



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #09

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

16/09/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Objetivos;
2. Conceito de deformação;
3. Notação para deslocamentos, alongamentos e distorções;
4. Família de alongamentos;
5. Relações deformações-deslocamentos em coordenadas cartesianas.



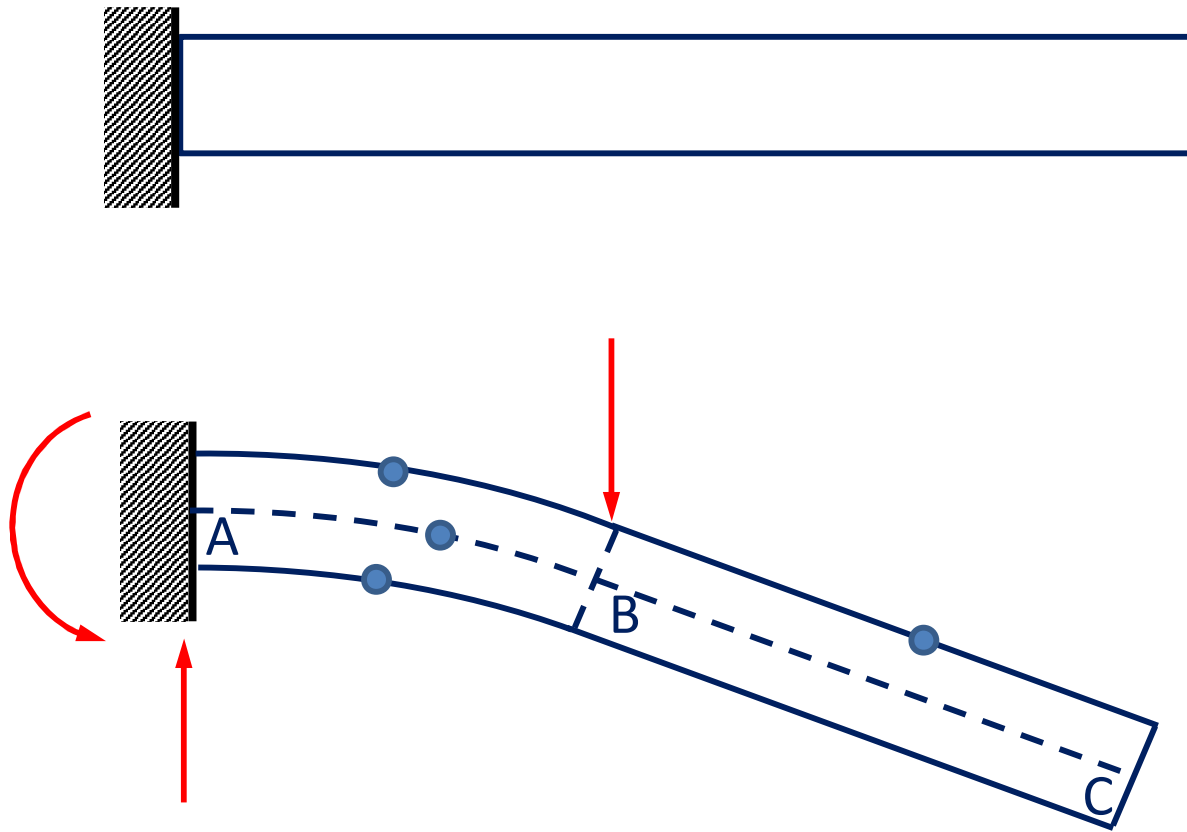
1. Objetivos

Os objetivos desta parte do curso que envolve o “Estudo das Deformações” são, em linhas gerais:

- Aprofundar o entendimento sobre as deformações em meios contínuos;
- Mostrar que o estado de deformações na vizinhança de um ponto (em um meio contínuo) fica totalmente caracterizado pelo tensor das deformações no ponto;
- Determinar o alongamento de uma fibra que passa por um dado ponto do sólido tendo uma direção definida;
- Determinar a distorção entre duas fibras que passam por um dado ponto do sólido e que, na configuração de referência, eram ortogonais entre si;
- Determinar o maior e o menor alongamentos possíveis considerando as infinitas fibras que passam por um ponto do sólido;
- Determinar a máxima distorção possível, considerando os infinitos pares de fibras (inicialmente ortogonais entre si) que passam pelo ponto;
- Entender o funcionamento de extensômetros em aplicações experimentais.



2. Conceito de deformação





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

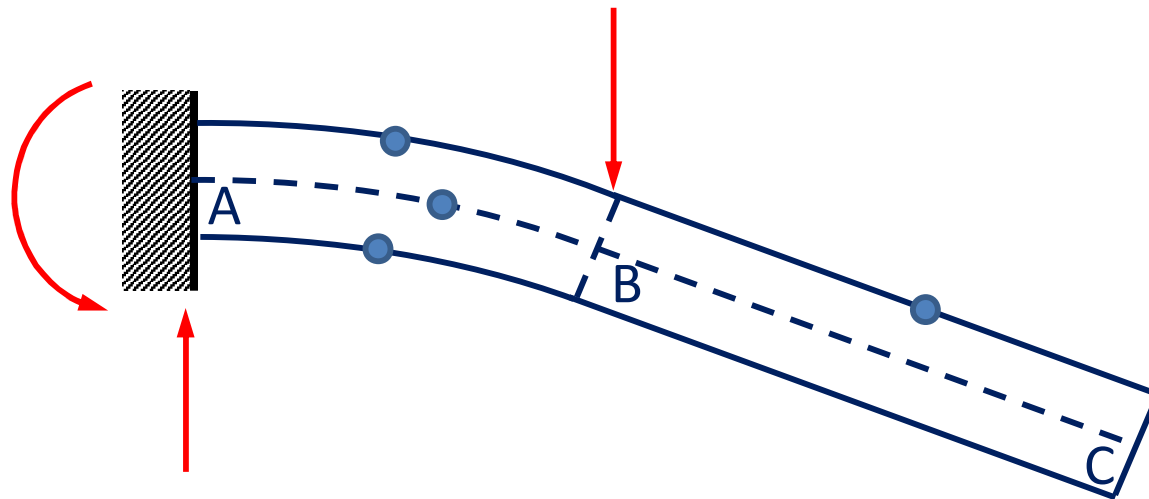
Observações:

1. Ao tratarmos de deformações, é fundamental estabelecermos duas configurações do sólido: a configuração inicial (também denominada configuração de referência, ou configuração não deformada) e a configuração final (também denominada configuração atual ou configuração deformada);
2. O estudo das deformações é um estudo puramente geométrico e está associado à cinemática (movimento) dos pontos do sólido, sendo, portanto, válido para qualquer tipo de material (resguardada a hipótese de continuidade do meio);
3. A deformação é causada pelo movimento relativo entre pontos de uma dada região (infinitesimal) do sólido. Se não existir movimento relativo entre os pontos em uma dada região, não há deformação (como no trecho BC da viga ABC);



Observações (continuação):

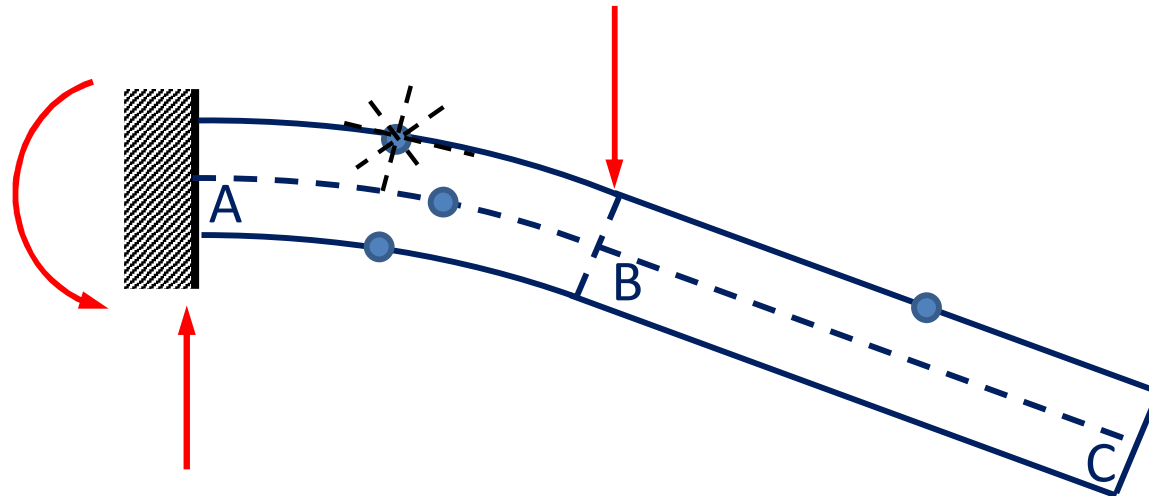
4. A deformação depende, portanto, da identificação da região (i.é, da vizinhança em torno de um dado ponto), sendo imediata a dependência entre o estado de deformação e o “ponto do sólido”;





Observações (continuação):

5. Definido o “ponto”, é necessário também definir a direção (ou direções) em que a deformação deve ser medida, já que diferentes direções levam a diferentes deformações.



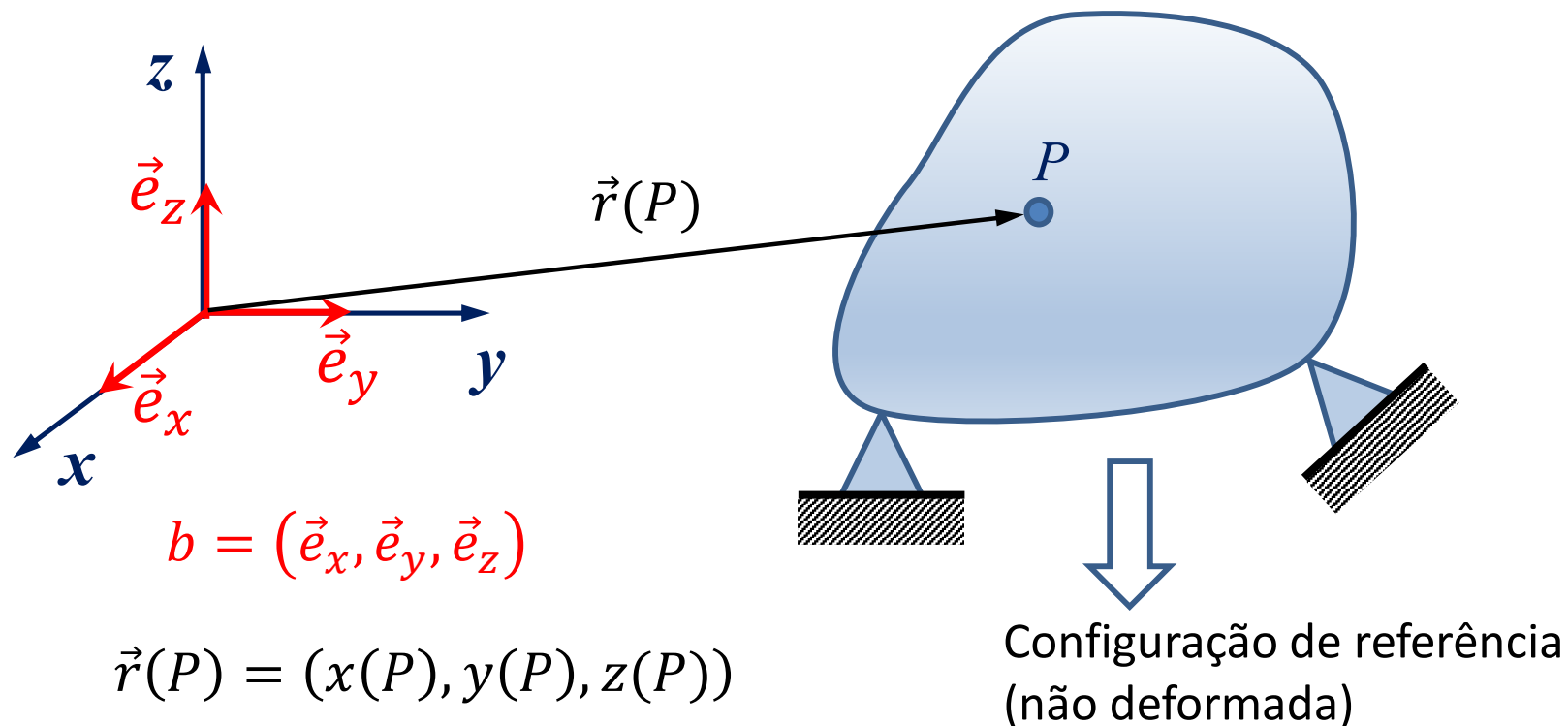
6. Em resumo, em se tratando de alongamentos podemos dizer que:

$$\varepsilon = \varepsilon(P, \vec{n})$$



3. Notação para deslocamentos, alongamentos e distorções

Notação clássica:

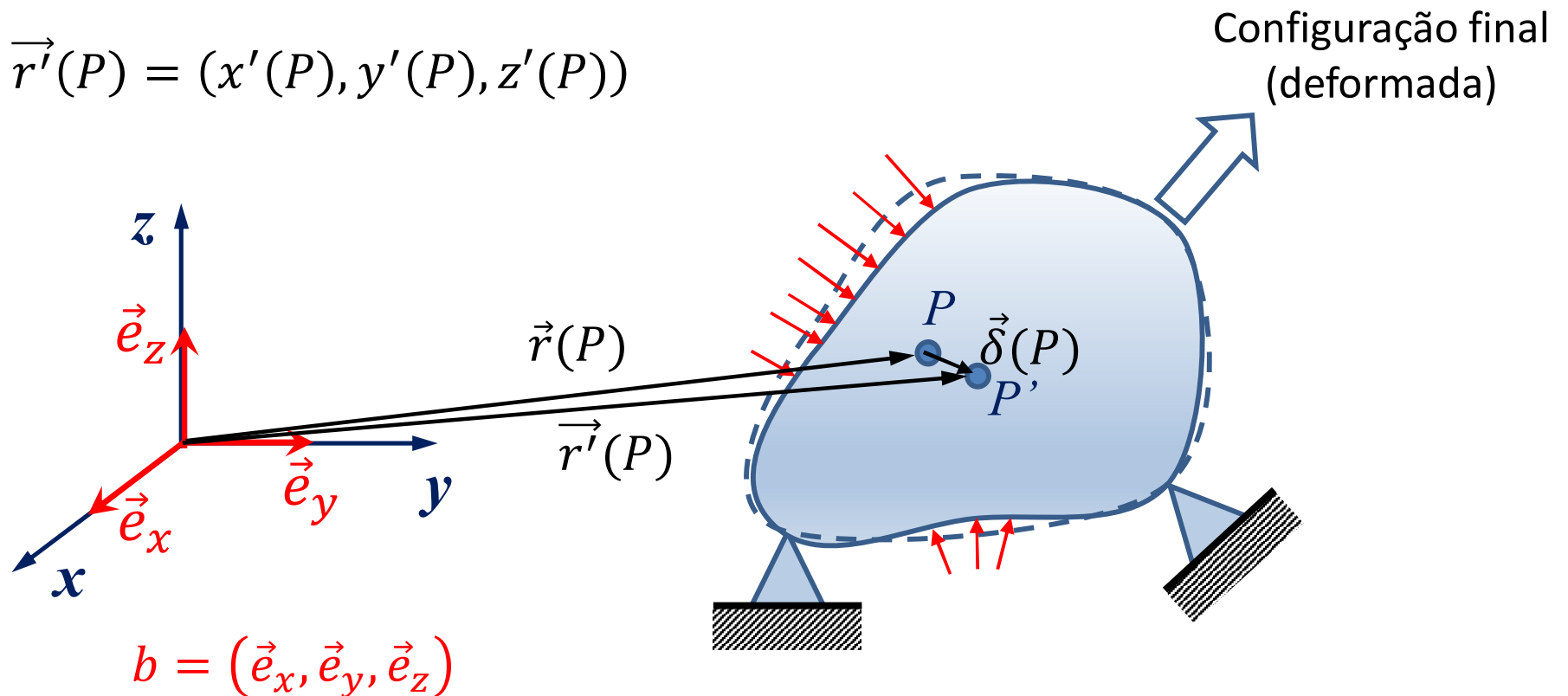




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

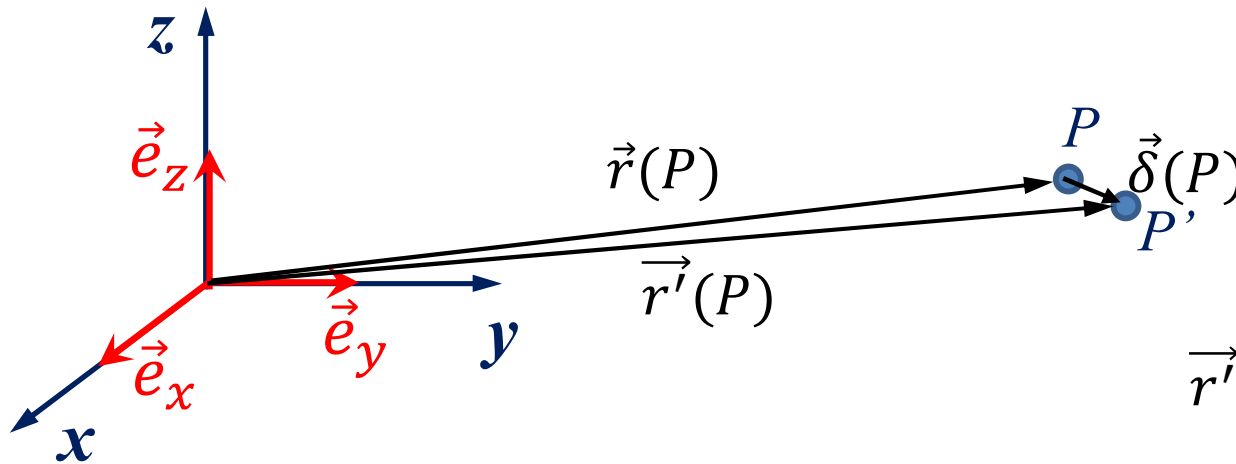
$$\vec{r}(P) = (x(P), y(P), z(P))$$

$$\vec{r}'(P) = (x'(P), y'(P), z'(P))$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\vec{r}'(P) = \vec{r}(P) + \vec{\delta}(P)$$

$$\vec{\delta}(P) = (u(P), v(P), w(P))$$

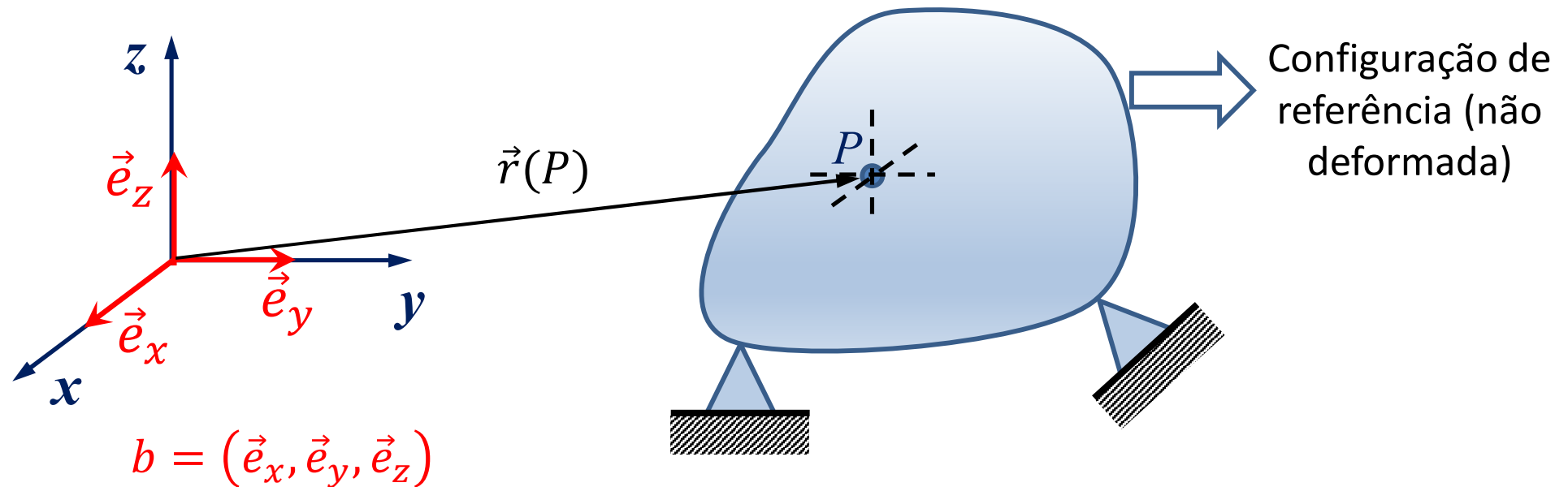
$u = u(P) = u(x(P), y(P), z(P))$ = componente do vetor $\vec{\delta}$ segundo a direção x .

$v = v(P) = v(x(P), y(P), z(P))$ = componente do vetor $\vec{\delta}$ segundo a direção y .

$w = w(P) = w(x(P), y(P), z(P))$ = componente do vetor $\vec{\delta}$ segundo a direção z .



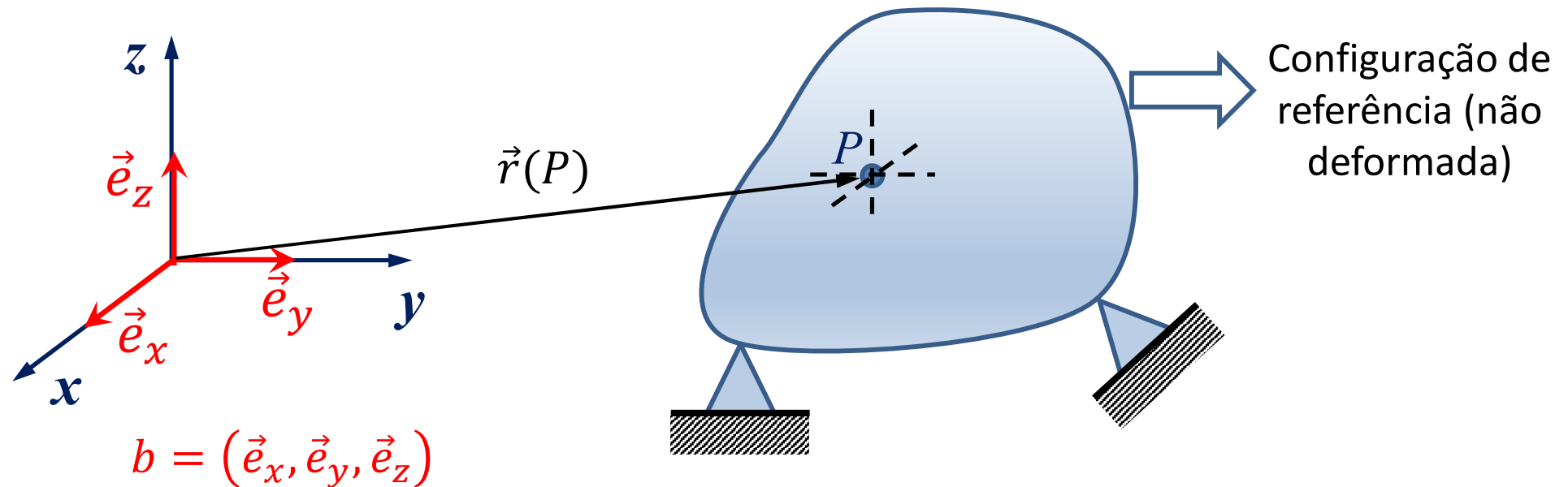
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \rightarrow$ alongamentos das fibras que passam pelo ponto P e que estão alinhadas (na configuração de referência) com as direções de $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, respectivamente.



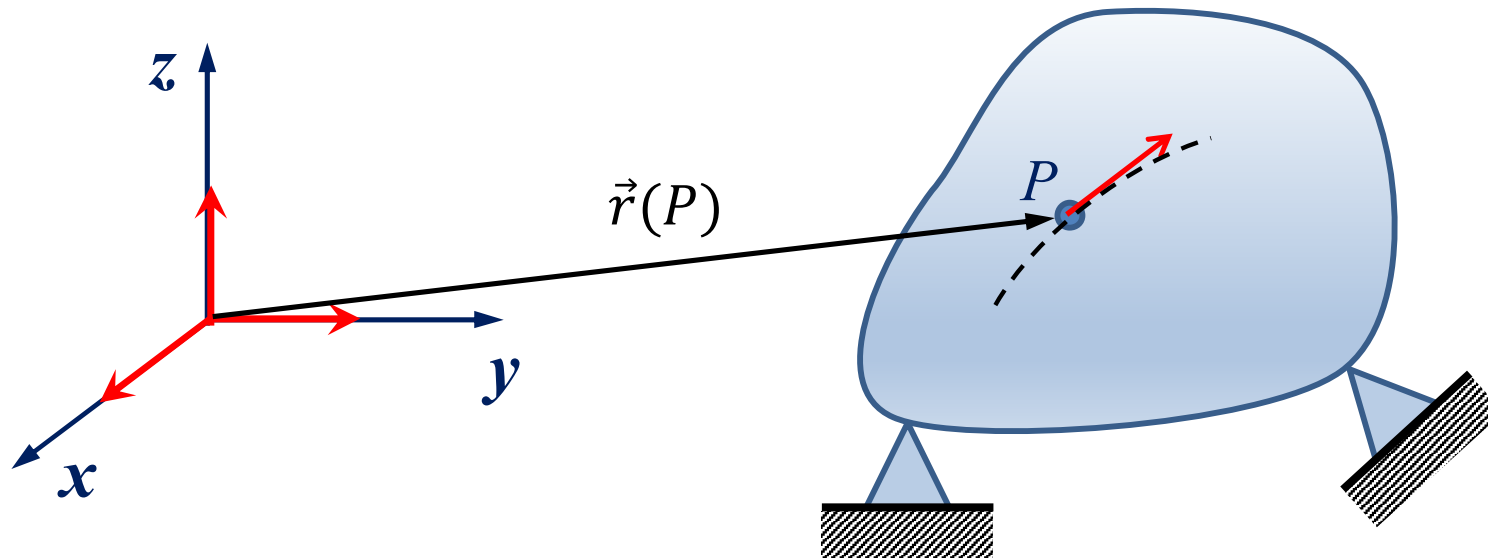
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx} \rightarrow$ distorções entre duas fibras que passam pelo ponto P e alinhadas (na configuração de referência) com as direções de $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, $(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$, e $(\vec{e}_z, \vec{e}_x)$, respectivamente.



4. Família de alongamentos



Sejam:

dl_r = comprimento infinitesimal (na configuração de referência) de uma fibra que passa por um dado ponto P e está orientada segundo uma dada direção $\vec{n}$;

dl = comprimento (na configuração deformada) da mesma fibra.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Definimos o estiramento da fibra como:

$$\lambda = \frac{dl}{dl_r}$$

E observamos que:

1. λ é um adimensional e sempre será um número real positivo;
2. Se $\lambda > 1$, há um aumento no comprimento da fibra;
3. Se $0 < \lambda < 1$, há uma diminuição no comprimento da fibra;
4. Se $\lambda = 1$, não há variação no comprimento da fibra.

A partir do estiramento λ é possível definir vários alongamentos relacionados, como:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Alongamento linear:

$$\varepsilon = \frac{dl - dl_r}{dl_r} = \frac{dl}{dl_r} - 1 = \lambda - 1$$

- Alongamento quadrático (ou de Green):

$$\varepsilon_q = \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{(dl)^2 - (dl_r)^2}{(dl_r)^2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dl}{dl_r} \right)^2 - 1 \right] = \frac{\lambda^2 - 1}{2}$$

- Alongamento natural, logarítmico ou de Hencky:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 = \ln \left(\frac{dl}{dl_r} \right) = \ln(\lambda)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Alongamento hiperbólico ou de Reiner:

$$\varepsilon_h = \varepsilon_{-1} = \frac{dl - dl_r}{dl} = 1 - \frac{dl_r}{dl} = 1 - \lambda^{-1}$$

- Alongamento de Almansi:

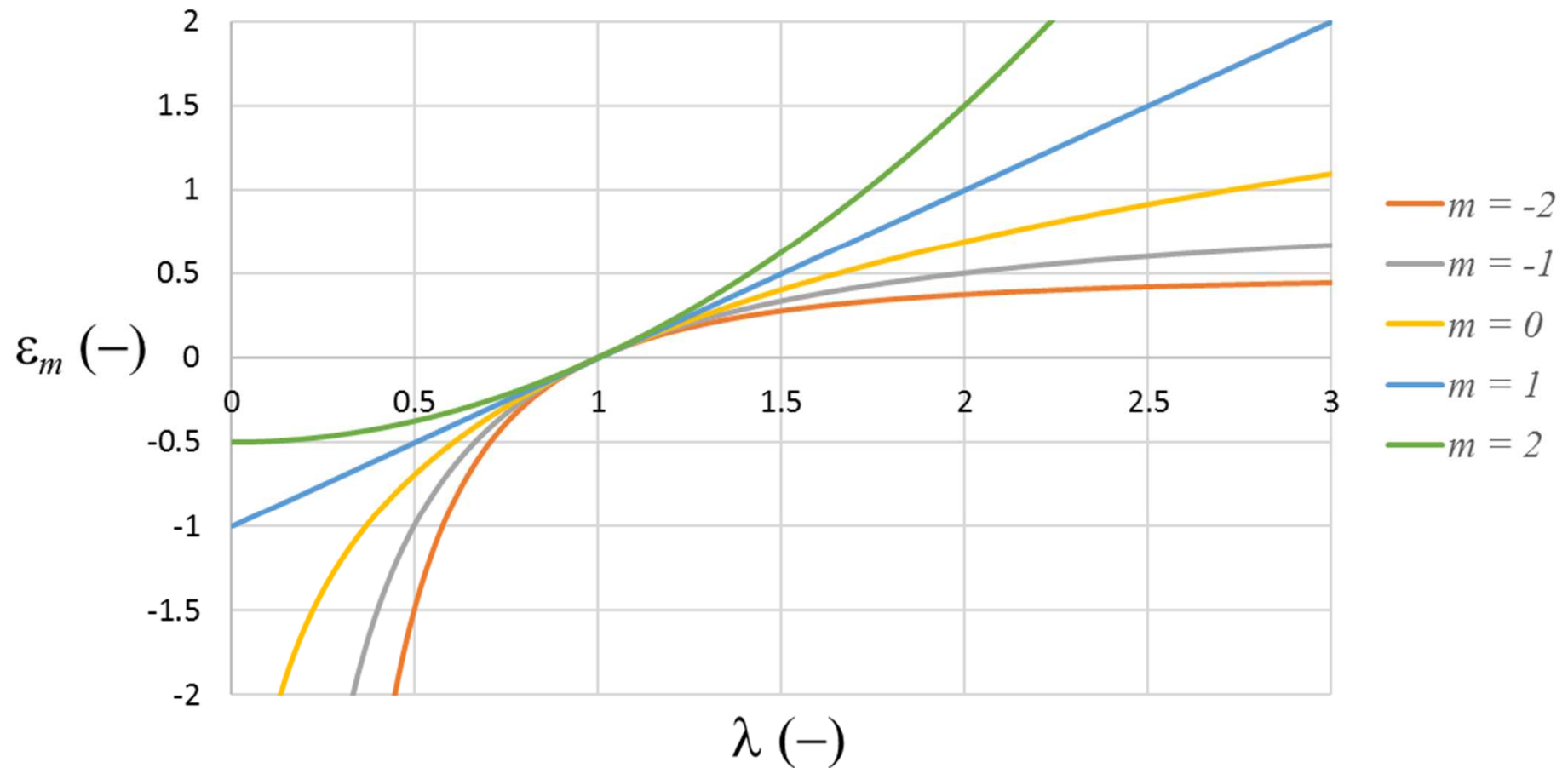
$$\varepsilon_A = \varepsilon_{-2} = \frac{1}{2} \frac{(dl)^2 - (dl_r)^2}{(dl)^2} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{dl_r}{dl} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} [1 - \lambda^{-2}]$$

Todos esses alongamentos pertencem à família de alongamentos dada por:

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{1}{m} (\lambda^m - 1), & \text{se } m \neq 0 \\ \ln(\lambda), & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

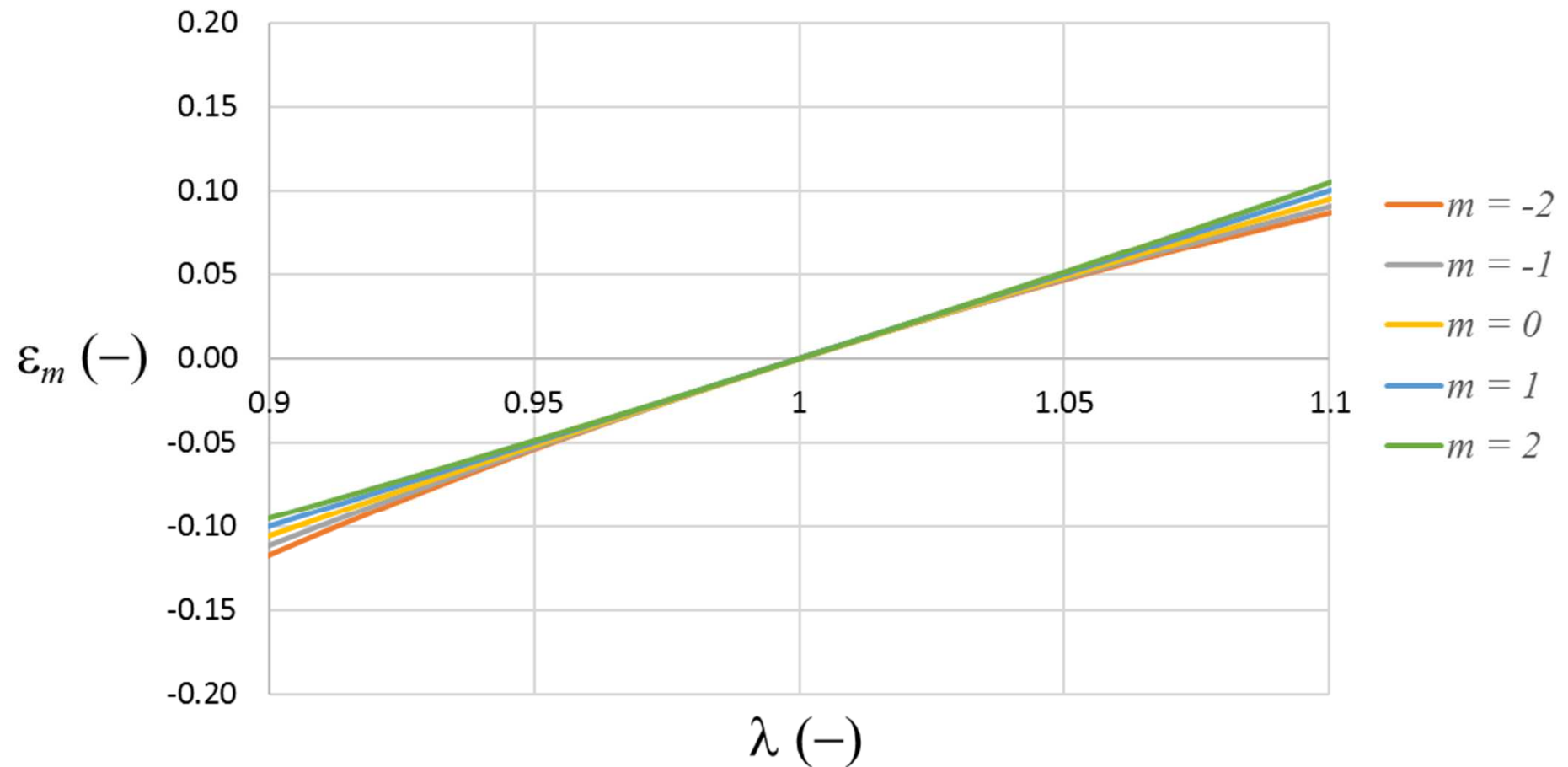


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

1. Independentemente do alongamento considerado, temos:

$$\lambda > 1 \Leftrightarrow \varepsilon_m > 0$$

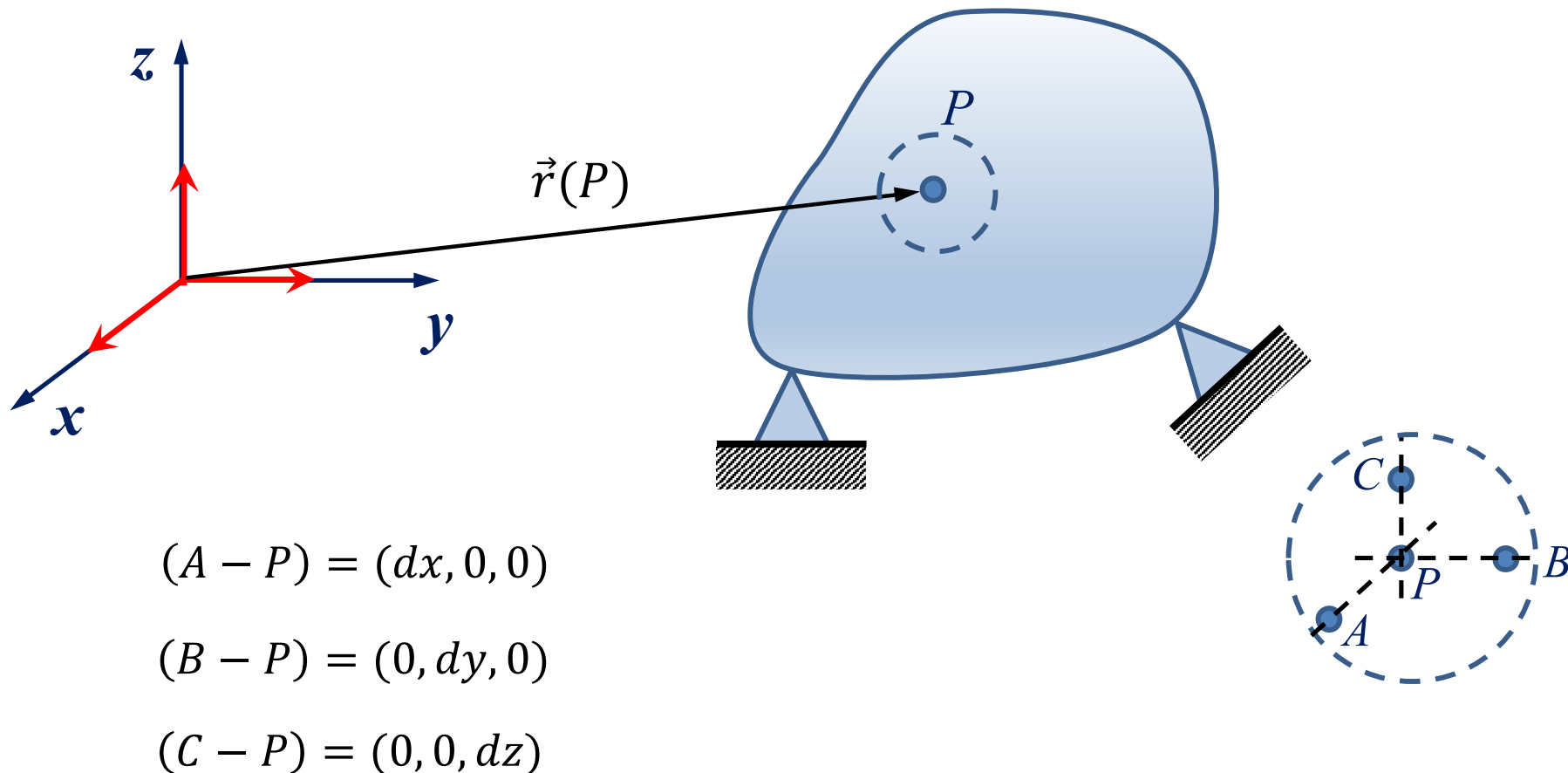
$$\lambda = 1 \Leftrightarrow \varepsilon_m = 0$$

$$0 < \lambda < 1 \Leftrightarrow \varepsilon_m < 0$$

2. É possível mostrar que a família de alongamentos é contínua no parâmetro m (expoente do estiramento);
3. Para $|\varepsilon| < 1\%$ e $|m| \leq 2$, o erro cometido ao aproximarmos o valor do alongamento (associado a $m \neq 1$) com o valor do alongamento linear (associado a $m = 1$) é inferior a 0,5% em valor absoluto. Assim, em condições de L.G., as diferenças entre os valores dos diversos alongamentos é insignificante;



5. Relações deformações-deslocamentos em coordenadas cartesianas





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Cálculo dos alongamentos:

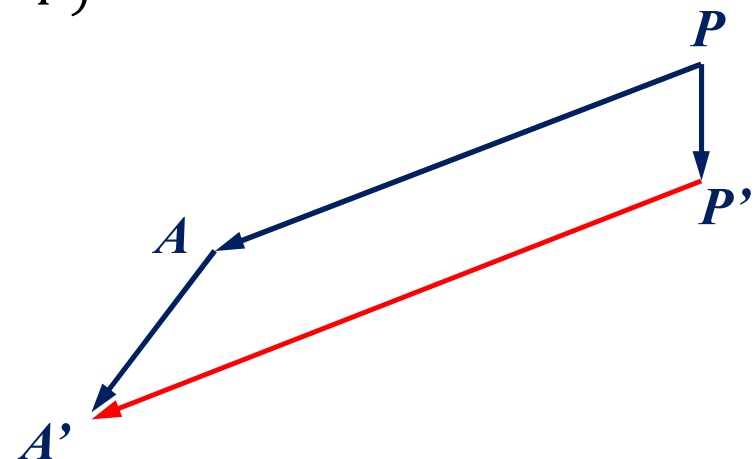
$$\varepsilon_x = \lambda_x - 1 \quad \lambda_x = \frac{dl}{dl_r} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\|A' - P'\|}{\|A - P\|}$$

$$(A - P) = (dx, 0, 0) \Rightarrow \|A - P\| = |dx|$$

$$(A' - P') = (A' - A) + (A - P) - (P' - P)$$

$$(A' - A) = (u_A, v_A, w_A)$$

$$(P' - P) = (u_P, v_P, w_P)$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo:

$$(A' - P') = (u_A - u_P + dx, v_A - v_P, w_A - w_P)$$

$$u_A \cong u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \quad v_A \cong v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \quad w_A \cong w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx$$

$$(A' - P') \cong \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) dx$$

$$\|A' - P'\| \cong \left(\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right)^{1/2} |dx|$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\lambda_x = \frac{dl}{dl_r} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\|A' - P'\|}{\|A - P\|} = \left(\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Logo:

$$\varepsilon_x = \lambda_x - 1 = \left(\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\varepsilon_{x,q} = \frac{1}{2} (\lambda_x^2 - 1) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 1 \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Linearizando as expressões de ε_x e de $\varepsilon_{x,q}$ encontramos:

$$\varepsilon_x \cong \left| 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right| - 1 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{x,q} \cong \frac{\partial u}{\partial x}$$

Assim, em condições de linearidade geométrica, vale:

$$\varepsilon_x \cong \varepsilon_{x,q} \cong \frac{\partial u}{\partial x}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Procedendo de forma análoga com as fibras tomadas nas duas outras direções, encontramos:

Para o alongamento ε_y :

$$\varepsilon_y = \lambda_y - 1 = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\varepsilon_{y,q} = \frac{1}{2} (\lambda_y^2 - 1) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\text{L.G.:} \quad \varepsilon_y \cong \varepsilon_{y,q} \cong \frac{\partial v}{\partial y}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para o alongamento ε_z :

$$\varepsilon_z = \lambda_z - 1 = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

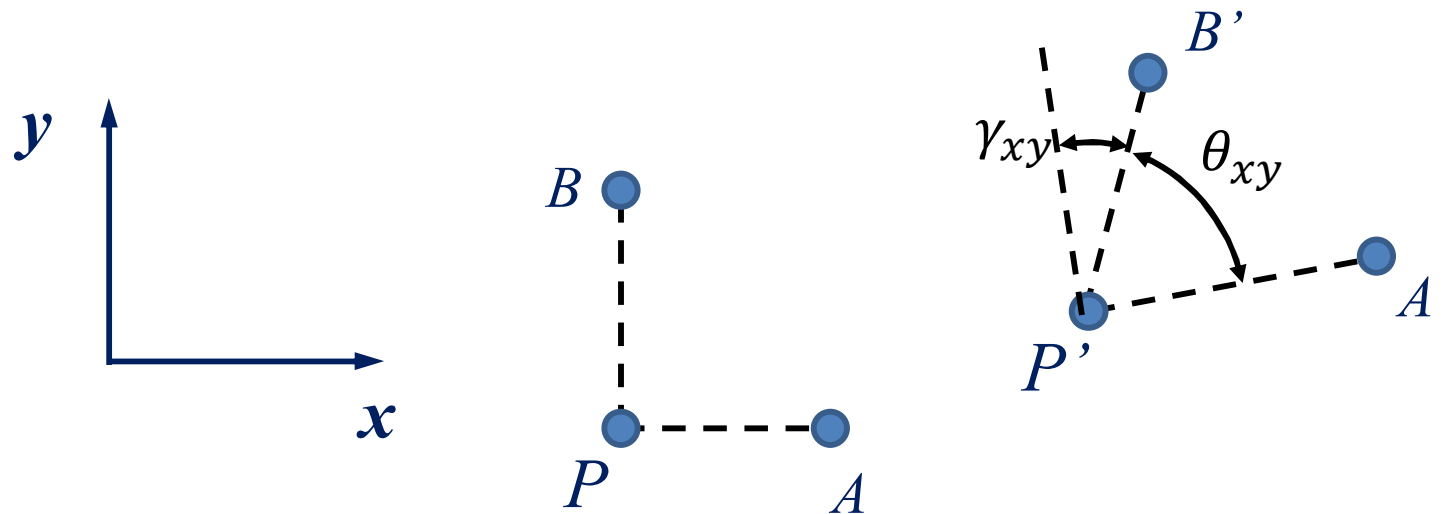
$$\varepsilon_{z,q} = \frac{1}{2} (\lambda_z^2 - 1) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\text{L.G.:} \quad \varepsilon_z \cong \varepsilon_{z,q} \cong \frac{\partial w}{\partial z}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Cálculo das distorções:



$$\gamma_{xy} + \theta_{xy} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_{xy} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta_{xy}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right) = \sin(\gamma_{xy})$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\text{sen}(\gamma_{xy}) = \cos(\theta_{xy}) = \left(\frac{A' - P'}{\|A' - P'\|} \right) \cdot \left(\frac{B' - P'}{\|B' - P'\|} \right)$$

$$\lambda_x = \frac{\|A' - P'\|}{\|A - P\|} \Leftrightarrow \|A' - P'\| = \lambda_x |dx| = \lambda_x dx \quad (\text{considerando } dx > 0)$$

$$\lambda_y = \frac{\|B' - P'\|}{\|B - P\|} \Leftrightarrow \|B' - P'\| = \lambda_y |dy| = \lambda_y dy \quad (\text{considerando } dy > 0)$$

$$(A' - P') \cong \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) dx \quad (\text{vide slide \#21})$$

$$(B' - P') \cong \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), 1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) dy \quad (\text{por analogia})$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\left(\frac{A' - P'}{\|A' - P'\|} \right) \cdot \left(\frac{B' - P'}{\|B' - P'\|} \right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_x \cdot \lambda_y} \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \cdot \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), 1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)$$

$$\text{sen}(\gamma_{xy}) = \frac{1}{\lambda_x \cdot \lambda_y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

Linearizando a expressão (admitindo condições de L.G.):

$$\gamma_{xy} \cong \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Procedendo de forma análoga com os pares de fibras tomados nas demais direções, encontramos:

Para a distorção γ_{yz} :

$$\text{sen}(\gamma_{yz}) = \frac{1}{\lambda_y \cdot \lambda_z} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

Linearizando a expressão (admitindo condições de L.G.):

$$\gamma_{yz} \cong \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para a distorção γ_{zx} :

$$\text{sen}(\gamma_{zx}) = \frac{1}{\lambda_z \cdot \lambda_x} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

Linearizando a expressão (admitindo condições de L.G.):

$$\gamma_{zx} \cong \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Deformações, (2021), 69p.
- [2] Popov, E.P. Engineering Mechanics of Solids, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1998, 864p.
- [3] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.7