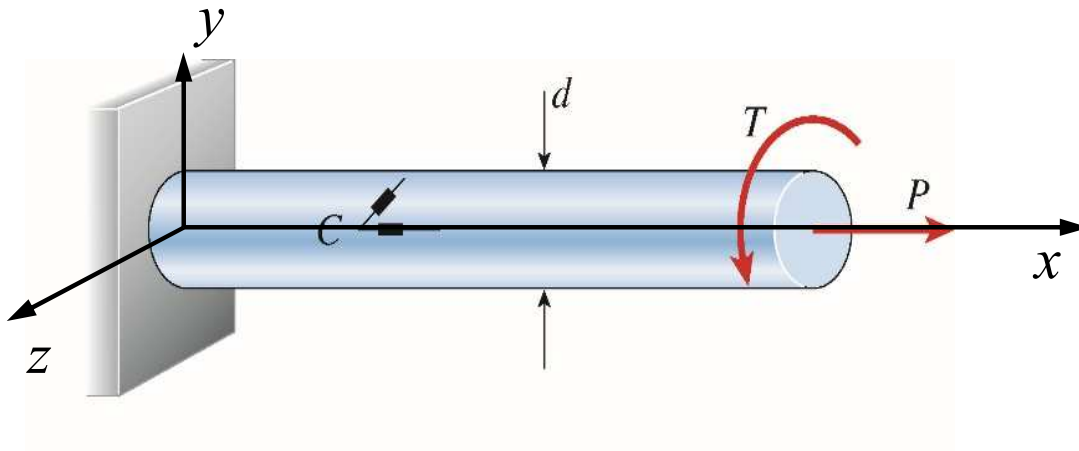
A solução de problemas desta natureza segue, em geral, o fluxograma abaixo:



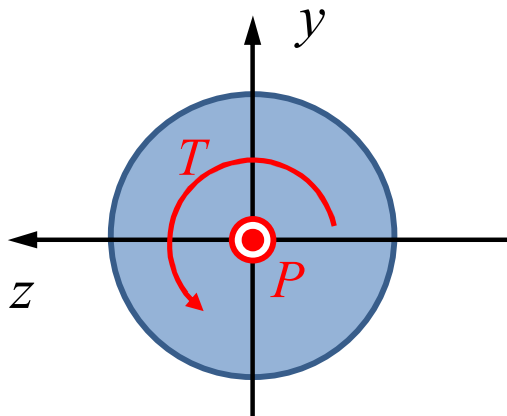
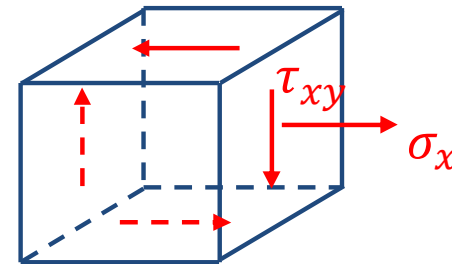


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Identificação do estado de tensões no ponto: indicar as tensões em um elemento adequadamente orientado segundo uma base escolhida.



Estado tensional no ponto C:



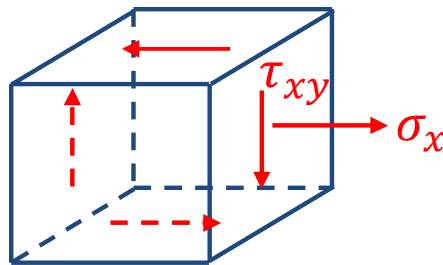
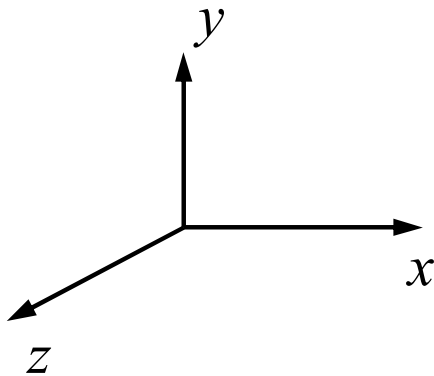
$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{T}{I_p} \frac{d}{2} = -\frac{16T}{\pi d^3}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2. Obter o tensor das tensões no ponto na base ortonormal escolhida.



$$\sigma_x = \frac{4P}{\pi d^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{16T}{\pi d^3}$$

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3. Identificação do estado de deformações no “ponto”: utilizar as eqs. constitutivas do material para obter as componentes de deformação.

Para materiais com comportamento elástico-linear, homogêneo e isotrópico, temos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{4P}{\pi d^2 E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{16T}{\pi d^3} \cdot \frac{2(1 + \nu)}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{4\nu P}{\pi d^2 E}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{4\nu P}{\pi d^2 E}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0$$

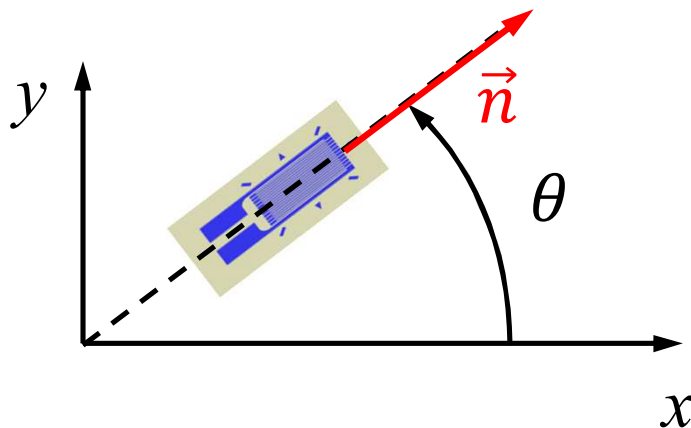


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4. Obter o tensor das deformações no ponto utilizando a mesma base ortonormal escolhida.

$$[E]_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

5. Utilizar a relação $\varepsilon = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\}$ para cada direção em que foi utilizado um extensômetro.



$$\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)_b$$

$$\varepsilon_\theta = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\{\vec{\epsilon}\}_b = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \cos\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin\theta \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos\theta + \epsilon_y \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_\theta = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\} = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

Assim, para $\theta = 0$, teremos a leitura do extensômetro a : ($\epsilon_a = 100 \times 10^{-6}$)

$$\epsilon_a = \epsilon_x = \frac{4P}{\pi d^2 E}$$

E, para $\theta = \pi/4$, teremos a leitura do extensômetro b : ($\epsilon_b = -55 \times 10^{-6}$)

$$\epsilon_b = \frac{\epsilon_x}{2} + \frac{\epsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \Leftrightarrow 2\epsilon_b = \epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

6. Resolver o sistema linear obtido para encontrar as componentes do tensor das deformações e assim por diante...

$$\frac{4P}{\pi d^2 E} = \varepsilon_a \Leftrightarrow P = \frac{\pi d^2 E \varepsilon_a}{4}$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy} = 2\varepsilon_b \Leftrightarrow (1 - \nu)\varepsilon_a - \frac{(1 + \nu)}{E} \frac{32T}{\pi d^3} = 2\varepsilon_b$$

$$T = \left[\frac{(1 - \nu)\varepsilon_a - 2\varepsilon_b}{32(1 + \nu)} \right] E \pi d^3$$

Substituindo os valores, resultam:

$$\left[\begin{array}{l} P = 25133 \text{ N} \\ T = 176,32 \text{ Nm} \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Item (b):

$$\sigma_x = \frac{4P}{\pi d^2} = E\varepsilon_a = 20 \text{ MPa}$$

$$[T]_b = \begin{bmatrix} 20 & -14,03 & 0 \\ -14,03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\text{MPa})$$

$$\tau_{xy} = -\frac{16T}{\pi d^3} = -14,03 \text{ MPa}$$

Cálculo das tensões principais:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\sigma(\sigma^2 - \sigma_x\sigma - \tau_{xy}^2) = 0$$

$$\sigma = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Note que a fórmula que fornece as duas tensões principais não nulas é a versão simplificada (pois nesse caso temos $\sigma_y = 0$) da expressão já vista no curso para o cálculo das tensões principais (vide Aula #06, slide 19):

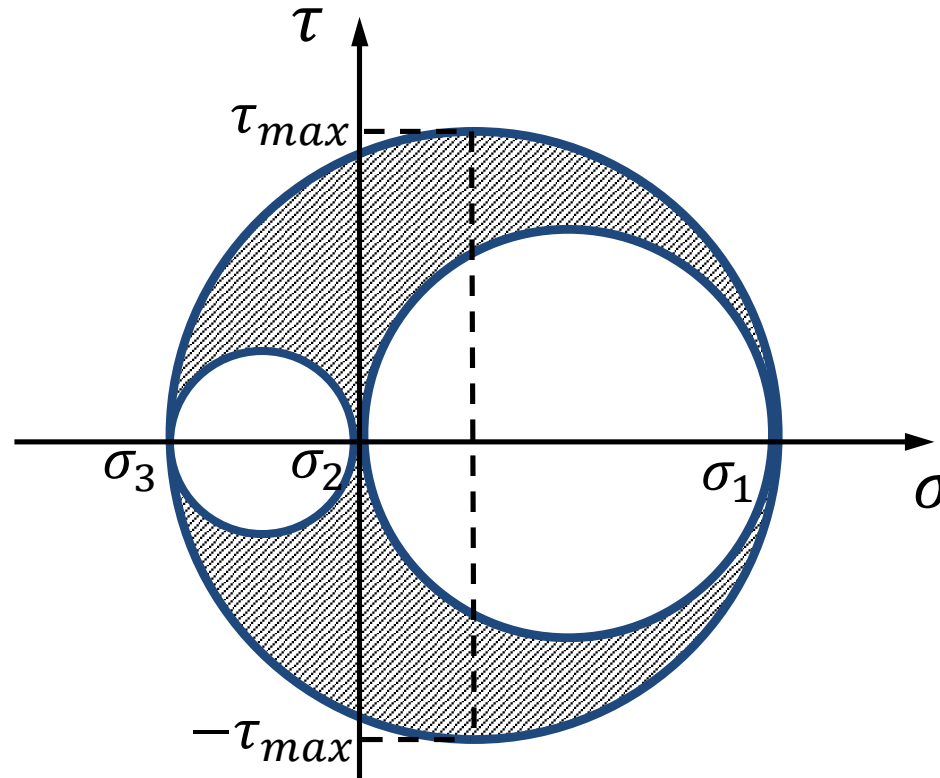
$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Substituindo os valores numéricos encontramos as tensões principais (já ordenadas segundo a convenção usual):

$$\sigma_1 = 27,23 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -7,23 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 17,23 \text{ MPa}$$

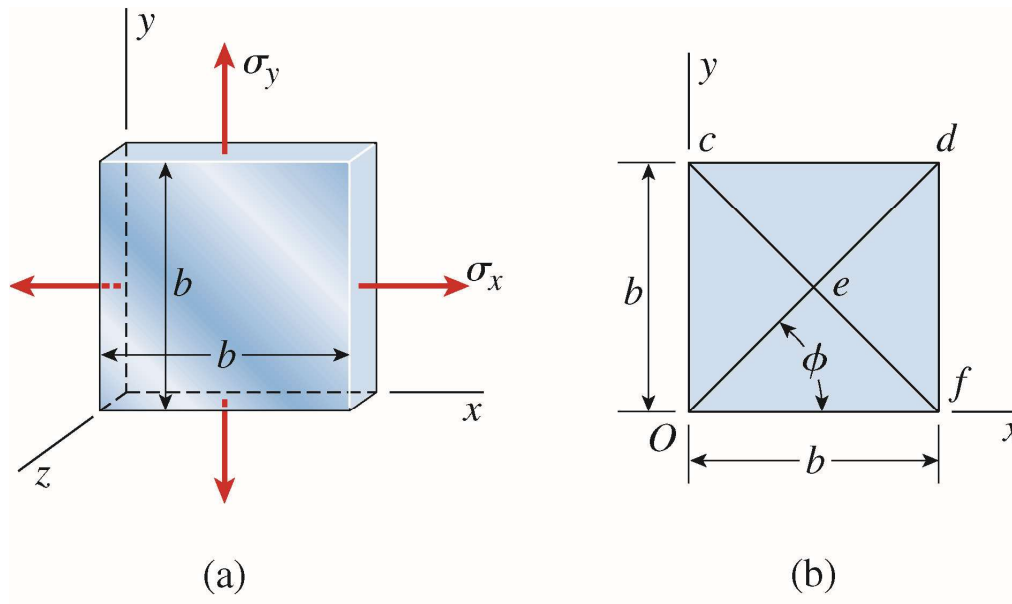
$$\gamma_{m\acute{a}x} = 2(1 + \nu) \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{E} = 222 \mu$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

7.7-3. Uma placa quadrada fina em tensão biaxial está submetida às tensões σ_x e σ_y , como ilustrado na figura (a). A largura da placa é $b = 300$ mm. Medições mostram que as deformações nas direções x e y são $\varepsilon_x = 427 \mu$ e $\varepsilon_y = 113 \mu$, respectivamente. Com referência à figura (b), determine:

- o incremento Δd no comprimento da diagonal Od ;
- a variação $\Delta\phi$ no ângulo ϕ entre a diagonal Od e o eixo x e
- a variação no ângulo $c\hat{e}d$.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução (1): utilizando apenas definições e cálculos mais simples...

Item (a):

A variação do comprimento da placa medido na direção horizontal será:

$$\Delta L_x = \varepsilon_x L_{0x} = 427 \times 10^{-6} \times 300 \text{ mm} = 0,1281 \text{ mm}$$

A variação do comprimento da placa medido na direção vertical será:

$$\Delta L_y = \varepsilon_y L_{0y} = 113 \times 10^{-6} \times 300 \text{ mm} = 0,0339 \text{ mm}$$

Os comprimentos inicial (d_0) e final (d_f) da diagonal Od serão dados por:

$$d_0 = 300\sqrt{2} \text{ mm} = 424,2640687 \text{ mm}$$

$$d_f = \sqrt{(300,1281)^2 + (300,0339)^2} \text{ mm} = 424,378625 \text{ mm}$$

Logo: $\Delta d = d_f - d_0 = 0,1145565 \text{ mm}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Item (b):

O ângulo φ_0 inicial entre a diagonal Od e o eixo horizontal é:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} = 0,78539816 \text{ rad}$$

O ângulo φ_f final entre a diagonal Od e o eixo horizontal é:

$$\varphi_f = \arctan\left(\frac{300,0339}{300,1281}\right) = 0,7852412 \text{ rad}$$

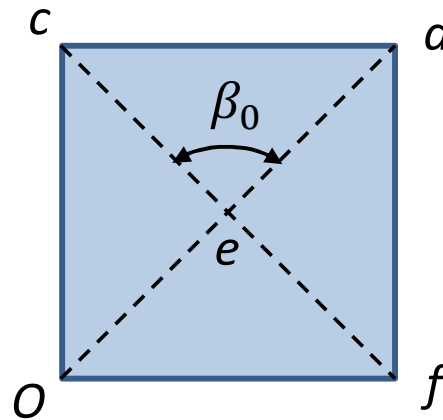
Logo, a variação $\Delta\varphi$ fica dada por:

$$\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_0 = -1,569576 \times 10^{-4} \text{ rad} \cong -0,009^\circ$$

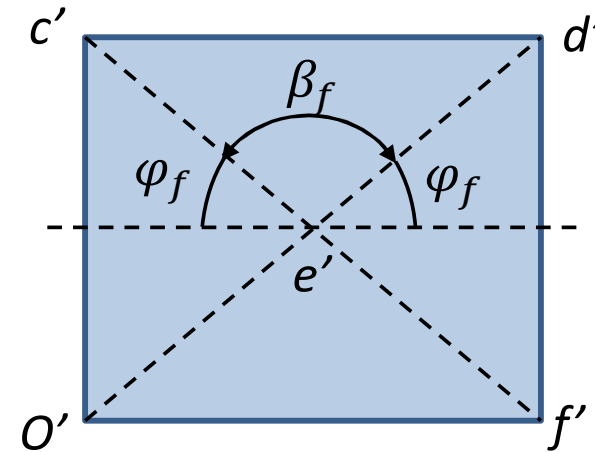


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Item (c):



(Config. Inicial)



(Config. Deformada)

A variação no ângulo $cêd$ será:

$$\Delta\beta = \beta_f - \beta_0 = (\pi - 2\varphi_f) - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Delta\beta = \frac{\pi}{2} - 2\varphi_f \cong 3,13915 \times 10^{-4} rad$$

$$\Delta\beta \cong 0,017986^\circ$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução (2): solução utilizando o tensor das deformações...

a) O estado de tensão na placa é composto apenas pelas tensões σ_x e σ_y que levam às deformações ε_x e ε_y , já fornecidas. Assim, o tensor das deformações (em qualquer ponto da placa), escrito na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fica dado por:

$$[E]_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Como $\sigma_z = 0$, temos pela lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} [\sigma_x + \sigma_y]$$

Somando as duas primeiras equações, obtemos:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{(1 - \nu)}{E} [\sigma_x + \sigma_y] \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{(1 - \nu)} [\varepsilon_x + \varepsilon_y]$$

Logo:
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{(1 - \nu)} [\varepsilon_x + \varepsilon_y]$$

Considerando $\nu = 0,3$ (valor não fornecido pelo problema, já que não será um dado necessário), teremos:

$$\varepsilon_z = -\frac{0,3}{0,7} [540 \times 10^{-6}] \cong -231,4 \mu$$

Logo:
$$[E]_b = \begin{bmatrix} 427 & 0 & 0 \\ 0 & 113 & 0 \\ 0 & 0 & -231,4 \end{bmatrix} (\mu)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O alongamento da fibra que, na configuração de referência, tinha a direção da diagonal Od é dada por (vide slides #7 e #8):

$$\varepsilon_{\theta} = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\} = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

Nesse caso, temos $\theta = \pi/4$ e $\gamma_{xy} = 0$, logo:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = 270 \mu$$

A variação no comprimento da diagonal Od será então:

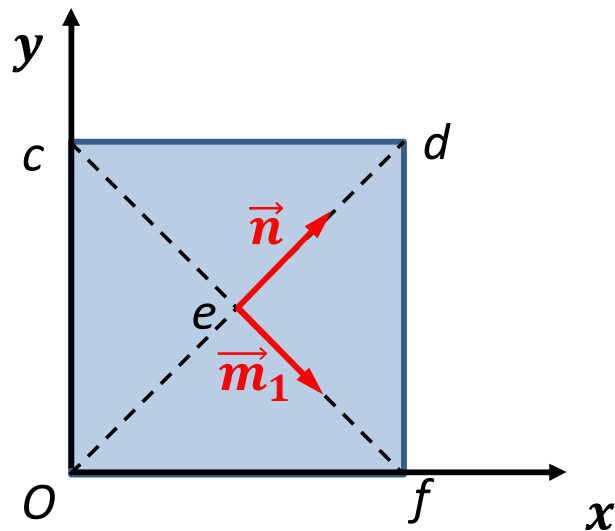
$$\Delta d = \varepsilon_{\theta} d_0 = 270 \times 10^{-6} \times 424,2640687 \text{ mm} = 0,1145513 \text{ mm}$$

Cálculo anterior: $\Delta d = 0,1145565 \text{ mm}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Item (b): Vamos calcular a distorção (γ_1) entre as fibras que, na configuração de referência, têm as direções ed e ef :



$$\gamma_1 \cong 2\{\vec{m}_1\}^t [E] \{\vec{n}\}$$

Onde: $\{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $\{\vec{m}_1\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$[E]\{\vec{n}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\gamma_1 \cong 2\{\vec{m}_1\}^t [E] \{\vec{n}\} = \varepsilon_x - \varepsilon_y = 314 \mu$$

Obs: O valor positivo encontrado para γ_1 indica que houve uma redução no ângulo original de 90° entre as fibras...



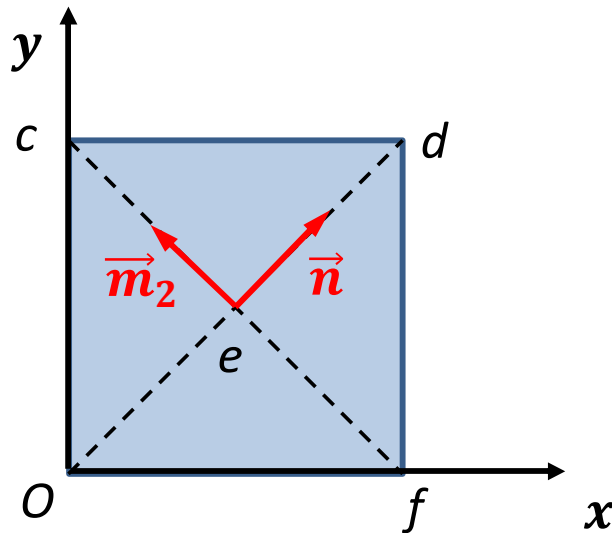
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Da condição de simetria, decorre que a variação $\Delta\varphi$ do ângulo φ entre a diagonal Od e o eixo x é dada (em rad) por:

$$\Delta\varphi = -\frac{\gamma_1}{2} = -157 \mu \cong -0,009^\circ$$

$$\text{Cálc. Ant.: } \Delta\varphi = -1,569576 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

Item (c): Vamos calcular agora a distorção (γ_2) entre as fibras que, na configuração de referência, têm as direções ed e ec :



$$\gamma_2 \cong 2\{\vec{m}_2\}^t [E] \{\vec{n}\}$$

$$\text{Onde: } \{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\vec{m}_2\} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Teremos: $\gamma_2 \cong 2\{\vec{m}_2\}^t [E] \{\vec{n}\} = -\varepsilon_x + \varepsilon_y = -314 \mu$

Obs: O valor negativo encontrado para γ_2 indica que houve um aumento no ângulo original de 90° entre as fibras...

Assim, a variação no ângulo $cêd$ será:

$$\Delta\beta = -\gamma_2 = 314\mu$$

$$\text{Cálc. Ant.: } \Delta\beta \cong 3,13915 \times 10^{-4} rad$$

Obs: Comparem os valores obtidos pelas duas formas de solução do problema. Apesar de as diferenças serem insignificantes, qual seria a razão das discrepâncias e como podemos eliminá-las?



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

8.3-5. Um extensômetro é instalado na direção longitudinal na superfície de uma lata de alumínio, conforme indicado na figura. A razão entre o raio e a espessura da lata é de 200. Quando a tampa da lata é aberta, a deformação varia $\varepsilon_0 = -170\mu$. Qual era a pressão interna p na lata?

Dados: $E = 70 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,33$.

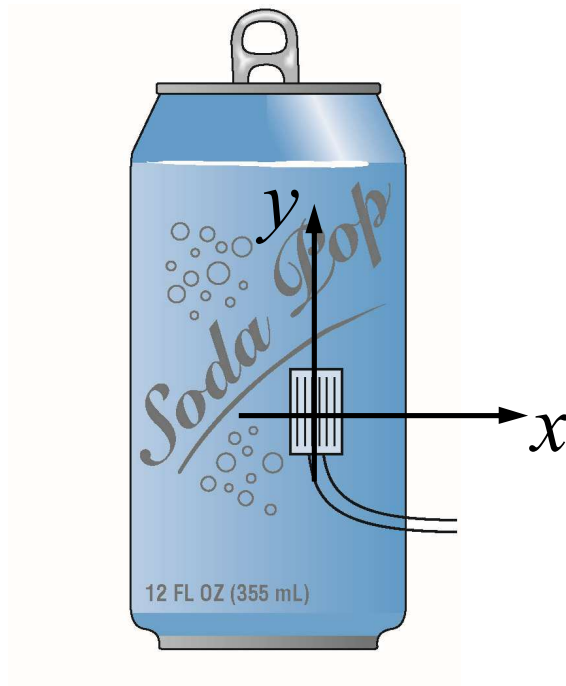




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

O estado tensional nos pontos da superfície quando a lata está fechada é dado por:



$$\sigma_x \cong \frac{pR}{t} = 200p \quad (\text{tensão circunferencial})$$

$$\sigma_y \cong \frac{pR}{2t} = 100p \quad (\text{tensão longitudinal})$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Este estado tensional leva à seguinte deformação medida na direção longitudinal:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] = \frac{1}{E} [100p - 0,33(200p)] = 34 \frac{p}{E}$$

Desta forma, ao abrirmos a lata haverá uma despressurização e o extensômetro irá registrar um alongamento de sinal oposto ao indicado acima, ou seja:

$$\varepsilon_0 = -34 \frac{p}{E} = -170\mu$$

Logo: $\frac{p}{E} = 5 \times 10^{-6}$  $p = 0,35 \text{ MPa}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Deformações, (2021), 69p.
- [2] Popov, E.P. Engineering Mechanics of Solids, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1998, 864p.
- [3] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7^a edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.7