



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #10

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

17/09/2025



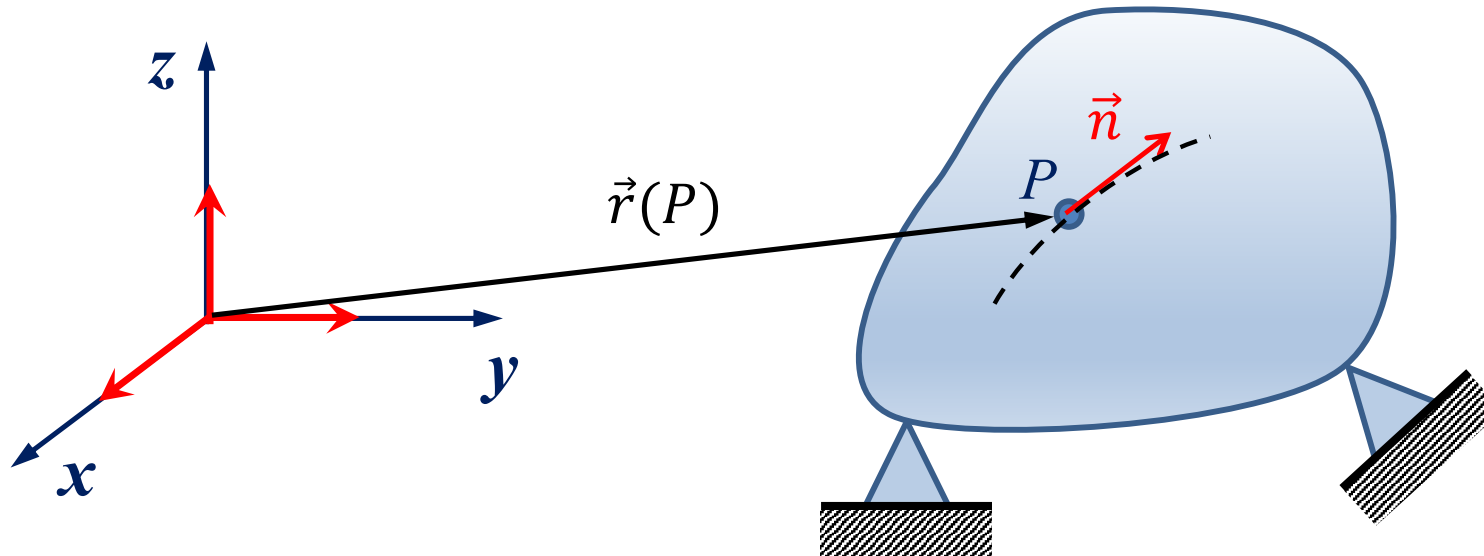
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Cálculo do alongamento em uma direção qualquer;
2. O tensor das deformações em coordenadas cartesianas;
3. Cálculo da distorção entre duas direções quaisquer;
4. Simetria do tensor das deformações;
5. Vetor deformação e suas componentes;
6. Alongamentos principais e direções principais de deformação.

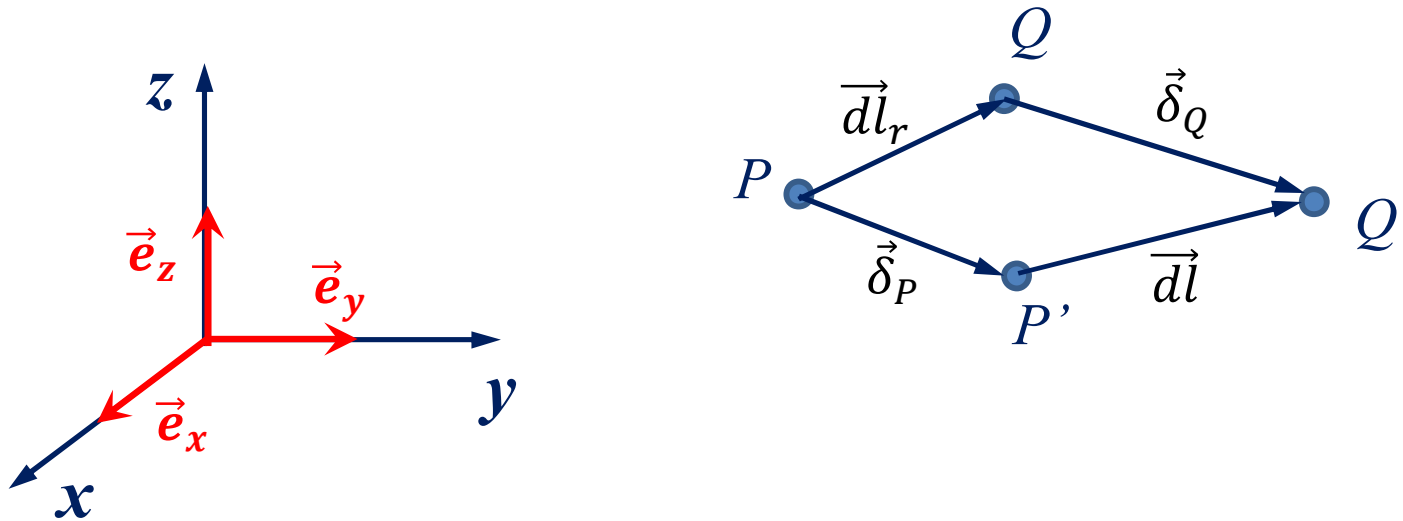


1. Cálculo do alongamento em uma direção qualquer





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$(Q - P) = (dx, dy, dz) = (n_x, n_y, n_z) \cdot \|Q - P\| = (n_x, n_y, n_z) dl_r = \vec{dl}_r$$

$$\vec{dl} = (Q' - P') = (Q' - Q) + (Q - P) - (P' - P)$$

$$\vec{dl} = \vec{\delta}_Q + \vec{dl}_r - \vec{\delta}_P$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\vec{\delta}_Q - \vec{\delta}_P = (u_Q - u_P, v_Q - v_P, w_Q - w_P)$$

$$u_Q - u_P \cong \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) dz$$

$$v_Q - v_P \cong \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) dz$$

$$w_Q - w_P \cong \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) dz$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\vec{u}_Q - \vec{u}_P \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} dl_r$$

Denominamos:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{Tensor Gradiente dos Deslocamentos})$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\{\vec{\delta}_Q - \vec{\delta}_P\} = [L]\{\vec{n}\}dl_r$$

Então:

$$\{\overline{dl}\} = \{\vec{\delta}_Q - \vec{\delta}_P\} + \{d\vec{l}_r\} = [L]\{\vec{n}\}dl_r + \{\vec{n}\}dl_r$$

$$\{\overline{dl}\} = [L]\{\vec{n}\}dl_r + [I]\{\vec{n}\}dl_r = ([L] + [I])\{\vec{n}\}dl_r$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{dl}{dl_r}\right)^2 = \frac{\{\overline{dl}\}^t \cdot \{\overline{dl}\}}{(dl_r)^2} = \frac{\{\vec{n}\}^t ([L] + [I])^t ([L] + [I]) \{\vec{n}\}}{(dl_r)^2} (dl_r)^2$$

$$\lambda^2 = \{\vec{n}\}^t ([L]^t + [I]) ([L] + [I]) \{\vec{n}\}$$

$$\lambda^2 = \{\vec{n}\}^t ([L] + [L]^t + [L]^t [L] + [I]) \{\vec{n}\}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\lambda^2 = \{\vec{n}\}^t ([L] + [L]^t + [L]^t[L] + [I]) \{\vec{n}\}$$

$$\lambda^2 = \{\vec{n}\}^t ([L] + [L]^t + [L]^t[L]) \{\vec{n}\} + \{\vec{n}\}^t [I] \{\vec{n}\}$$

$$2\varepsilon_q = \lambda^2 - 1 = \{\vec{n}\}^t ([L] + [L]^t + [L]^t[L]) \{\vec{n}\}$$

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) = \{\vec{n}\}^t \left(\frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2} \right) \{\vec{n}\}$$



2. O tensor das deformações em coordenadas cartesianas

Denominamos: $[E] = \frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2}$ (tensor das deformações de Green)

Assim, o alongamento quadrático (ou de Green) de uma fibra que passa por um dado ponto P do sólido segundo uma direção dada pelo versor \vec{n} fica dado por:

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\}$$

...o que demonstra o que foi discutido na aula anterior, ou seja, $\varepsilon = \varepsilon(P, \vec{n})$.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Em condições de não linearidade geométrica, vale:

$$[E] = \frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

...estando as componentes ϵ_{ij} relacionadas com as expressões (não lineares) dos alongamentos e das distorções estudadas na aula #09.

Em condições de linearidade geométrica, as parcelas não lineares decorrentes do produto $[L]^t[L]$ podem ser desprezadas, de forma que o tensor das deformações de Green assume uma forma mais simples dada por:

$$[E] \cong \frac{[L] + [L]^t}{2} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Onde:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

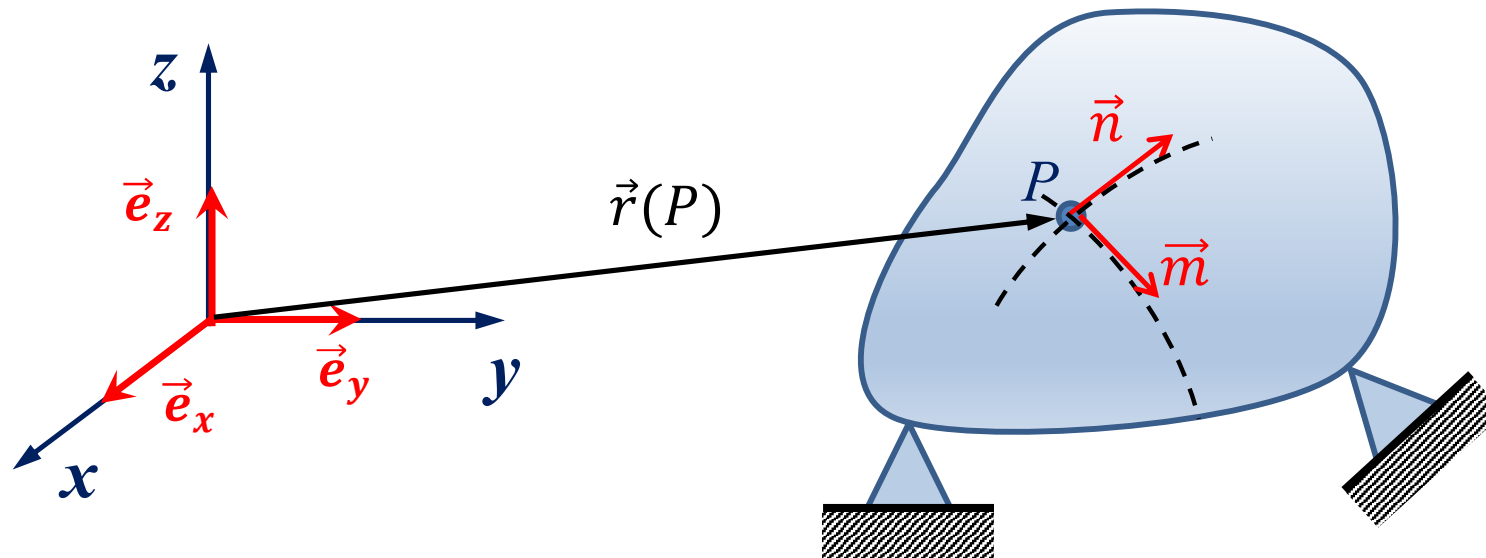
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Do exposto, vemos que, se conhecermos as componentes do tensor das deformações de um dado ponto do sólido, podemos determinar o alongamento de qualquer fibra que passa por esse ponto, segundo qualquer direção definida pelo versor \vec{n} , por meio da expressão:

$$\varepsilon_q = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\}$$

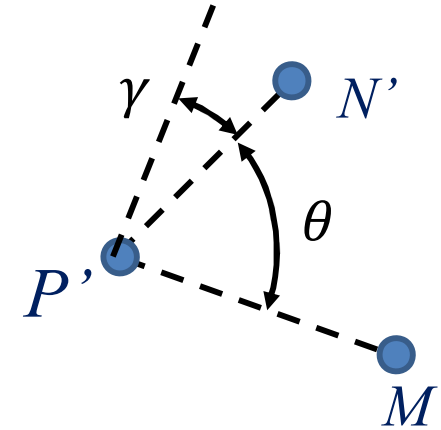
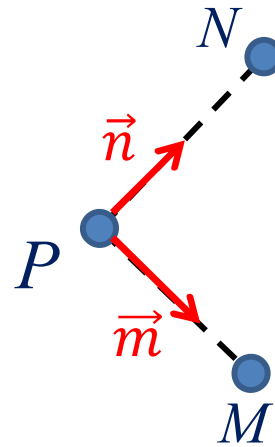
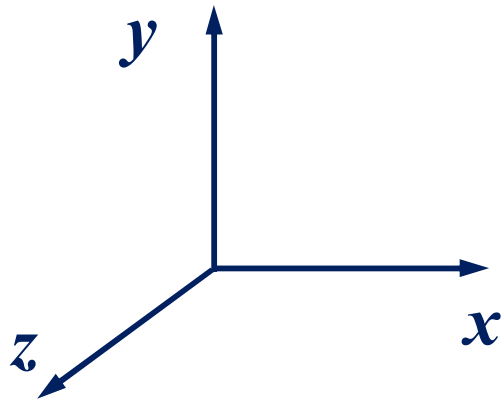


3. Cálculo da distorção entre duas direções quaisquer





Cálculo das distorções:



$$\gamma + \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \text{sen}(\gamma)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\text{sen}(\gamma) = \cos(\theta) = \left(\frac{N' - P'}{\|N' - P'\|} \right) \cdot \left(\frac{M' - P'}{\|M' - P'\|} \right)$$

$$\lambda_n = \frac{\|N' - P'\|}{\|N - P\|} \Leftrightarrow \|N' - P'\| = \lambda_n dl_{n,r} \quad \text{Sendo: } dl_{n,r} = \|N - P\|$$

$$\lambda_m = \frac{\|M' - P'\|}{\|M - P\|} \Leftrightarrow \|M' - P'\| = \lambda_m dl_{m,r} \quad \text{Sendo: } dl_{m,r} = \|M - P\|$$

$$(N' - P') = (N' - N) + (N - P) - (P' - P) = \vec{\delta}_N + \overrightarrow{dl}_{n,r} - \vec{\delta}_P$$

$$(M' - P') = (M' - M) + (M - P) - (P' - P) = \vec{\delta}_M + \overrightarrow{dl}_{m,r} - \vec{\delta}_P$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$(N' - P') = \vec{\delta}_N - \vec{\delta}_P + \vec{dl}_{n,r} = [L]\{\vec{n}\}dl_{n,r} + [I]\{\vec{n}\}dl_{n,r} = ([L] + [I])\{\vec{n}\}dl_{n,r}$$

$$(M' - P') = \vec{\delta}_M - \vec{\delta}_P + \vec{dl}_{m,r} = [L]\{\vec{m}\}dl_{m,r} + [I]\{\vec{m}\}dl_{m,r} = ([L] + [I])\{\vec{m}\}dl_{m,r}$$

$$\cos(\theta) = \left(\frac{N' - P'}{\|N' - P'\|} \right) \cdot \left(\frac{M' - P'}{\|M' - P'\|} \right) = \frac{\{\vec{n}\}^t ([L] + [I])^t ([L] + [I]) \{\vec{m}\}}{\lambda_n dl_{n,r} \cdot \lambda_m dl_{m,r}} \cdot dl_{n,r} dl_{m,r}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\{\vec{n}\}^t ([L]^t [L] + [L] + [L]^t + [I]) \{\vec{m}\}}{\lambda_n \cdot \lambda_m}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\{\vec{n}\}^t ([L]^t [L] + [L] + [L]^t) \{\vec{m}\}}{\lambda_n \cdot \lambda_m} + \frac{\{\vec{n}\}^t [I] \{\vec{m}\}}{\lambda_n \cdot \lambda_m}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\cos(\theta) = \frac{\{\vec{n}\}^t ([L]^t [L] + [L] + [L]^t) \{\vec{m}\}}{\lambda_n \cdot \lambda_m}$$

Como: $[E] = \frac{[L] + [L]^t + [L]^t [L]}{2}$

Resulta: $\sin(\gamma) = \cos(\theta) = 2 \frac{\{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{m}\}}{\lambda_n \cdot \lambda_m}$

Em condições de Linearidade Geométrica, a expressão fica simplificada na forma:

$$\gamma = 2\{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{m}\}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Do exposto, concluímos que, se conhecermos as componentes do tensor das deformações de um dado ponto do sólido, podemos determinar também a distorção entre quaisquer pares de fibras que passam por esse ponto e cujos versores tangentes (calculados no ponto em questão) são dados por \vec{n} e \vec{m} (com \vec{n} e \vec{m} ortogonais entre si) por meio das expressões:

$$\text{sen}(\gamma) = 2 \frac{\{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{m}\}}{\lambda_n \cdot \lambda_m} \quad (\text{em condições de não L.G.})$$

ou

$$\gamma = 2\{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{m}\} \quad (\text{em condições de L.G.})$$



4. Simetria do tensor das deformações

Sendo o tensor das deformações de Green dado por:

$$[E] = \frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2}$$

É imediato verificar que:

$$[E]^t = \left(\frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2} \right)^t = \frac{[L]^t + [L] + [L]^t[L]}{2} = [E]$$

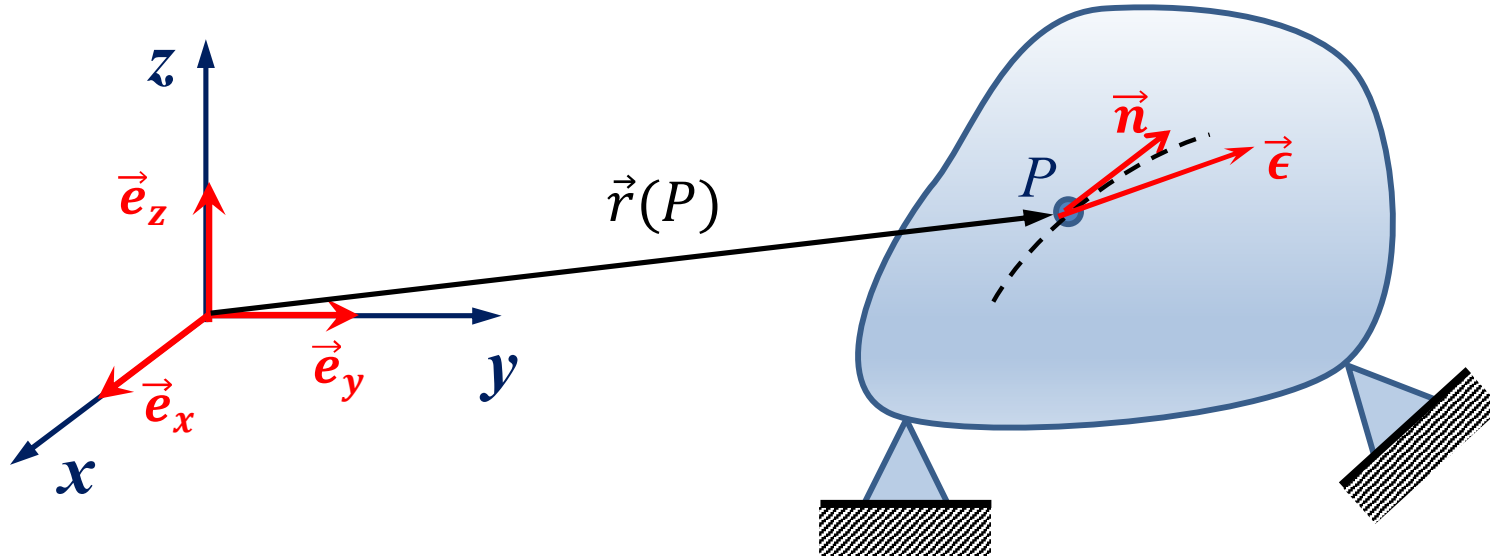
Ou seja, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$.



5. Vetor deformação e suas componentes

Definimos o vetor deformação associado a um dado ponto P do sólido e a uma dada direção (vetor unitário tangente a uma fibra que passa pelo ponto) como o vetor dado por:

$$\{\vec{\epsilon}\}_b = [E]_b \{\vec{n}\}_b \quad b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

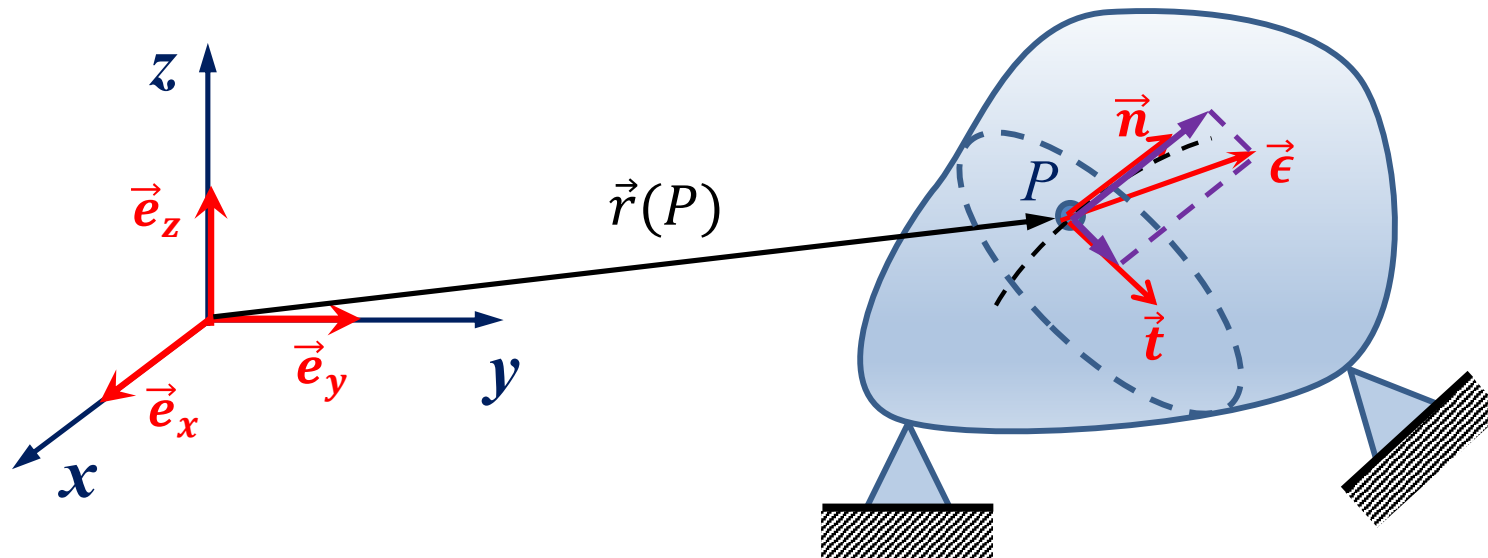




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Vemos que é possível decompor o vetor deformação em duas componentes vetoriais: uma sendo sua projeção segundo o versor dado pela direção \vec{n} e outra sendo sua projeção no plano que é ortogonal a \vec{n} :

$$\vec{\epsilon} = a\vec{n} + b\vec{t}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para obtermos o escalar a , basta fazermos o produto escalar entre $\vec{\epsilon}$ e \vec{n} :

$$\vec{\epsilon} \cdot \vec{n} = (a\vec{n} + b\vec{t}) \cdot \vec{n} = a$$

Mas, lembrando que:

$$\left[\begin{array}{l} \{\vec{\epsilon}\}_b = [E]_b \{\vec{n}\}_b \\ \epsilon_q = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\} \end{array} \right.$$

Concluimos que: $a = \vec{\epsilon} \cdot \vec{n} = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\} = \epsilon_q$

Ou seja, o escalar a possui um significado físico claro: trata-se do alongamento quadrático associado ao ponto P e à direção do versor tangente à fibra (dada pelo versor \vec{n}).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para obtermos o escalar b , procedemos de forma análoga, fazendo o produto escalar entre \vec{e} e \vec{t} :

$$\vec{e} \cdot \vec{t} = (a\vec{n} + b\vec{t}) \cdot \vec{t} = b$$

Mas, lembrando que:

$$\left[\begin{array}{l} \{\vec{e}\}_b = [E]_b \{\vec{n}\}_b \\ \text{sen}(\gamma) = 2 \frac{\{\vec{t}\}^t [E] \{\vec{n}\}}{\lambda_n \cdot \lambda_t} \end{array} \right.$$

Concluimos que: $b = \vec{e} \cdot \vec{t} = \{\vec{t}\}^t [E] \{\vec{n}\} = \frac{\lambda_n \lambda_t \text{sen}(\gamma)}{2}$

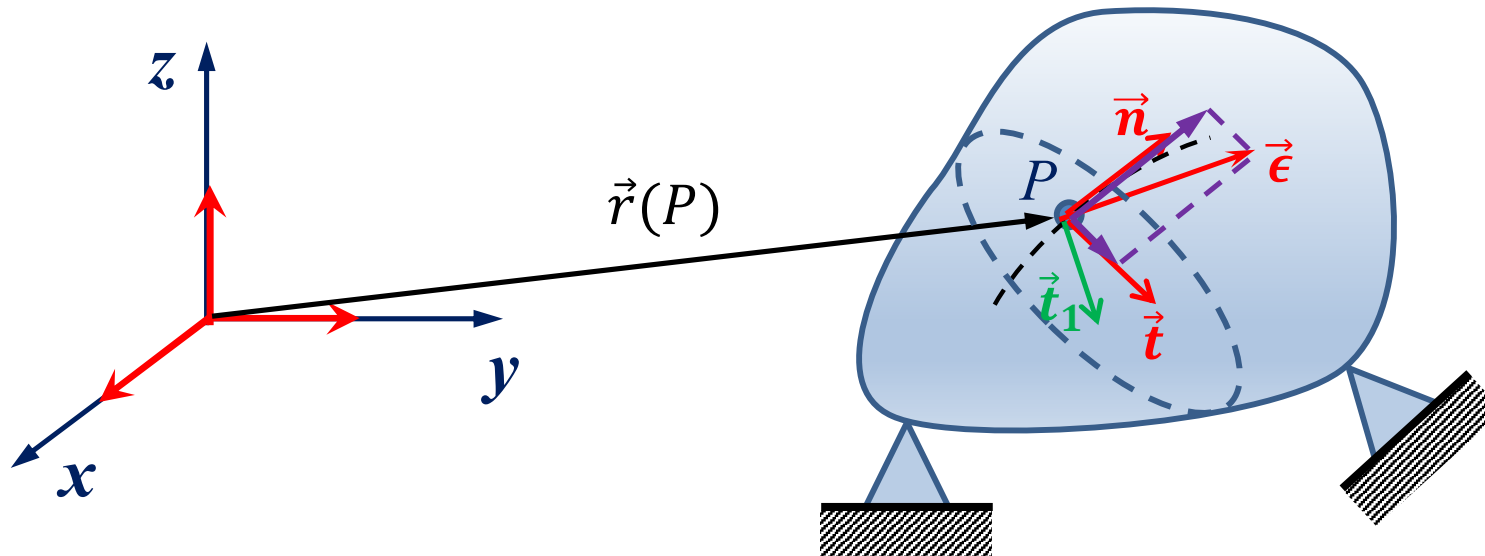
Ou seja, o escalar b também possui um significado físico claro, estando diretamente ligado à distorção entre as direções \vec{n} e \vec{t} .



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Uma vez encontrados os escalares a e b , podemos rescrever o vetor deformação na forma:

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_q \vec{n} + \left(\frac{\lambda_n \lambda_t \text{sen}(\gamma)}{2} \right) \vec{t} \quad \xrightarrow{\text{(L.G.)}} \quad \vec{\epsilon} = \epsilon \vec{n} + \frac{\gamma}{2} \vec{t}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para determinarmos a distorção γ_1 entre as fibras que passam pelo ponto P tendo uma a direção do vetor \vec{n} (direção fixa) e outra a direção de um vetor qualquer \vec{t}_1 (porém ortogonal a \vec{n} na configuração de referência), utilizamos a relação já vista:

$$\text{sen}(\gamma_1) = 2 \frac{\{\vec{t}_1\}^t [E] \{\vec{n}\}}{\lambda_n \cdot \lambda_{t_1}}$$

Mas: $[E] \{\vec{n}\} = \{\vec{\epsilon}\} = \varepsilon_q \{\vec{n}\} + \left(\frac{\lambda_n \lambda_t \text{sen}(\gamma)}{2} \right) \{\vec{t}\}$

Logo: $\text{sen}(\gamma_1) = \frac{2}{\lambda_n \cdot \lambda_{t_1}} \{\vec{t}_1\}^t \left(\varepsilon_q \{\vec{n}\} + \left(\frac{\lambda_n \lambda_t \text{sen}(\gamma)}{2} \right) \{\vec{t}\} \right)$

$$\text{sen}(\gamma_1) = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t_1}} \text{sen}(\gamma) \{\vec{t}_1\}^t \{\vec{t}\} = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t_1}} \text{sen}(\gamma) \cos(\theta)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Em condições de linearidade geométrica, podemos considerar as aproximações:

$$\operatorname{sen}(\gamma_1) \cong \gamma_1 \quad \operatorname{sen}(\gamma) \cong \gamma \quad \frac{\lambda_t}{\lambda_{t_1}} \cong 1$$

Resultando: $\gamma_1 \cong \gamma \cos(\theta)$

Concluimos, portanto, que a distorção γ é a máxima distorção possível que pode haver entre a fibra de direção \vec{n} e todas as demais fibras que são ortogonais a ela na configuração de referência (pelo menos, em condições de linearidade geométrica). A direção \vec{t} , que fornece essa máxima distorção com a direção \vec{n} , é facilmente encontrada pela projeção do vetor deformação no plano ortogonal a \vec{n} .



6. Alongamentos principais e direções principais de deformação

Dizemos que uma dada direção definida por um versor \vec{n} é uma direção principal de deformação se, e somente se:

$$\{\vec{\epsilon}\} = [E]\{\vec{n}\} = \varepsilon\{\vec{n}\}$$

Em outras palavras, o vetor deformação associado a tal direção possui apenas a componente referente ao alongamento da fibra que, na configuração de referência, tem a direção \vec{n} . Portanto, tal fibra permanece, na configuração deformada, ortogonal a todas as fibras que eram ortogonais à direção \vec{n} originalmente.

Nesse caso, dizemos que o alongamento ε associado à direção \vec{n} é um alongamento principal.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

*Determinação dos alongamentos principais e das
direções principais de deformação:*

Considerando que uma dada direção dada pelo versor \vec{n} é uma direção principal de deformação, temos:

$$\{\vec{\epsilon}\} = [E]\{\vec{n}\} = \epsilon\{\vec{n}\}$$

$$([E] - \epsilon[I])\{\vec{n}\} = \{\vec{0}\}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon & \gamma_{yx}/2 & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \epsilon_y - \epsilon & \gamma_{zy}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \epsilon_z - \epsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para que existam soluções diferentes da solução trivial, devemos impor que:

$$\det \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon & \gamma_{yx}/2 & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \epsilon_y - \epsilon & \gamma_{zy}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \epsilon_z - \epsilon \end{bmatrix} = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\varepsilon^3 - K_1\varepsilon^2 + K_2\varepsilon - K_3 = 0$$

$$K_1 = \text{tr}(E) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$K_2 = \left\| \begin{array}{cc} \varepsilon_y & \gamma_{zy}/2 \\ \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cc} \varepsilon_x & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \varepsilon_z \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cc} \varepsilon_x & \gamma_{yx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{array} \right\| =$$

$$= \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

$$K_3 = \det(E)$$

K_1, K_2, K_3  Invariantes de deformação.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

As três raízes do polinômio característico serão sempre reais e seus valores fornecem as deformações (ou alongamentos) principais atuantes nos planos principais.

Notação e Convenção:

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3,$$

Ou seja, ε_1 será sempre o maior alongamento em valor algébrico e ε_3 será sempre o menor alongamento em valor algébrico.

Para cada raiz $\varepsilon = \varepsilon_i$ encontrada, deve-se determinar a direção principal $\vec{n} = \vec{n}_i$ correspondente usando:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_i & \gamma_{yx}/2 & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y - \varepsilon_i & \gamma_{zy}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z - \varepsilon_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{x,i} \\ n_{y,i} \\ n_{z,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Deformações, (2021), 69p.
- [2] Popov, E.P. Engineering Mechanics of Solids, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1998, 864p.
- [3] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7^a edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.7