



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #08

(Exercícios – Estudo das Tensões)

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

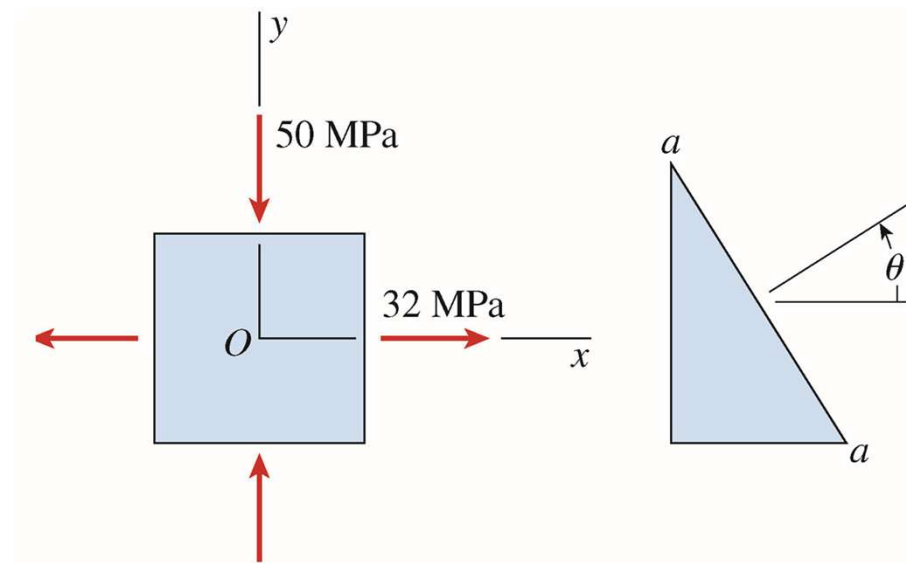
27/08/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercícios Propostos (Livro-Texto):

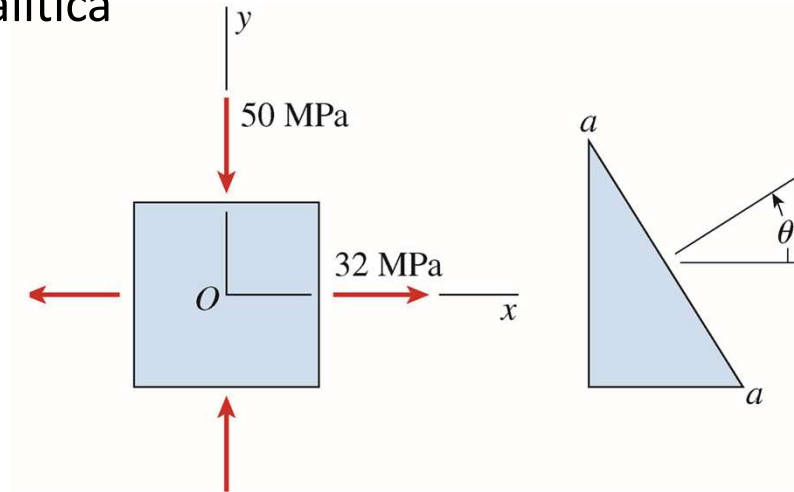
7.2-14. Em dado ponto na superfície de uma máquina, o material está em *tensão biaxial*, com $\sigma_x = 32$ MPa e $\sigma_y = -50$ MPa. Verifique se existe algum plano inclinado, com normal externa definida pelo ângulo θ (com $0 \leq \theta \leq \pi/2$) de forma que não haja tensão normal atuando no plano inclinado. Esboce um elemento de tensão tendo o plano inclinado como um de seus lados e mostre todas as tensões agindo no elemento.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução 1: forma analítica



$$\{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [T]_b = \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}$$

$$\{\vec{\rho}\} = [T]\{\vec{n}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos\theta \\ \sigma_y \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\{\vec{\rho}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos\theta \\ \sigma_y \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A componente normal do vetor tensão é dada por:

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta$$

Impondo que a componente normal seja nula, chegamos a:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow \tan^2\theta = -\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

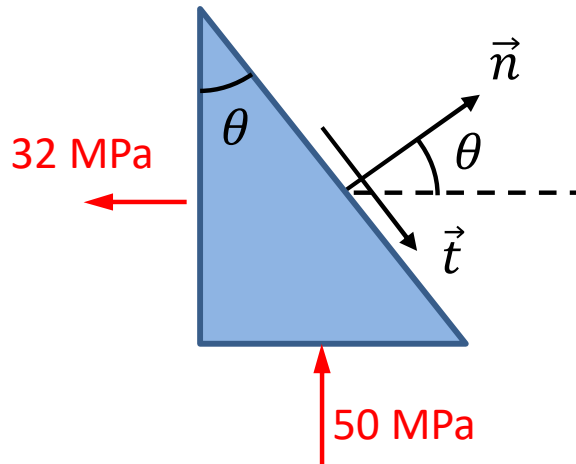
No caso em tela, sendo $\sigma_x = 32$ MPa e $\sigma_y = -50$ MPa, virá:

$$\tan^2\theta = 0,64 \Leftrightarrow |\tan\theta| = 0,8 \Leftrightarrow \theta \cong \pm 38,66^\circ$$

E como, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, virá: $\theta = +38,66^\circ$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\{\vec{t}\} = (\text{sen}\theta, -\text{cos}\theta, 0) \quad \{\vec{\rho}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \text{cos}\theta \\ \sigma_y \text{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau = \vec{\rho} \cdot \vec{t} = (\sigma_x - \sigma_y) \text{sen}\theta \text{cos}\theta$$

$$\tau = (32 + 50) \text{sen}(38,66^\circ) \text{cos}(38,66^\circ) \text{ (MPa)}$$

$$\tau = 40 \text{ MPa}$$

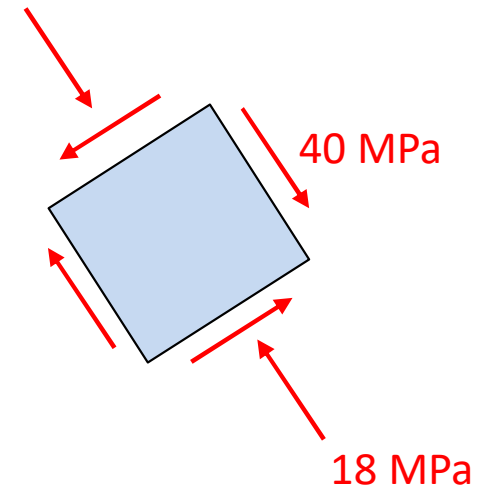
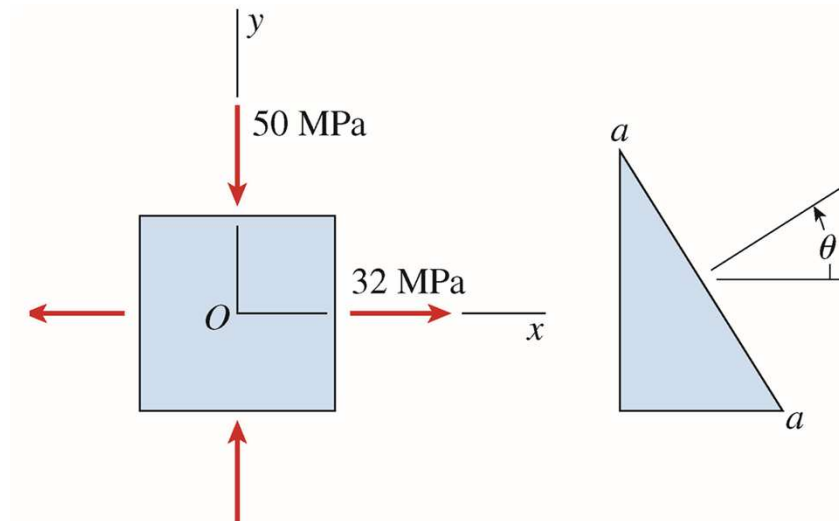
Ou, de outra forma, lembrando que neste caso não há componente normal do vetor tensão:

$$\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2 \Leftrightarrow \rho^2 = \tau^2 \Leftrightarrow |\tau| = \sqrt{(\sigma_x \text{cos}\theta)^2 + (\sigma_y \text{sen}\theta)^2}$$

$$|\tau| = 40 \text{ MPa}$$



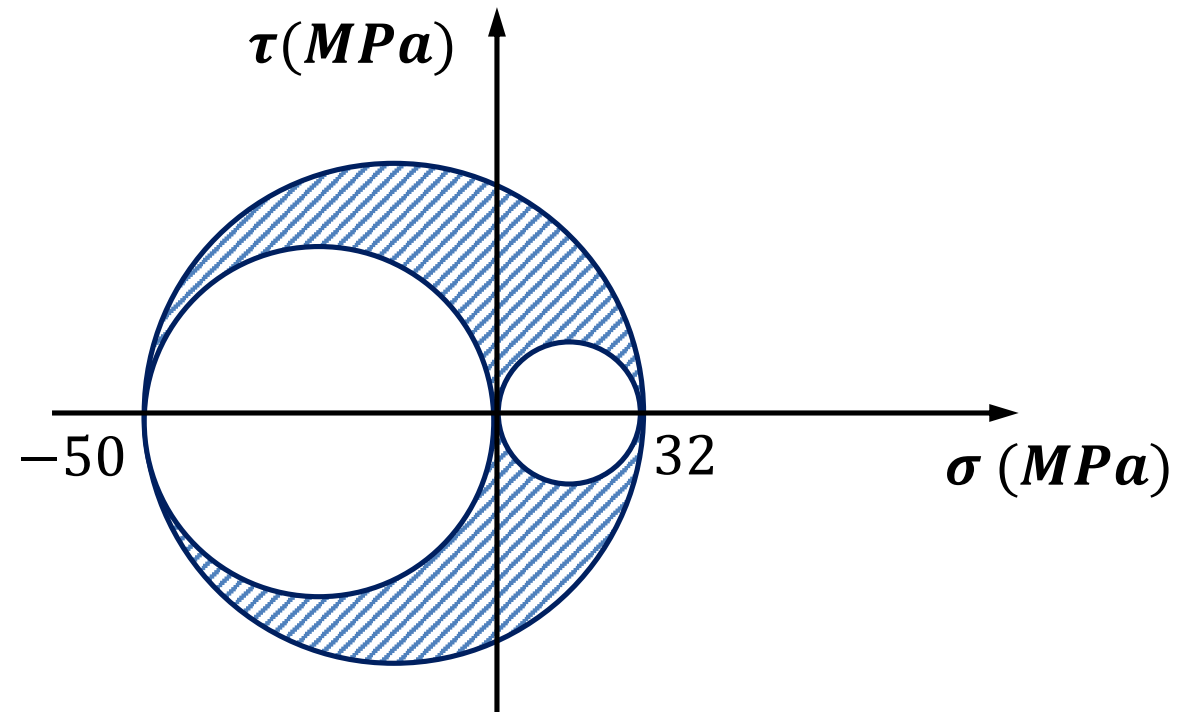
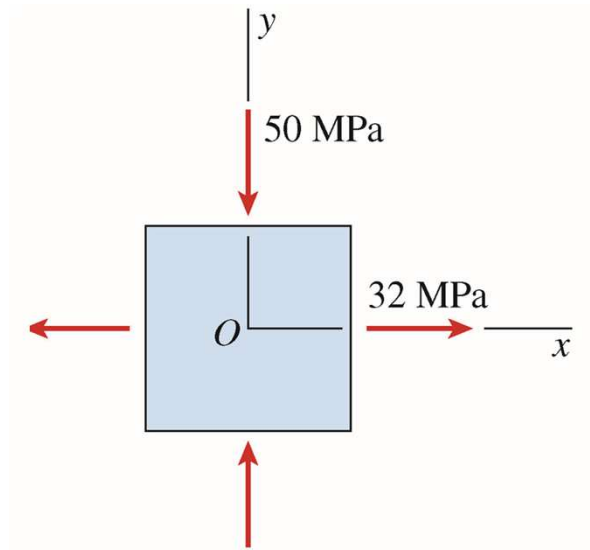
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$I_1 = \text{tr}(T) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 32 - 50 + 0 = -18 \text{ MPa}$$



Solução 2: Pelos círculos de Mohr das tensões



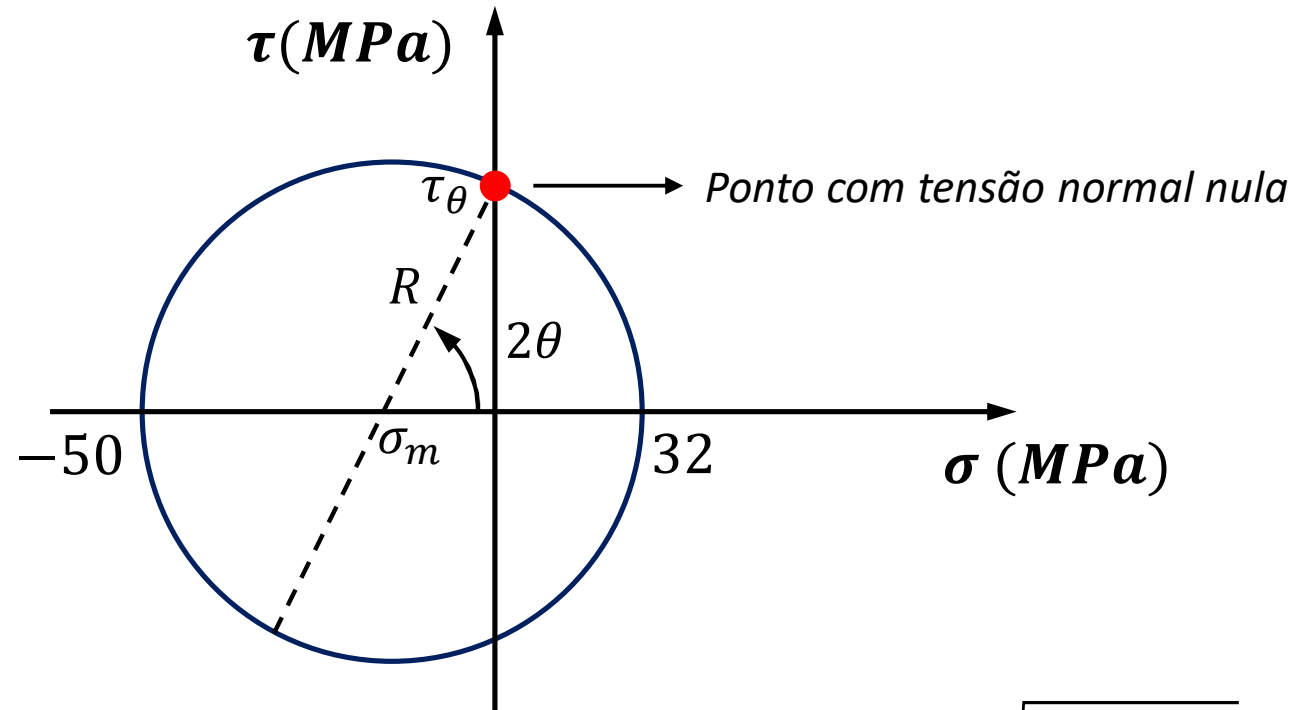
$$\sigma_1 = 32 MPa$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -50 MPa$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{(32) + (-50)}{2} = -9 \text{ MPa}$$

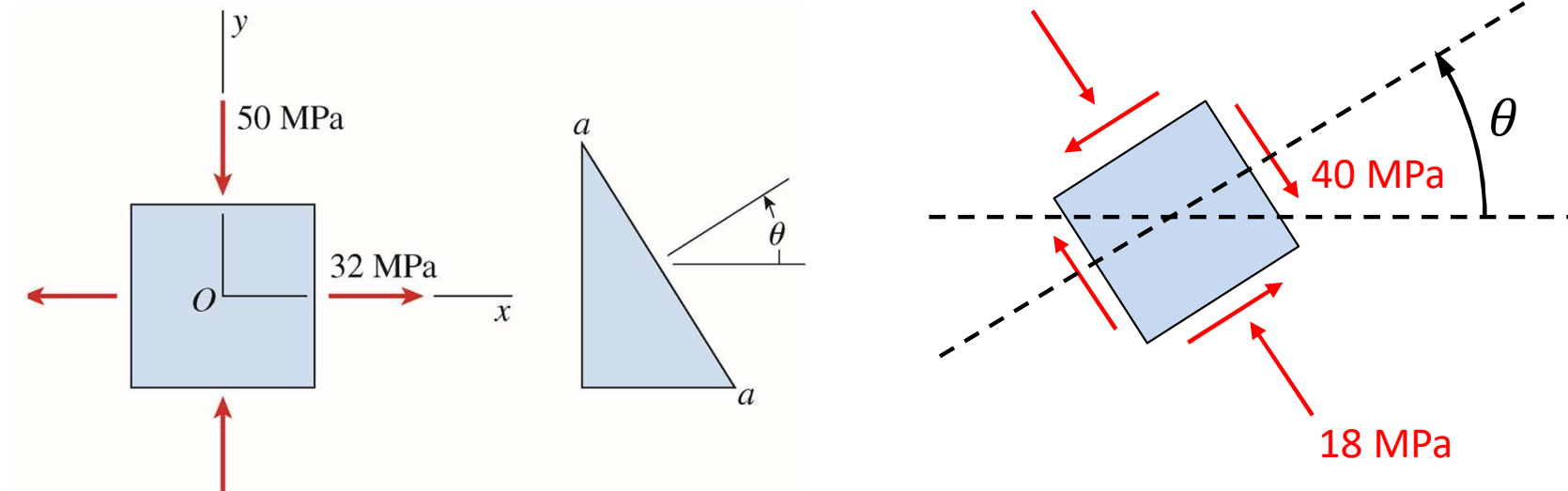
$$\tau_\theta = R \sin(2\theta) = 41 \sqrt{1 - \left(\frac{9}{41}\right)^2} = 40 \text{ MPa}$$

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{(32) - (-50)}{2} = 41 \text{ MPa}$$

$$\cos(2\theta) = \frac{|\sigma_m|}{R} = \frac{9}{41} \cong 0,2195122 \Rightarrow \theta \cong 38,66^\circ$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Note que, pela convenção de sinais (para os círculos de Mohr), se a tensão de cisalhamento na face orientada em um ângulo θ em relação ao eixo Ox é positiva, então ela gira o elemento no sentido horário (vide Aula #06, slides 12 e 13).

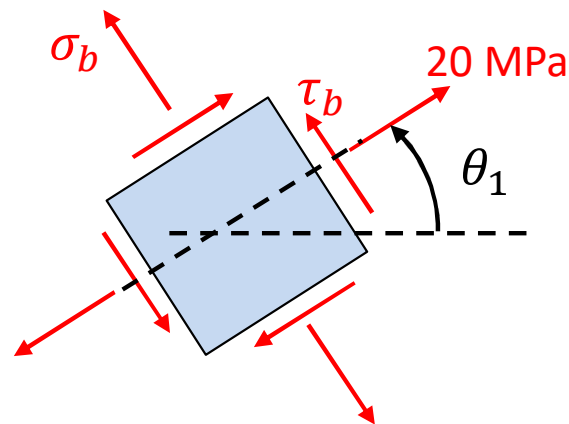
Pelo círculo de Mohr, vemos também que a tensão normal que atua na face orientada em um ângulo $\theta + \pi/2$ em relação ao eixo Ox é dada por:

$$\sigma' = 2\sigma_m = -18MPa$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

7.2-19. No ponto de uma estrutura submetida ao estado plano de tensões, as tensões são $\sigma_x = -40$ MPa, $\sigma_y = 25$ MPa e $\tau_{xy} = 28$ MPa. Um elemento de tensão localizado no mesmo ponto da estrutura, mas orientado a um ângulo anti-horário θ_1 em relação ao eixo x , está submetido às tensões ilustradas na figura. Admitindo que $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$, determine as tensões σ_b , τ_b e o ângulo θ_1 .





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução 1: forma analítica

Pelos dados do problema, o tensor das tensões no ponto indicado, e na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fica:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} -40 & 28 & 0 \\ 28 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}$$

O plano considerado possui normal externa unitária dada por:

$$\{\vec{n}\} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então:

$$\{\vec{\rho}\} = [T]\{\vec{n}\} = \begin{bmatrix} -40 & 28 & 0 \\ 28 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40\cos\theta_1 + 28\sin\theta_1 \\ 28\cos\theta_1 + 25\sin\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Sabemos que a tensão normal no plano de normal $\vec{n}$ é dada por:

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = -40\cos^2\theta_1 + 56\sin\theta_1\cos\theta_1 + 25\sin^2\theta_1 = 20 \text{ (MPa)}$$

$$-40\left(\frac{1 + \cos(2\theta_1)}{2}\right) + 28\sin(2\theta_1) + 25\left(\frac{1 - \cos(2\theta_1)}{2}\right) = 20$$

$$-20 - 20\cos(2\theta_1) + 28\sin(2\theta_1) + 12,5 - 12,5\cos(2\theta_1) = 20$$

$$-32,5\cos(2\theta_1) + 28\sin(2\theta_1) = 27,5$$

$$\theta_1 \cong 44,56^\circ$$

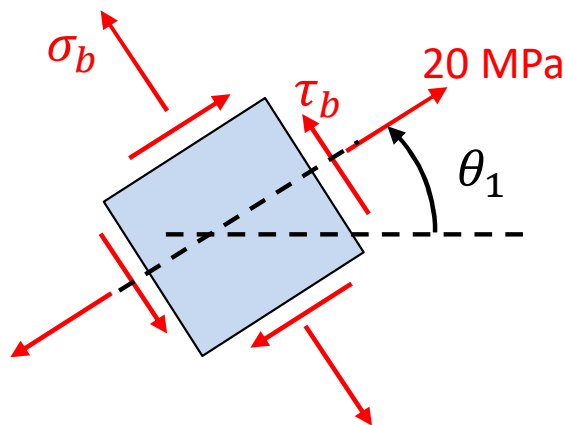


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O vetor tensão fica, então, dado por:

$$\{\vec{\rho}\} = \begin{Bmatrix} -40\cos\theta_1 + 28\sin\theta_1 \\ 28\cos\theta_1 + 25\sin\theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8,852 \\ 37,492 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cálculo de τ_b :



$$\{\vec{t}\} = \begin{Bmatrix} -\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_b = \vec{\rho} \cdot \vec{t} = 8,852\sin\theta_1 + 37,492\cos\theta_1$$

$$\tau_b = 32,92 \text{ MPa}$$

Obs: o sinal positivo obtido para τ_b indica que esta tensão tem o mesmo sentido do versor $\{\vec{t}\}$ (subindo o plano inclinado).

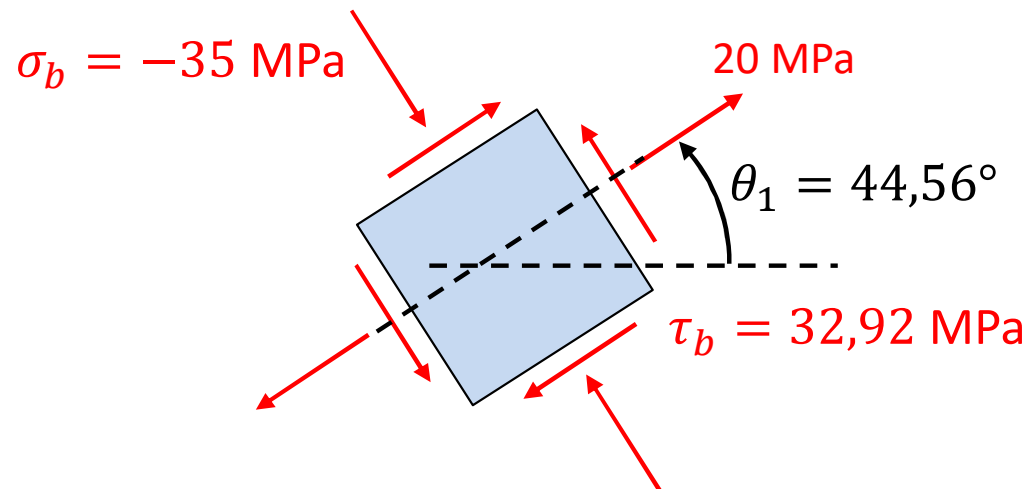


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Cálculo de σ_b :

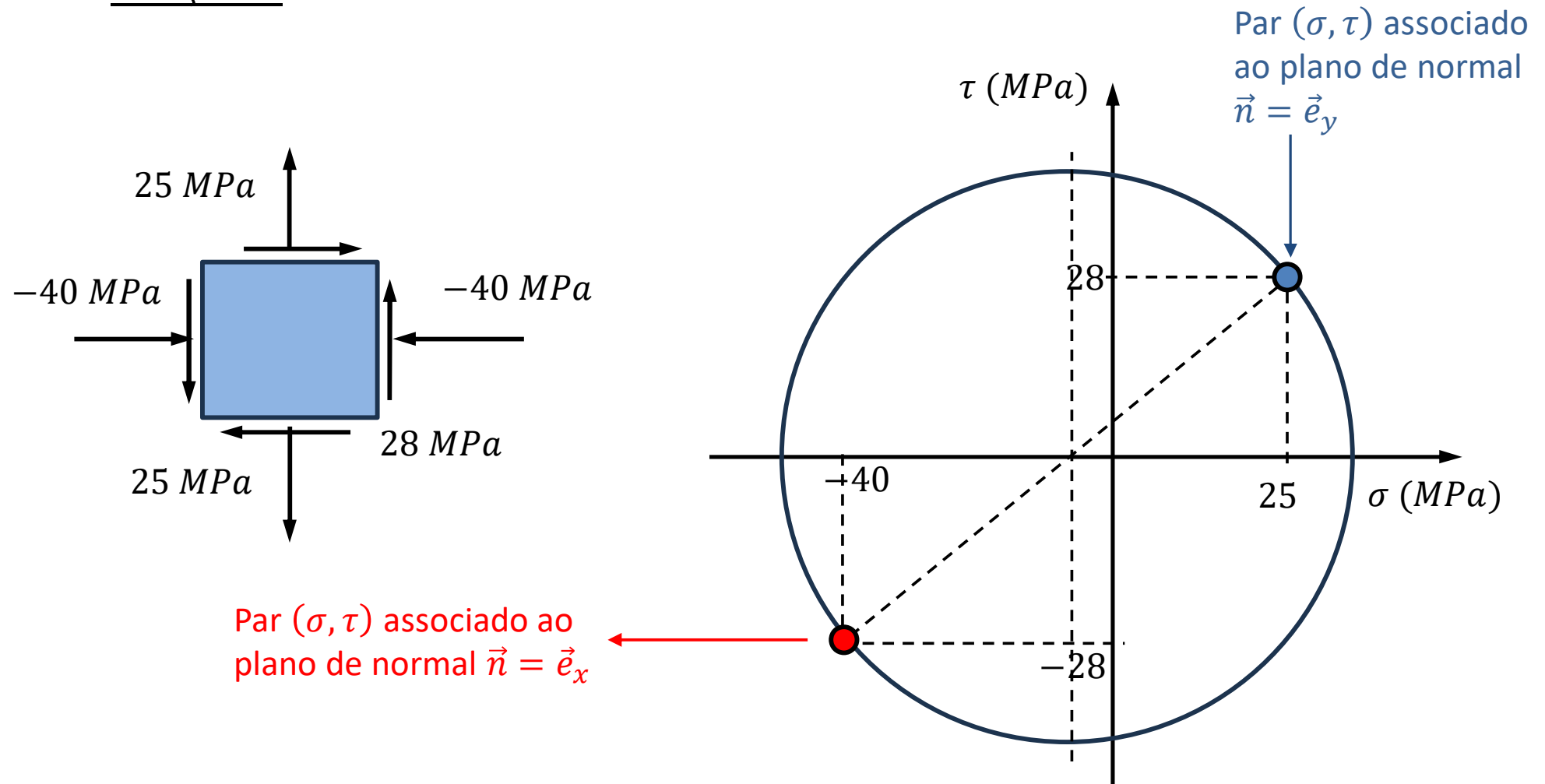
$$I_1 = \text{tr}(T) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -40 + 25 + 0 = -15 \text{ MPa}$$

$$I_1 = 20 + \sigma_b + 0 = -15 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad \sigma_b = -35 \text{ MPa}$$





Solução 2: Pelos círculos de Mohr das tensões





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Parâmetros da circunferência associada ao maior círculo de Mohr:

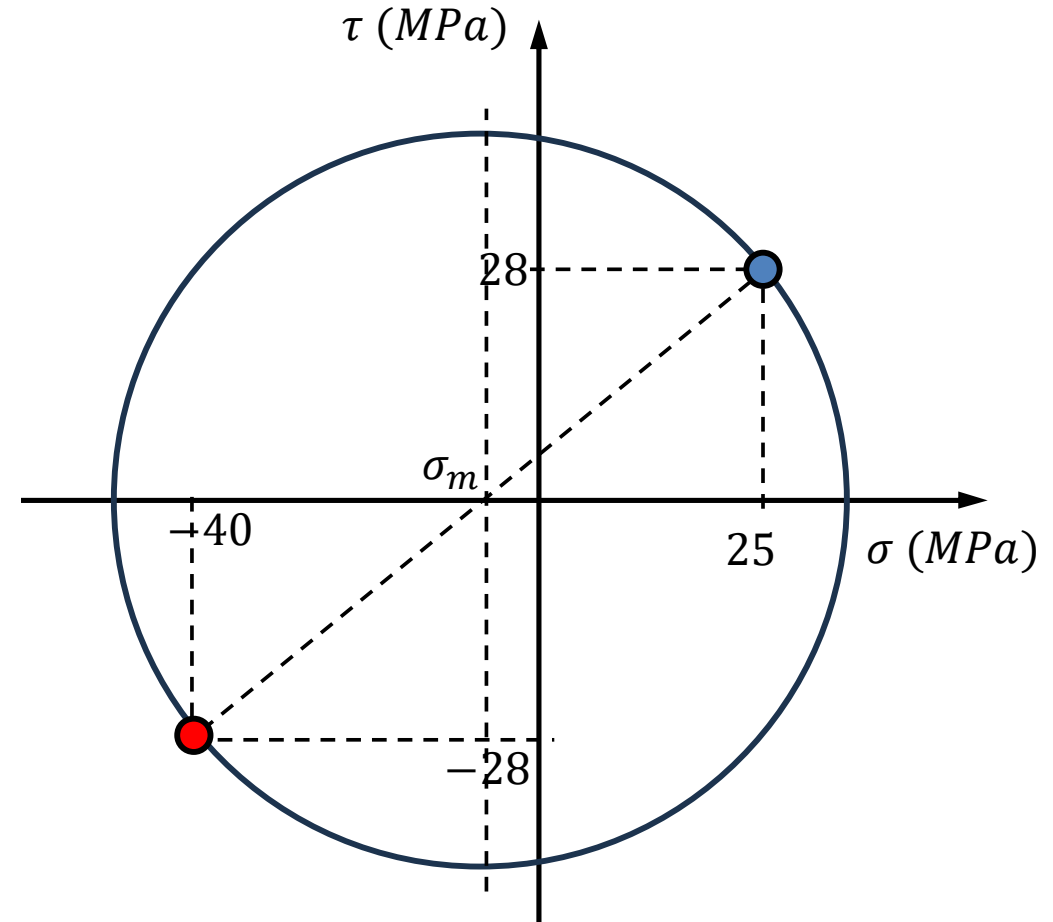
$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-40 + 25}{2} = -7,5 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{-40 - 25}{2}\right)^2 + (28)^2} \cong 42,9 \text{ MPa}$$

Calculando então as tensões principais associadas a esta maior circunferência (maior círculo de Mohr), teremos neste caso específico:

$$\sigma_1 = \sigma_m + R \cong 35,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_m - R \cong -50,4 \text{ MPa}$$

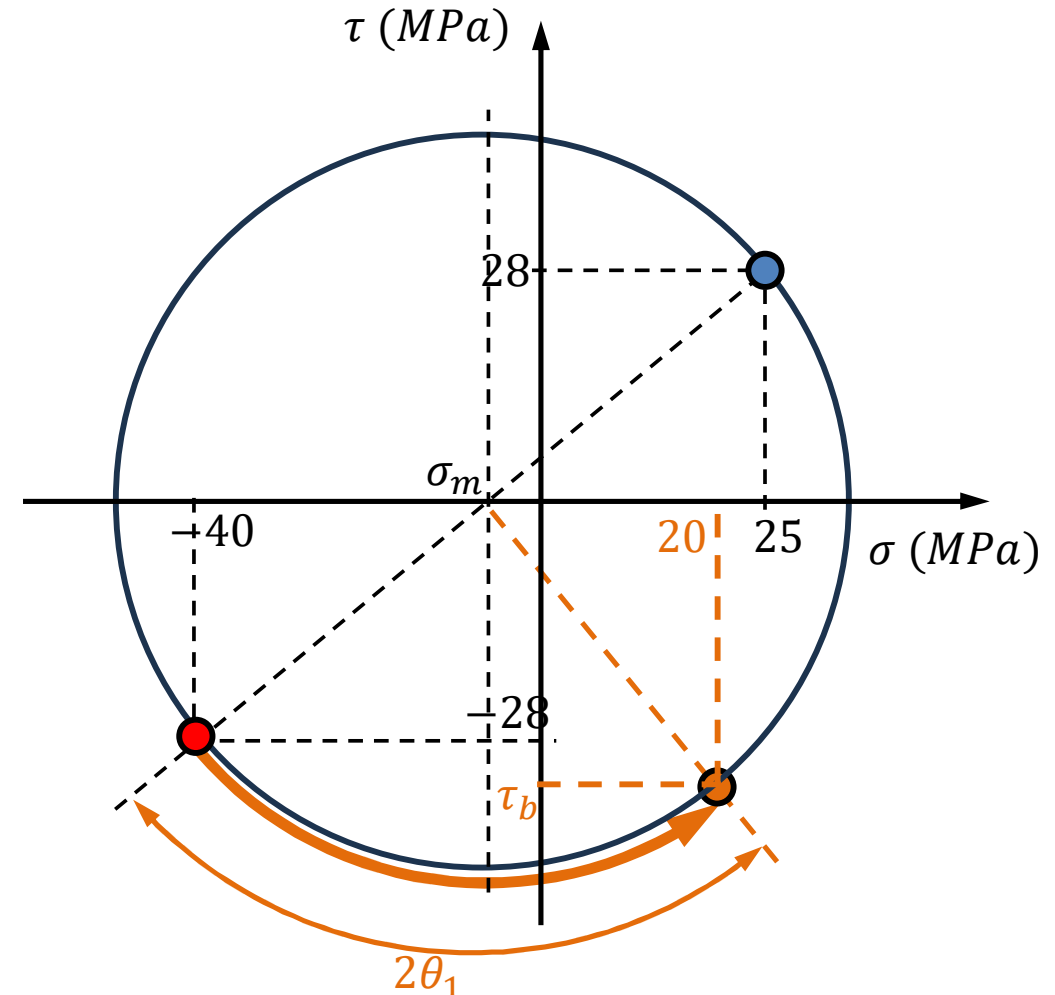




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A rotação do elemento indicado no enunciado corresponde a uma rotação de um ângulo θ_1 (a partir do eixo horizontal, ou seja, a partir da normal $\vec{n} = \vec{e}_x$), no sentido anti-horário, de modo a obtermos uma tensão normal de magnitude $\sigma = 20 MPa$ na face.

Desta forma, devemos partir do ponto vermelho assinalado no maior círculo de Mohr (que corresponde ao par (σ, τ) associado ao plano de normal $\vec{n} = \vec{e}_x$) e girar de um ângulo $2\theta_1$ no mesmo sentido anti-horário até encontrarmos o ponto de tensão normal $\sigma = 20 MPa$ (vide ponto assinalado em laranja na figura ao lado).





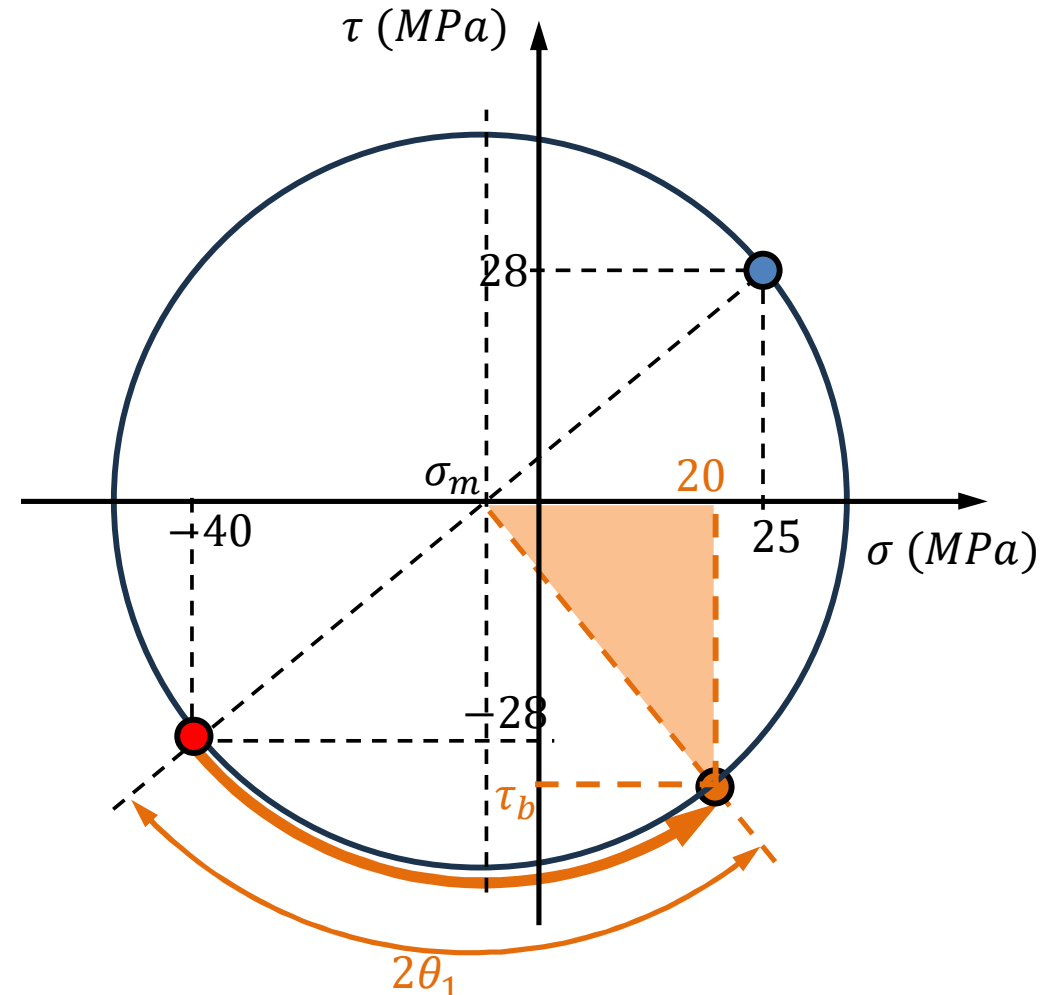
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como estamos navegando no mesmo círculo de Mohr, o raio da circunferência é o mesmo ($R = 42,9 MPa$) e o centro também ($\sigma_m = -7,5 MPa$), o que leva facilmente ao cálculo da tensão de cisalhamento τ_b que atua neste novo plano (vide triângulo retângulo destacado na cor laranja):

$$\tau_b = \sqrt{R^2 - (20 - \sigma_m)^2}$$

$$\tau_b = \sqrt{(42,9)^2 - (20 + 7,5)^2}$$

$$\tau_b \cong 32,92 MPa$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para a determinação do ângulo de rotação θ_1 , podemos utilizar as seguintes relações geométricas e trigonométricas (vide figura ao lado):

$$(1) \quad |\tan(2\beta_1)| = \frac{28}{40-7,5} \cong 0,861538$$

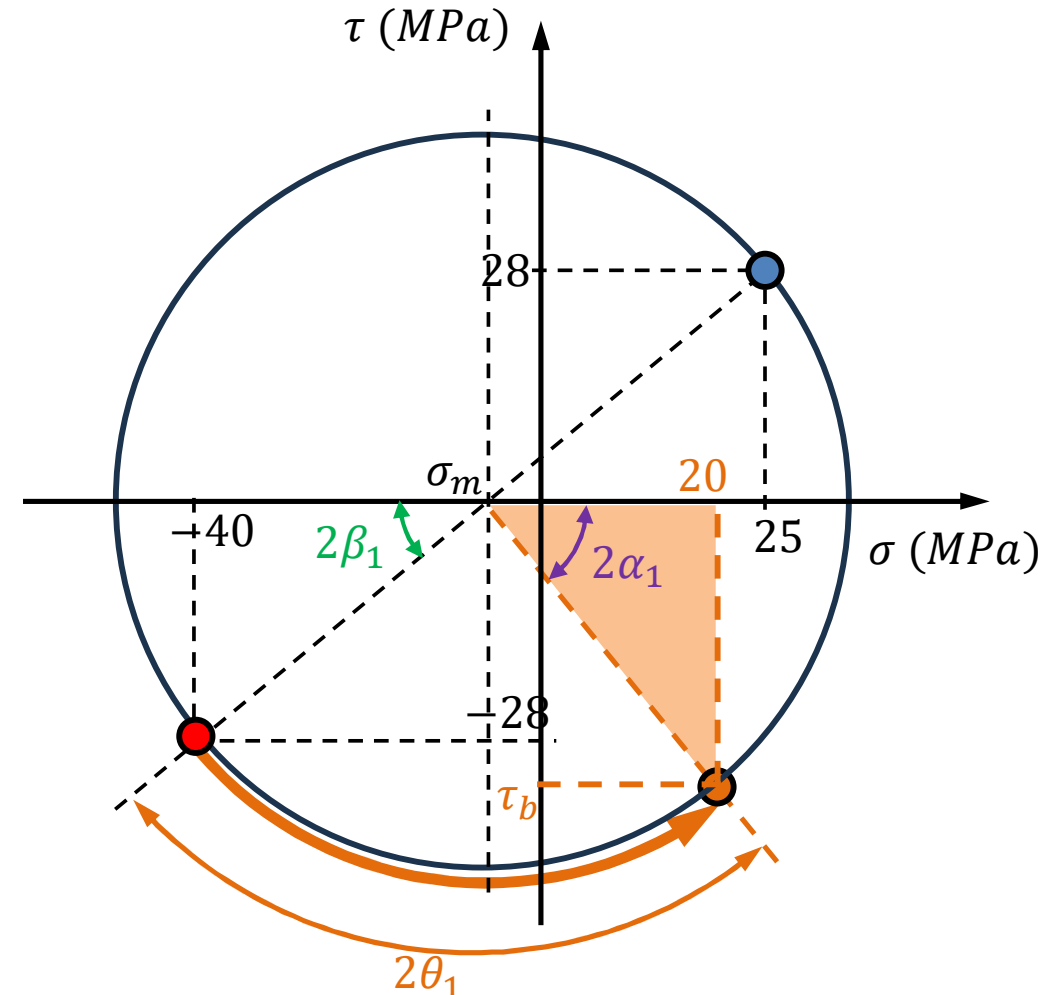
$$\therefore \beta_1 \cong 20,37^\circ$$

$$(2) \quad |\tan(2\alpha_1)| = \frac{32,92}{20+7,5} \cong 1,19709091$$

$$\therefore \alpha_1 \cong 25,06^\circ$$

$$(3) \quad 2\beta_1 + 2\theta_1 + 2\alpha_1 = 180^\circ$$

$$\therefore \theta_1 \cong 44,57^\circ$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E, finalmente, para a determinação da tensão normal σ_b , podemos utilizar a propriedade de que a soma das três tensões normais que atuam no ponto segundo três planos ortogonais entre si é um invariante. Assim:

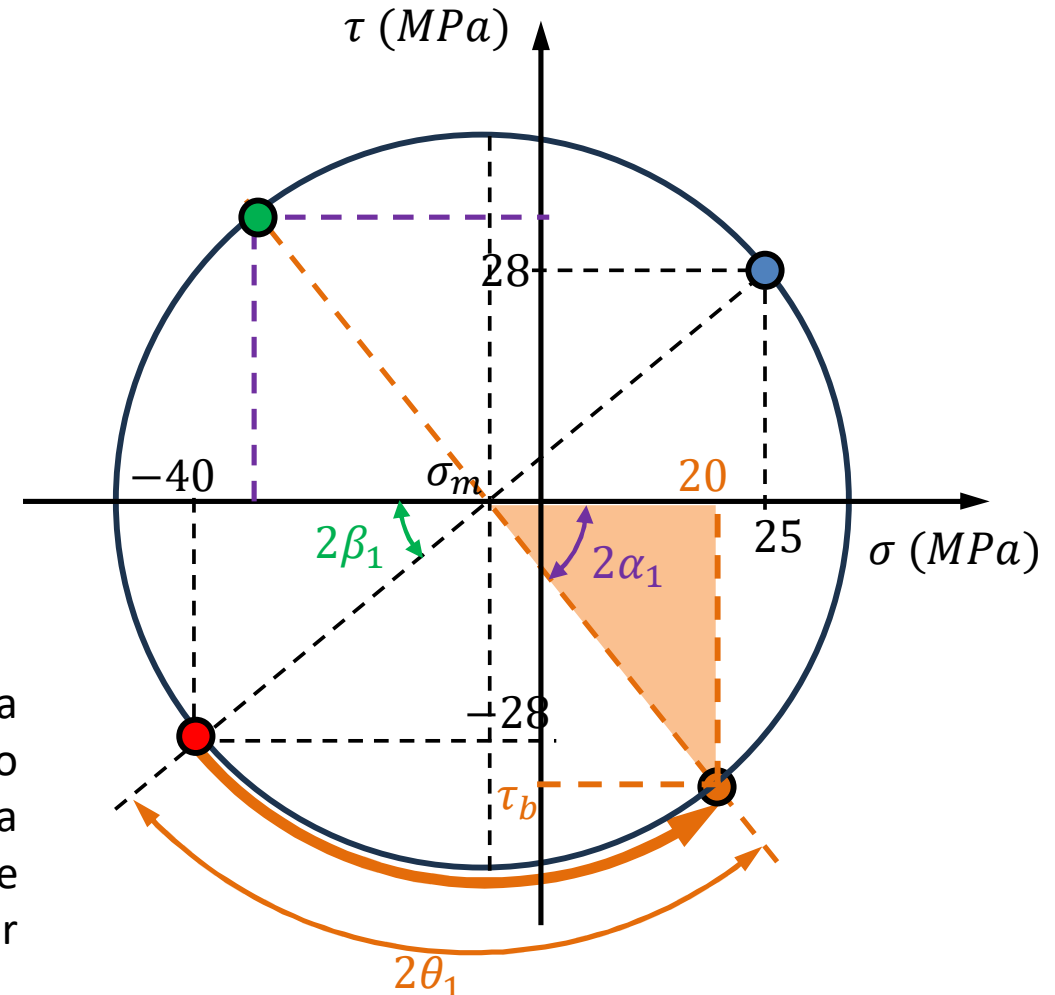
$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -40 + 25 + 0 = -15 \text{ MPa}$$

$$\text{Logo: } \sigma_b + 20 \text{ MPa} = -15 \text{ MPa}$$

$$\therefore \sigma_b = -35 \text{ MPa}$$

Outra possibilidade para a determinação desta tensão é notar que o valor de σ_b corresponde ao valor da tensão normal diametralmente oposta ao ponto de coordenadas $(20, \tau_b)$ no círculo de Mohr das tensões (vide ponto destacado na cor verde na figura ao lado). Assim:

$$\sigma_b = \sigma_m - 27,5 \text{ MPa} = -35 \text{ MPa}$$



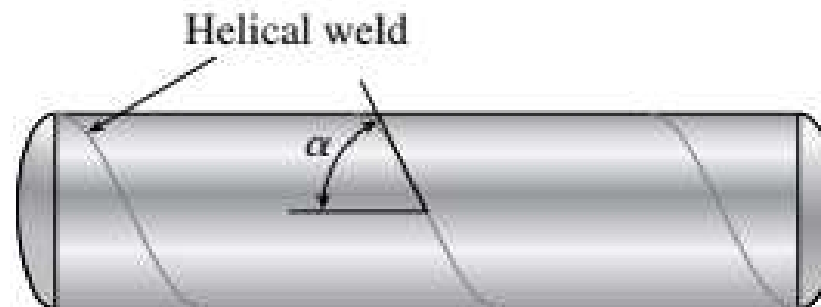


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem *8.3-12 A pressurized steel tank is constructed with a helical weld that makes an angle $\alpha = 55^\circ$ with the longitudinal axis (see figure). The tank has radius $r = 0.6$ m, wall thickness $t = 18$ mm, and internal pressure $p = 2.8$ MPa. Also, the steel has modulus of elasticity $E = 200$ GPa and Poisson's ratio $\nu = 0.30$.

Determine the following quantities for the cylindrical part of the tank.

- (a) The circumferential and longitudinal stresses.
- (b) The maximum in-plane and out-of-plane shear stresses.
- (c) The circumferential and longitudinal strains.
- (d) The normal and shear stresses acting on planes parallel and perpendicular to the weld (show these stresses on a properly oriented stress element).





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução (utilizando fórmulas aproximadas):

$$\frac{t}{R_m} = \frac{t}{r} = \frac{18}{600} = 0,03 < 0,1 \quad (\text{trata-se de um vaso de parede fina})$$

a) Cálculo da tensão circunferencial e longitudinal:

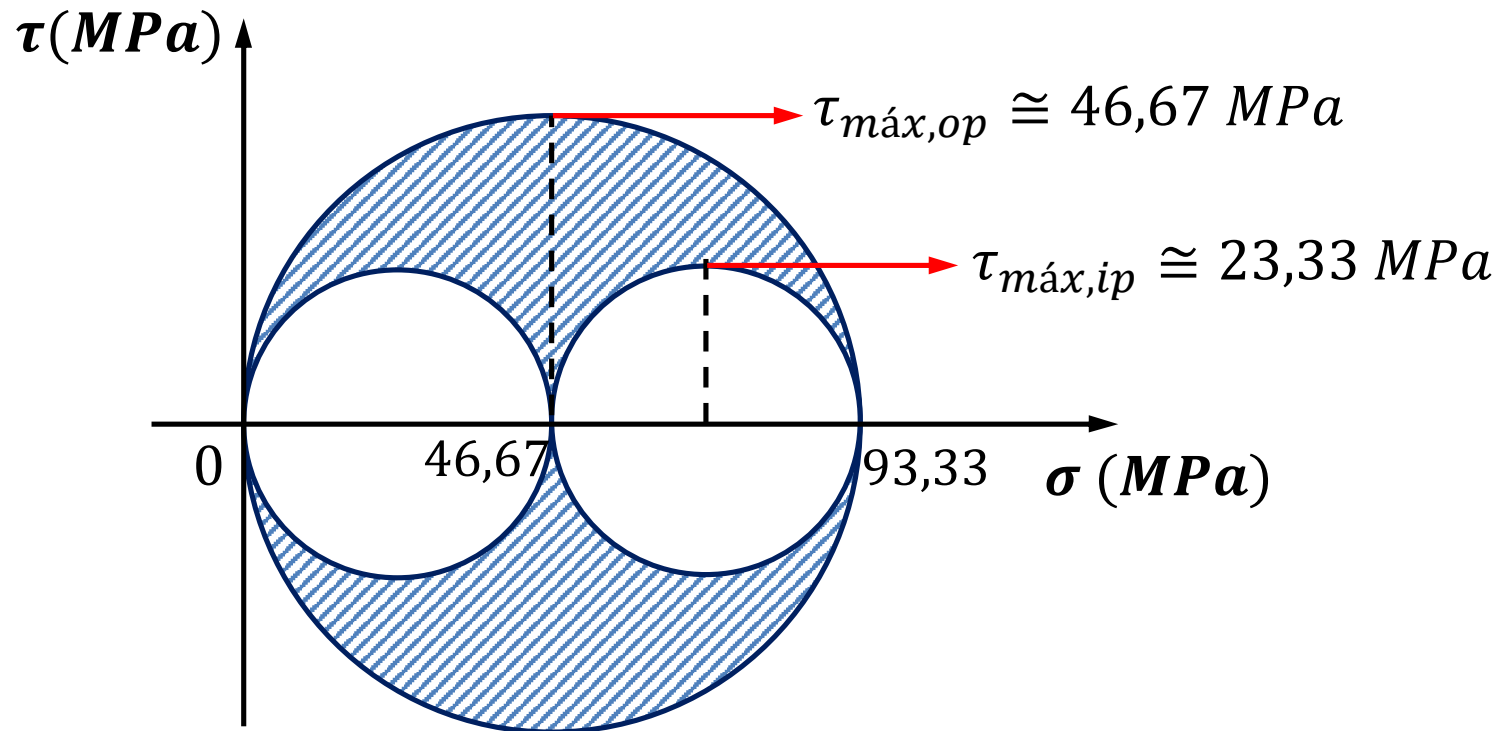
$$\sigma_c \cong \frac{pr}{t} = \frac{2,8 \times 600}{18} = 93,33 \text{ MPa} = \sigma_1$$

$$\sigma_L \cong \frac{pr}{2t} = \frac{2,8 \times 600}{2 \times 18} = 46,67 \text{ MPa} = \sigma_2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

b) Cálculo da máxima tensão cisalhante no plano (in-plane) e da máxima tensão de cisalhamento fora do plano (out-of-plane):





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

c) Cálculo das deformações (circunferencial e longitudinal):

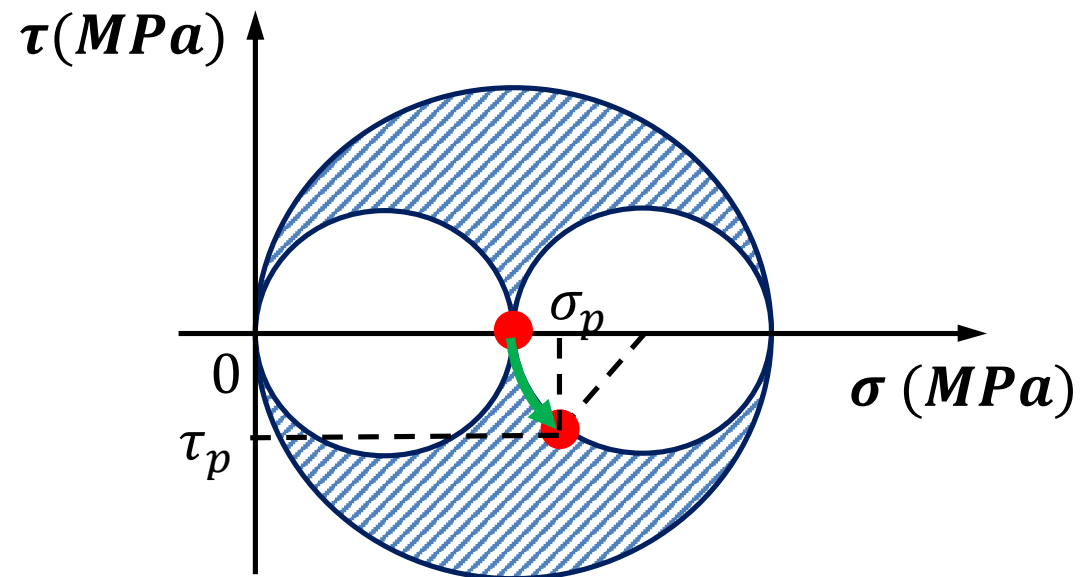
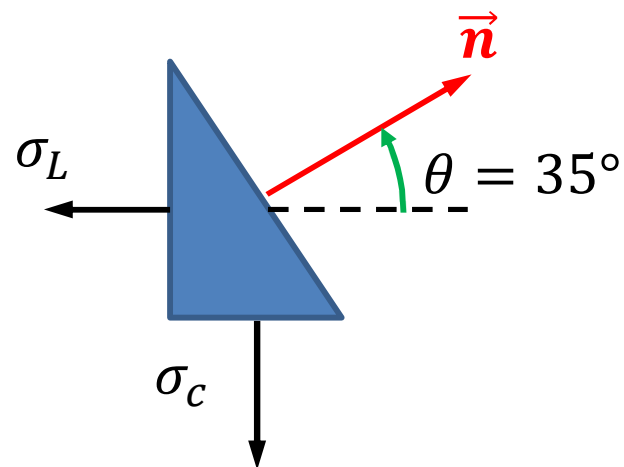
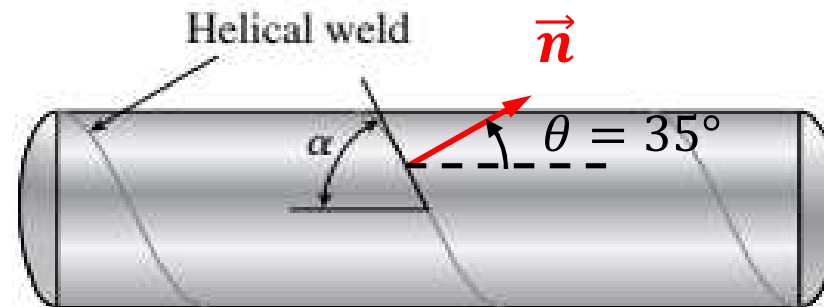
$$\varepsilon_c \cong \frac{1}{E} [\sigma_c - \nu \sigma_L] = \frac{(93,33 - 0,30 \times 46,67)}{200000} \cong 397 \mu$$

$$\varepsilon_L \cong \frac{1}{E} [\sigma_L - \nu \sigma_c] = \frac{(46,67 - 0,30 \times 93,33)}{200000} \cong 93,4 \mu$$



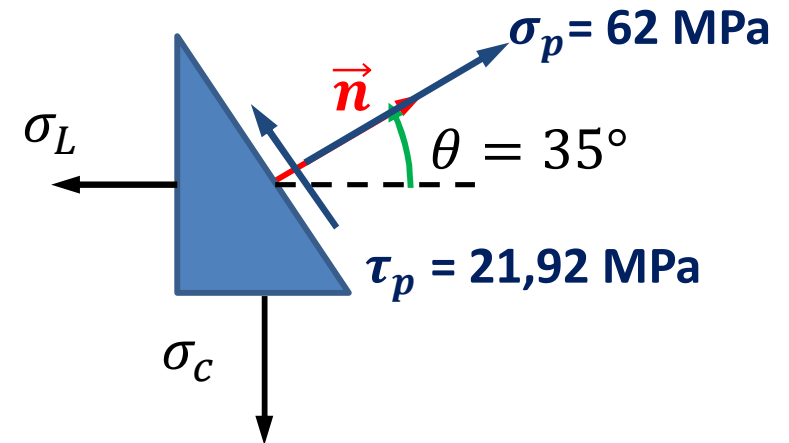
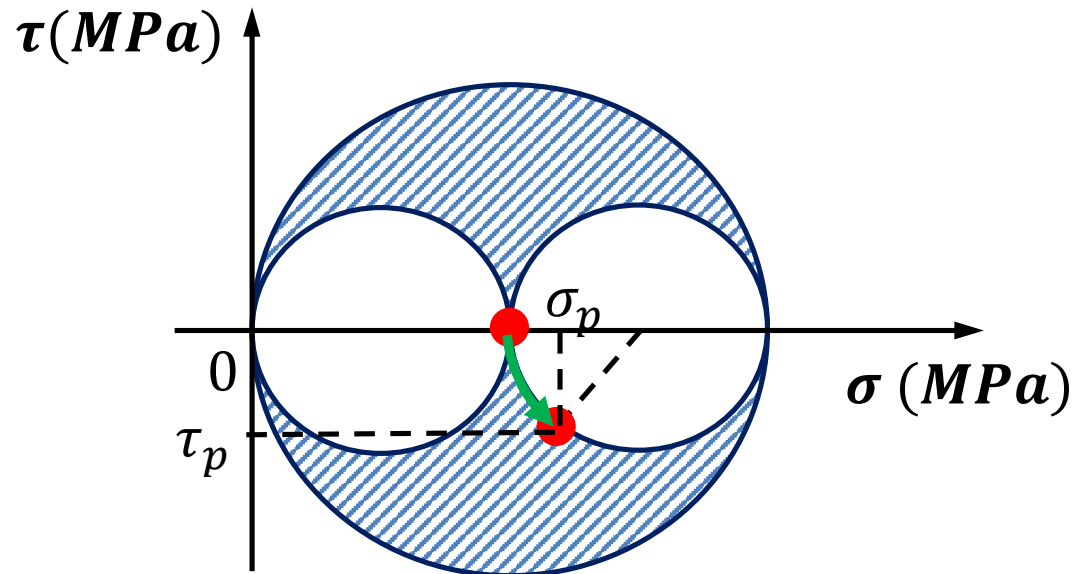
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

d) Tensão normal e cisalhante no plano paralelo ao filete de solda:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



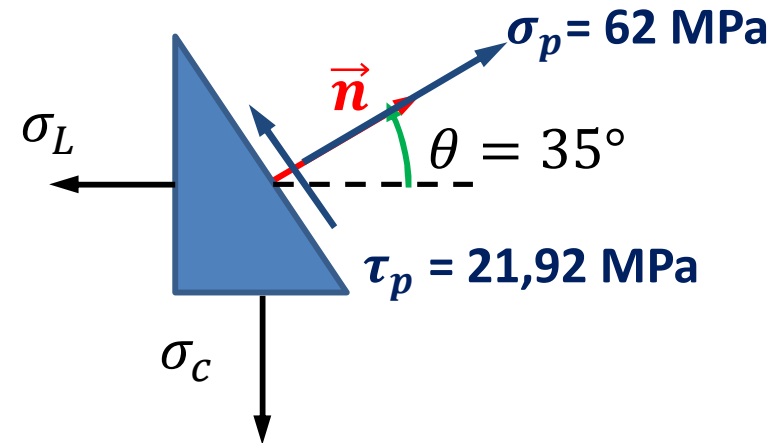
$$\sigma_p = \sigma_m - R \cos(2\theta) = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cos(2\theta)$$

$$\sigma_p = \frac{(93,33 + 46,67)}{2} - \frac{(93,33 - 46,67)}{2} \cos(70^\circ) = 70 - 8 = 62 \text{ MPa}$$

$$\tau_p = -R \sin(2\theta) = -\frac{(93,33 - 46,67)}{2} \sin(70^\circ) = -21,92 \text{ MPa}$$



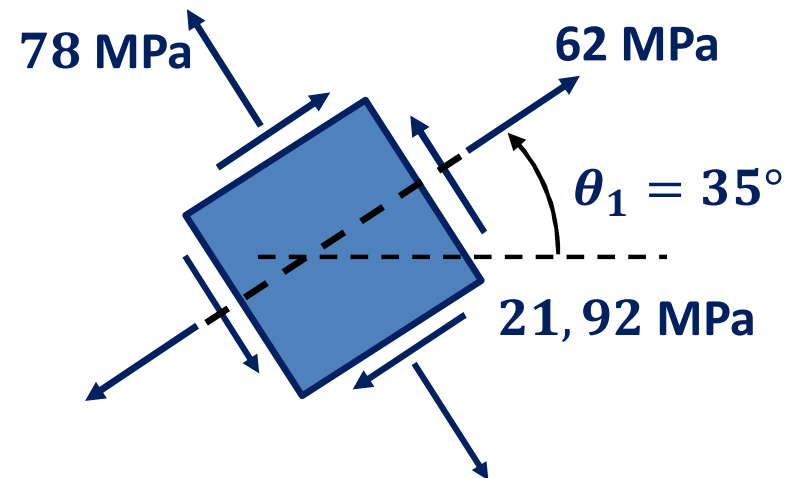
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$I_1 = \text{tr}(T) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \\ = 93,33 + 46,67 + 0 = 140 \text{ MPa}$$

$$I_1 = \sigma_p + \sigma_o + \sigma_3 = 140 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = 140 - 62 = 78 \text{ MPa}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.7.
- [2] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Tensões, (2020), 66p.