



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II*

*Aula #07*

*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

*26/08/2025*



## Agenda

1. Introdução
2. Tensões em vasos de pressão esféricos (de parede fina) [1]
3. Tensões em vasos de pressão cilíndricos (de parede fina) [1]
4. Tensões em vasos de pressão esféricos (de parede espessa) [2,5]
5. Tensões em vasos de pressão cilíndricos (de parede espessa) [2,5]
6. Exemplo



## 1. Introdução

Referência: Gere & Goodno [1], cap.8, itens 8.1 a 8.3.

Os vasos de pressão formam uma classe de estruturas de grande importância, notadamente na Engenharia Mecânica. Exemplos habituais incluem tanques, tubos, cabines pressurizadas em aeronaves e veículos espaciais.

Na aula de hoje estudaremos os vasos de pressão esféricos e cilíndricos de parede fina. O termo “paredes finas” não é preciso, mas, como regra geral, podemos considerar que o vaso possui parede fina quando  $t/R < 0,1$ .



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Fig.1: Vasos de pressão esféricos



Fig.2: Fabricação de tampos  
(hemisféricos, torisféricos e elípticos)



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



Fig.3: Tampo hemisférico de parede espessa [3].



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***



**Fig.4: Junção entre tampo hemisférico e vaso cilíndrico.**



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Fig.5: Vaso de pressão horizontal.



Fig.6: Vasos de pressão verticais.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Fig.7: Tampo torisférico.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Fig.8: Detalhe de uma seção cônica (tronco de cone) unindo duas seções cilíndricas de um vaso de pressão.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

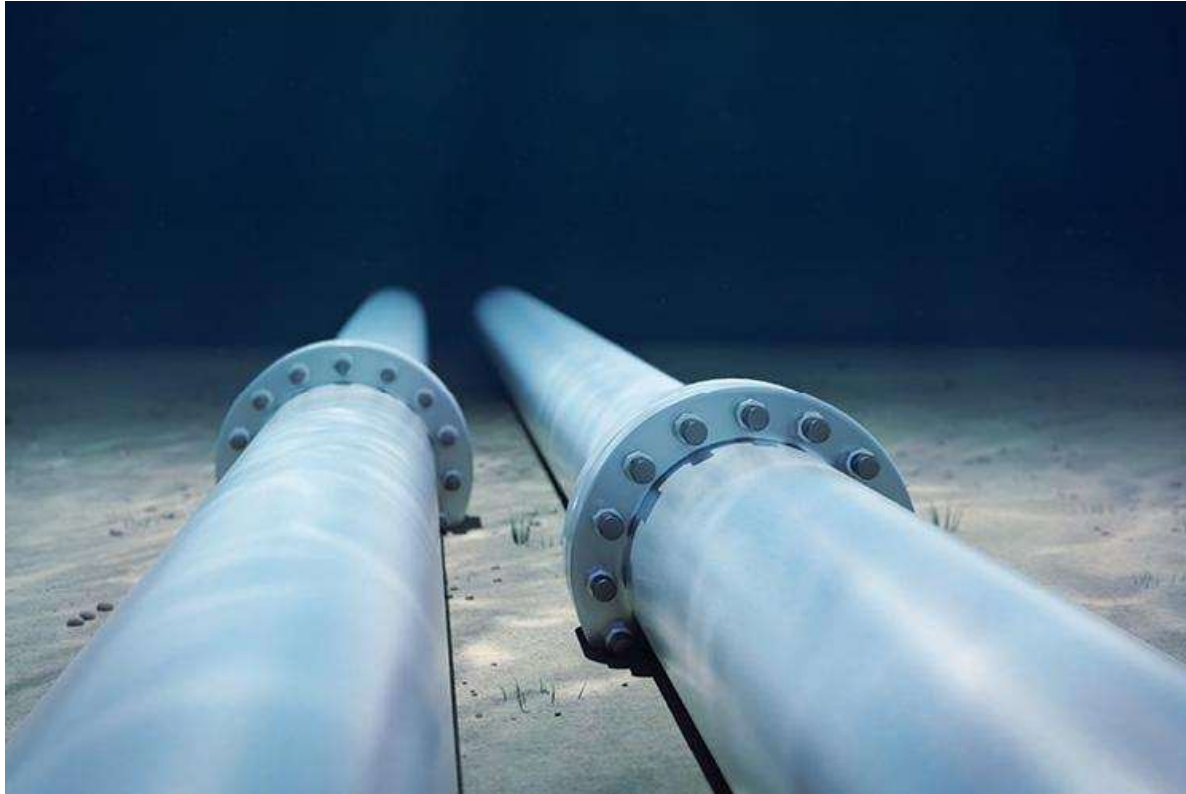


Fig.9: Tubulações submarinas estão sujeitas tanto a pressões internas quanto externas.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Fig.10: A fuselagem de uma aeronave também deve suportar os esforços decorrentes do diferencial de pressão.



## 2. Tensões em vasos de pressão esféricos (de parede fina)

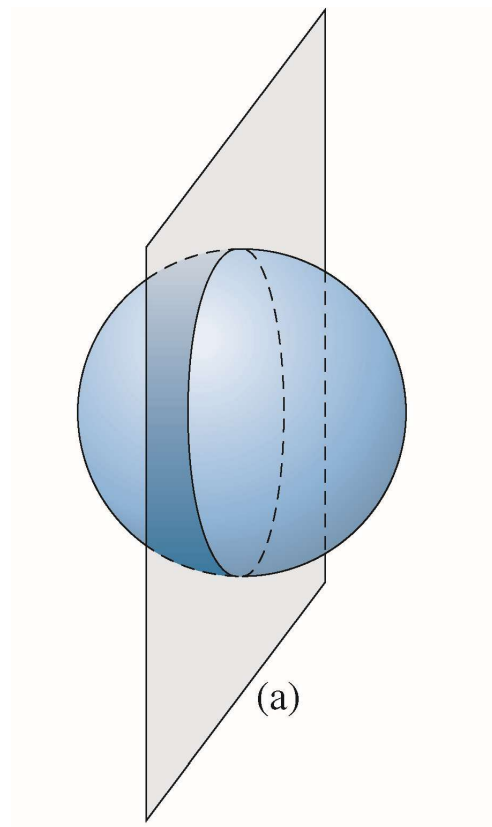
Hipóteses:

- Vaso com espessura constante e sem imperfeições;
- Pressões interna e externa estão distribuídas uniformemente nas superfícies interna e externa do vaso;
- Problemas de instabilidade não serão considerados na análise;
- Vaso é de parede fina ( $t/R < 0,1$ );
- Tensões são uniformemente distribuídas ao longo da espessura.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

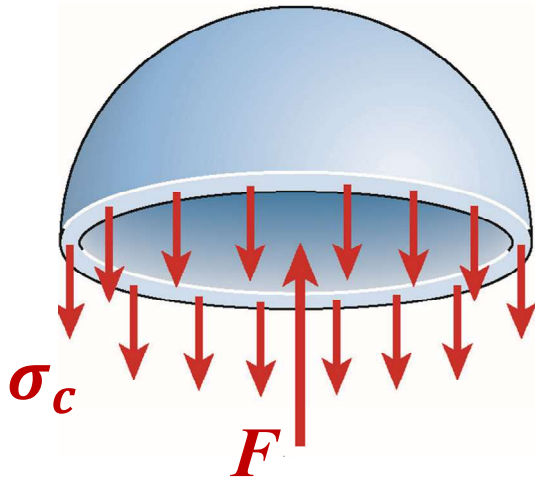
Em virtude das hipóteses estabelecidas, conclui-se que as tensões circunferenciais (*hoop stresses*) são as mesmas em qualquer plano diametral que divide o vaso em duas metades iguais (estrutura simétrica submetida a carregamentos simétricos).





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

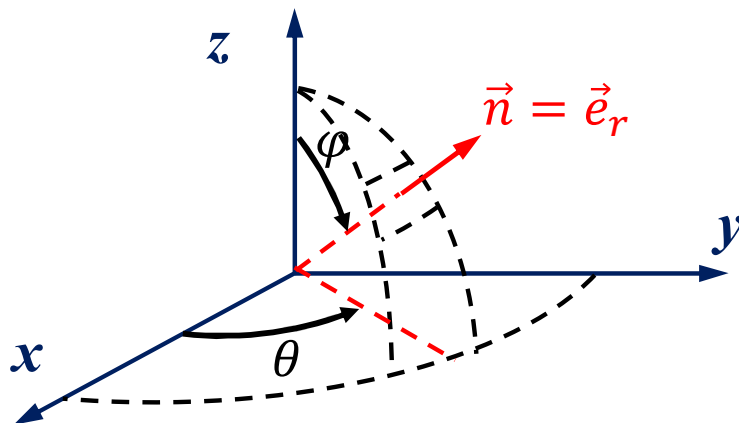
Do equilíbrio de forças na direção ortogonal ao plano de corte, teremos:



$$\sigma_c(2\pi R_m t) = F = \iint_{S_i} p_i(\vec{n} \cdot \vec{e}_z) dS_i - \iint_{S_o} p_o(\vec{n} \cdot \vec{e}_z) dS_o$$

$$\vec{n} = \vec{e}_r = (\text{sen}\varphi \cos\theta)\vec{e}_x + (\text{sen}\varphi \text{sen}\theta)\vec{e}_y + (\text{cos}\varphi)\vec{e}_z$$

$$\vec{n} \cdot \vec{e}_z = \text{cos}\varphi$$



$$dS_i = (R_i d\varphi)(R_i \text{sen}\varphi d\theta) = R_i^2 \text{sen}\varphi d\theta d\varphi$$

$$dS_o = (R_o d\varphi)(R_o \text{sen}\varphi d\theta) = R_o^2 \text{sen}\varphi d\theta d\varphi$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

$$\sigma_c(2\pi R_m t) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{p_i R_i^2 \sin(2\varphi)}{2} d\theta d\varphi - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{p_o R_o^2 \sin(2\varphi)}{2} d\theta d\varphi$$

$$\sigma_c(2\pi R_m t) = p_i \pi R_i^2 - p_o \pi R_o^2 \iff \sigma_c = \frac{p_i R_i^2 - p_o R_o^2}{2R_m t}$$

Utilizando as relações:  $R_i = R_m - \frac{t}{2}$        $R_o = R_m + \frac{t}{2}$

obtemos: 
$$\sigma_c = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} + \frac{(p_i - p_o)t}{8R_m} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

$$\sigma_c = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} \left[ 1 + \left( \frac{t}{2R_m} \right)^2 \right] - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

desprezível



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

$$\sigma_c = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

Deve-se observar que, em alguns casos, a 2ª parcela da expressão dada acima pode ser tão importante quanto a 1ª parcela, não devendo ser desprezada. Se este não for o caso, podemos desprezar o efeito da 2ª parcela em relação ao da 1ª parcela e simplificar a expressão para:

$$\sigma_c \cong \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} = \frac{pR_m}{2t}$$

Onde  $p = p_i - p_o$  representa o diferencial de pressão entre a pressão interna e a pressão externa (absolutas) que agem sobre o vaso (ou seja, é a pressão relativa ou manométrica).



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Como não há tensões de cisalhamento nos planos diametrais, concluímos que as tensões principais e as máximas tensões de cisalhamento para um vaso de pressão esférico são dadas por:

- Para os pontos da superfície interna do vaso:

$$\sigma' = \sigma'' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2} \quad \sigma''' = -p_i$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{|p_i - p_o|}{4} \left( \frac{R_m}{t} + 1 \right)$$

- Para os pontos da superfície externa do vaso:

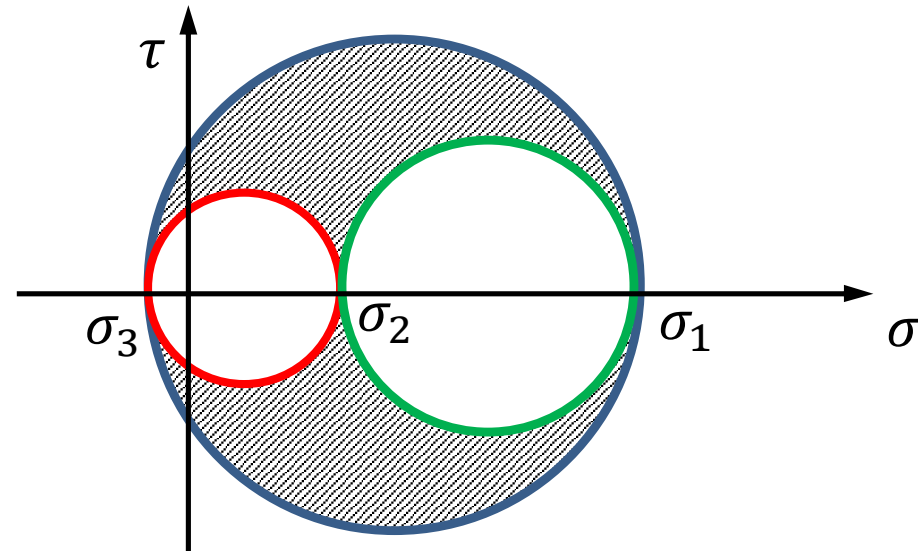
$$\sigma' = \sigma'' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2} \quad \sigma''' = -p_o$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{|p_i - p_o|}{4} \left( \frac{R_m}{t} - 1 \right)$$

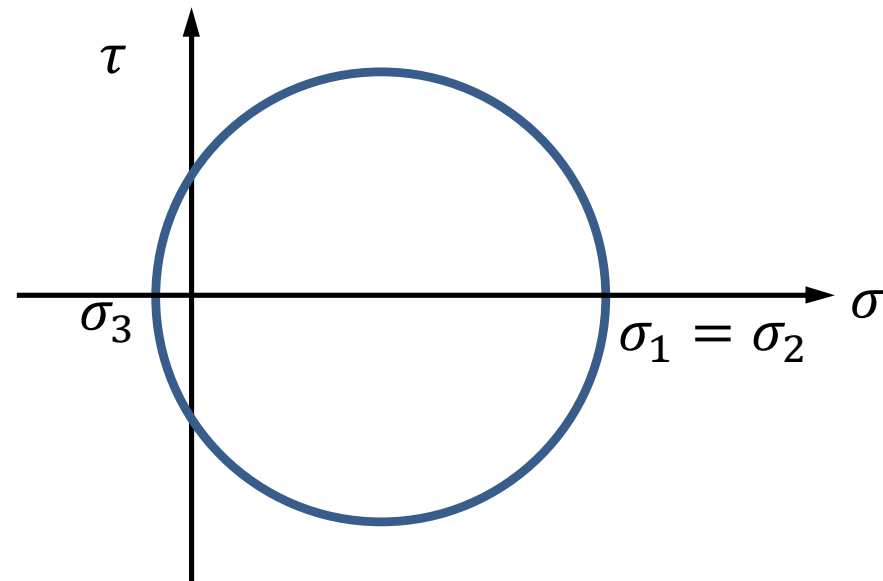


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Círculos de Mohr das tensões para o caso em que as três tensões principais são distintas:



Círculos de Mohr das tensões para o caso em que duas tensões principais são iguais, mas distintas da 3ª tensão principal (como no caso dos vasos esféricos de pressão). Note que a circunferência verde desaparece e a vermelha coincide com a azul.





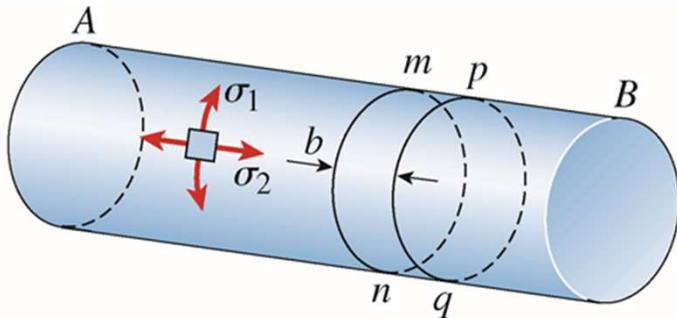
### 3. Tensões em vasos de pressão cilíndricos (de parede fina)

Hipóteses:

- Vaso longo ( $L/R > 10$ ), com espessura constante e sem imperfeições;
- Admite-se que o vaso esteja fechado nas extremidades (de modo a gerar tensões longitudinais, além das circunferenciais);
- Pressões interna e externa estão distribuídas uniformemente nas superfícies interna e externa do vaso;
- Problemas de instabilidade não são considerados na análise;
- Vaso é de parede fina ( $t/R < 0,1$ );
- Tensões são uniformemente distribuídas ao longo da espessura.



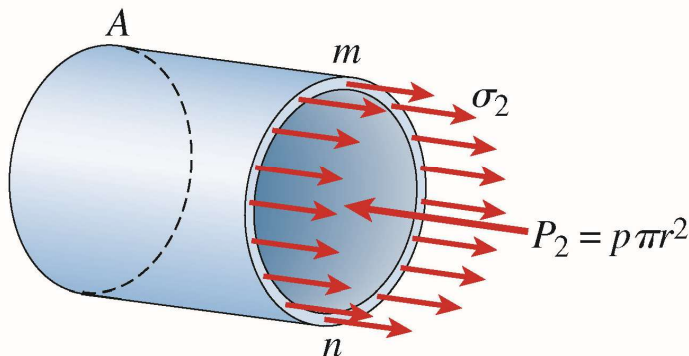
### 3.1. Tensões na direção longitudinal ( $\sigma_L$ )



O cálculo é análogo ao feito para os vasos esféricos (e independe do formato do tampo):

$$\sigma_L = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

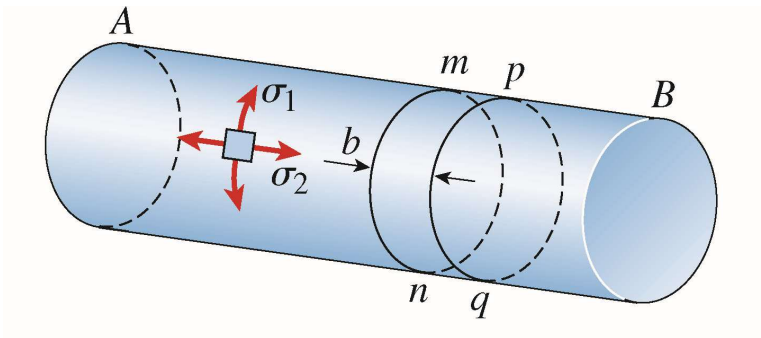
$$\sigma_L \cong \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} = \frac{pR_m}{2t}$$



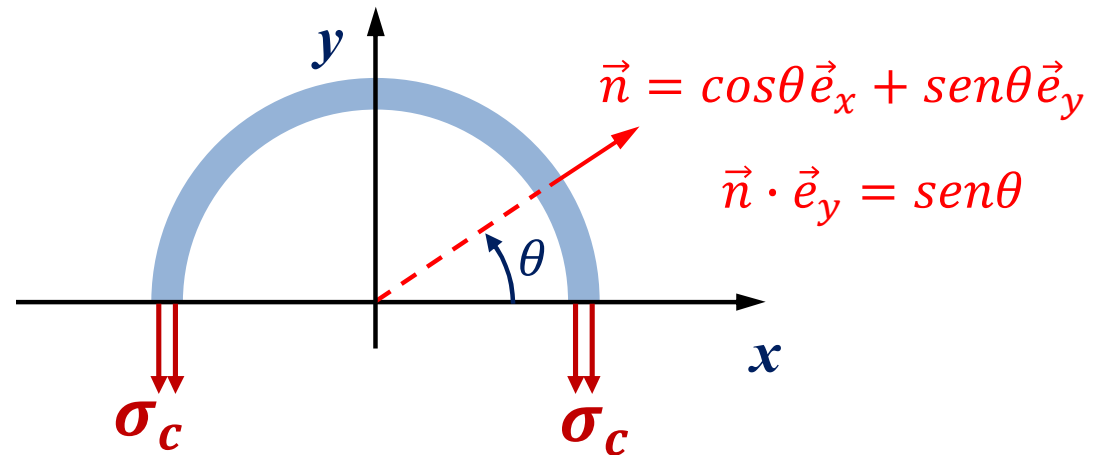
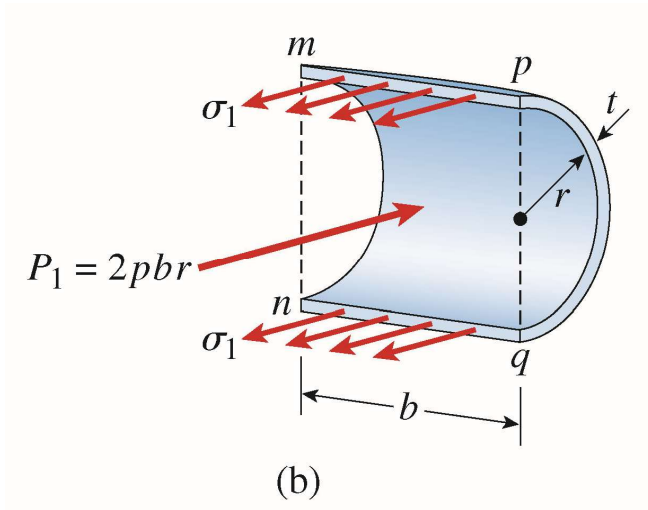
onde  $p = p_i - p_o$  representa o diferencial de pressão entre a pressão interna e a pressão externa (absolutas) que agem sobre o vaso (ou seja, é a pressão relativa ou manométrica).



### 3.2. Tensões na direção circunferencial ( $\sigma_c$ )



$$\sigma_c(2bt) = b \left[ \int_0^\pi p_i(\vec{n} \cdot \vec{e}_y)R_i d\theta - \int_0^\pi p_o(\vec{n} \cdot \vec{e}_y)R_o d\theta \right]$$





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

$$\sigma_c(2bt) = b \left[ \int_0^{\pi} p_i R_i \sin\theta d\theta - \int_0^{\pi} p_o R_o \sin\theta d\theta \right]$$

$$\sigma_c(2bt) = 2b(p_i R_i - p_o R_o)$$

$$\sigma_c = \frac{(p_i R_i - p_o R_o)}{t}$$

Utilizando as relações:  $R_i = R_m - \frac{t}{2}$        $R_o = R_m + \frac{t}{2}$

teremos: 
$$\sigma_c = \frac{(p_i - p_o)R_m}{t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Observamos novamente que, em alguns casos, a 2ª parcela da expressão obtida pode ser tão importante quanto a 1ª parcela, não devendo ser desprezada, como nos casos em que a pressão interna e a pressão externa (absolutas) têm praticamente a mesma ordem de grandeza.

Se este não for o caso, podemos desprezar o efeito da 2ª parcela em relação ao da 1ª parcela e simplificar a expressão para:

$$\sigma_c \cong \frac{(p_i - p_o)R_m}{t} = \frac{pR_m}{t}$$

Onde  $p = p_i - p_o$  representa o diferencial de pressão entre a pressão interna e a pressão externa (absolutas) que agem sobre o vaso (ou seja, é a pressão relativa ou manométrica).



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Concluimos do exposto que as tensões principais para um vaso de pressão cilíndrico são dadas por:

- Para os pontos da superfície interna do vaso:

$$\sigma' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

$$\sigma'' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

$$\sigma''' = -p_i$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Onde:  $\sigma_1 = \text{m\acute{a}x}\{\sigma', \sigma'', \sigma'''\}$

$$\sigma_3 = \text{m\acute{i}n}\{\sigma', \sigma'', \sigma'''\}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

- Para os pontos da superfície externa do vaso:

$$\sigma' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

$$\sigma'' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

$$\sigma''' = -p_o$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Onde:  $\sigma_1 = m\acute{a}x\{\sigma', \sigma'', \sigma'''\}$

$$\sigma_3 = m\acute{i}n\{\sigma', \sigma'', \sigma'''\}$$



## 4. Tensões em vasos de pressão esféricos (de parede espessa)

Resultados obtidos a partir da Teoria da Elasticidade mostram que a distribuição de tensões circunferenciais ( $\sigma_c$ ) e radiais ( $\sigma_r$ ) em um vaso de pressão esférico com raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , submetido a uma pressão interna  $p_i$  e a uma pressão externa  $p_o$  são dadas por (vide, p.ex., Timoshenko e Goodier [2], ou Young e Budynas [5]):

$$\sigma_c = \frac{p_i a^3}{(b^3 - a^3)} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{r} \right)^3 \right] - \frac{p_o b^3}{(b^3 - a^3)} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right]$$

$$\sigma_r = \frac{p_i a^3}{(b^3 - a^3)} \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^3 \right] - \frac{p_o b^3}{(b^3 - a^3)} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right]$$

Onde:  $a \leq r \leq b$  (note que as condições de contorno ficam plenamente atendidas, tanto na superfície interna quanto na superfície externa do vaso).



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

A distribuição da máxima tensão de cisalhamento fica então dada por:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_c - \sigma_r}{2}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3p_i a^3 b^3}{4(b^3 - a^3)r^3} - \frac{3p_o a^3 b^3}{4(b^3 - a^3)r^3}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3(p_i - p_o)a^3 b^3}{4(b^3 - a^3)r^3}$$

Onde:  $a \leq r \leq b$  (note que os pontos mais solicitados são os pontos da superfície interna do vaso, onde  $r = a$ ).



## 5. Tensões em vasos de pressão cilíndricos (de parede espessa)

Resultados obtidos a partir da Teoria da Elasticidade mostram que a distribuição de tensões circunferenciais ( $\sigma_c$ ) e radiais ( $\sigma_r$ ) em um vaso de pressão cilíndrico com raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , submetido a uma pressão interna  $p_i$  e a uma pressão externa  $p_o$  são dadas por (vide, p.ex., Timoshenko e Goodier [2], ou Young e Budynas [5]):

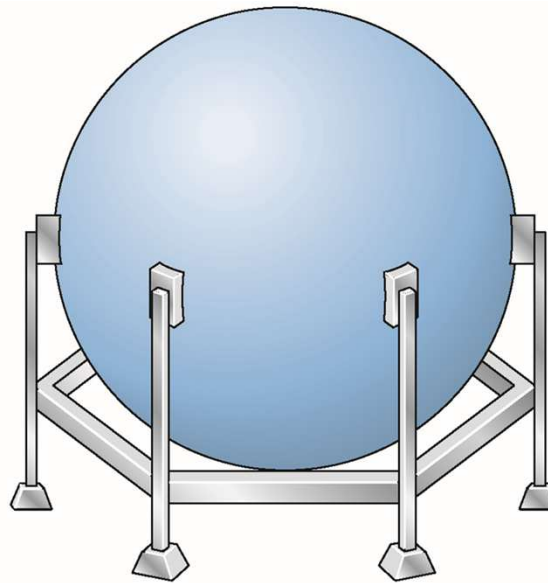
$$\sigma_c = \frac{p_i a^2}{(b^2 - a^2)} \left[ 1 + \left( \frac{b}{r} \right)^2 \right] - \frac{p_o b^2}{(b^2 - a^2)} \left[ 1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right]$$
$$\sigma_r = \frac{p_i a^2}{(b^2 - a^2)} \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^2 \right] - \frac{p_o b^2}{(b^2 - a^2)} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right]$$

Onde:  $a \leq r \leq b$  (note que as condições de contorno ficam plenamente atendidas, tanto na superfície interna quanto na superfície externa do vaso).



## 6. Exemplo

Um vaso de pressão esférico possui raio médio  $R_m = 1000$  mm e espessura  $t = 25$  mm. Considerando que a pressão interna seja  $p = 5$  MPa (pressão manométrica), determine a máxima tensão de cisalhamento no vaso. Esboce também as distribuições de tensões circunferenciais ao longo do raio considerando a teoria aproximada e a teoria “exata”.





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Temos:  $\frac{t}{R_m} = \frac{25}{1000} = 0,025 < 0,10$

...o que mostra que o vaso pode ser considerado como de “parede fina”.

Considerando, inicialmente, o efeito da pressão interna e externa atuantes sobre o vaso teremos:  $p_o \cong 0,1 \text{ MPa}$  e  $p_i \cong 5,1 \text{ MPa}$ . Logo:

$$\sigma_c = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$
$$\sigma_c = \frac{(5) \times 1000}{2 \times 25} - \frac{(5,1 + 0,1)}{2} \quad (\text{MPa})$$

$$\sigma_c = 100 - 2,6 = 97,4 \text{ MPa}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Assim, os pontos da superfície interna terão como tensões principais:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_c = 97,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -p_i = -5,1 \text{ MPa}$$

E, assim, a máxima tensão de cisalhamento será:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{97,4 + 5,1}{2} = 51,25 \text{ MPa}$$

Verificando pela fórmula pronta (vide slide 17, para pontos da superfície interna do vaso):

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{|p_i - p_o|}{4} \left( \frac{R_m}{t} + 1 \right) = \frac{5}{4} \left( \frac{1000}{25} + 1 \right) = 51,25 \text{ MPa}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Pelos resultados “exatos” dado pela Teoria da Elasticidade, temos:

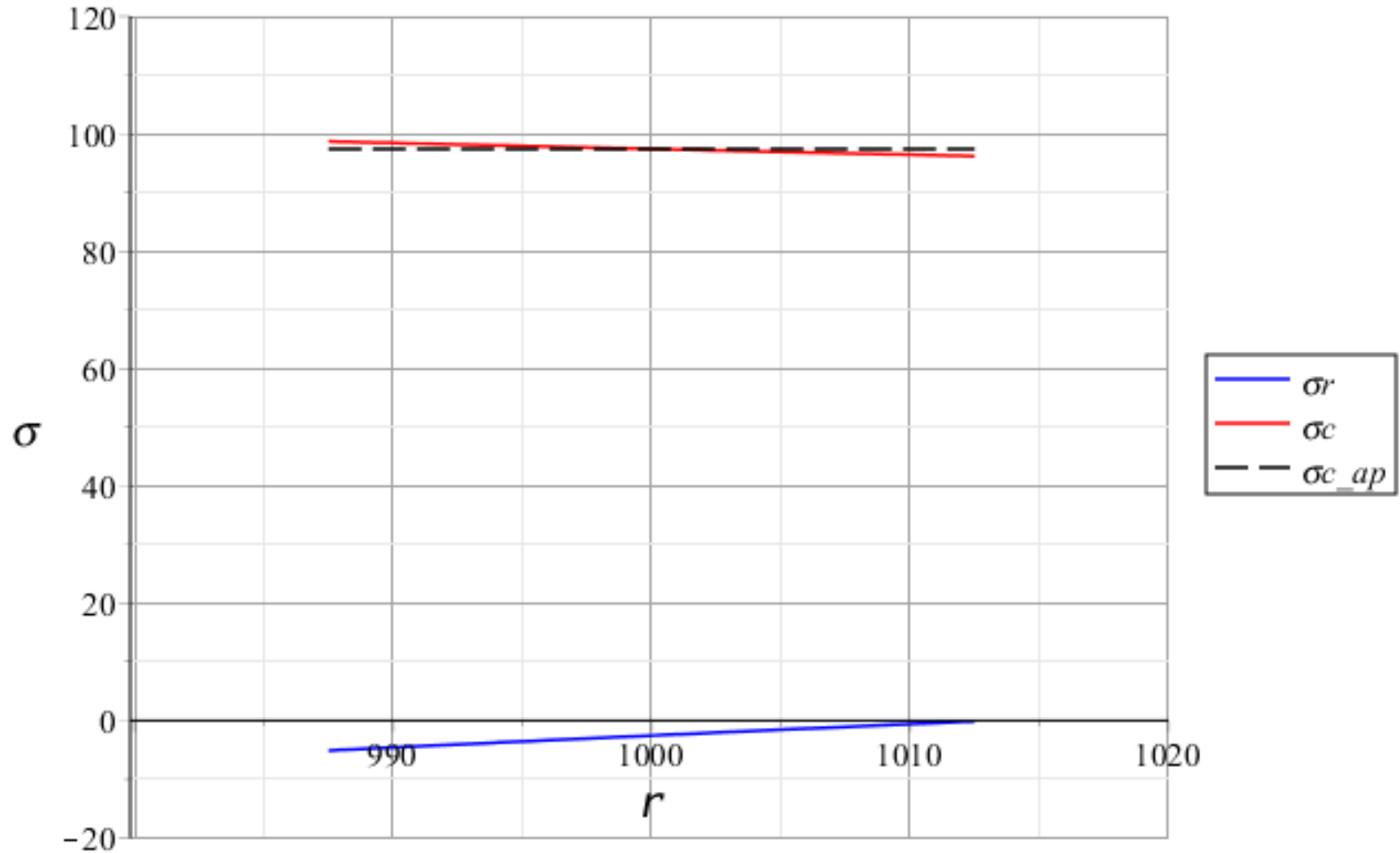
$$a = R_i = R_m - \frac{t}{2} = 987,5mm \quad p_i \cong 5,1 MPa$$

$$b = R_o = R_m + \frac{t}{2} = 1012,5mm \quad p_o \cong 0,1 MPa$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3(p_i - p_o)b^3}{4(b^3 - a^3)} \cong 51,9 MPa$$

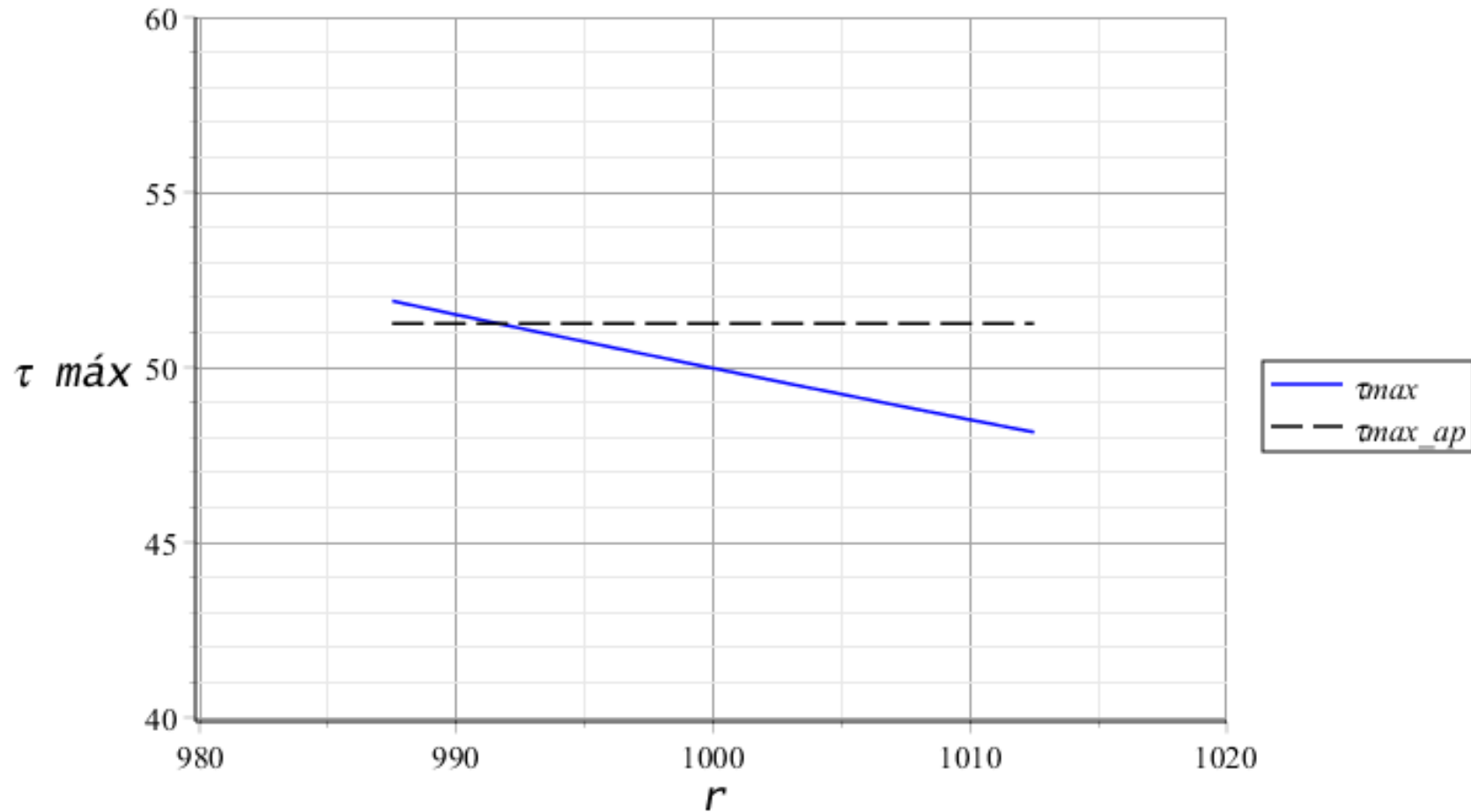


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

*Referências:*

- [1] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.8.
- [2] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N. Theory of Elasticity, 3<sup>rd</sup> ed. McGraw-Hill Publishing Company, 1970, 608 p.
- [3] <https://www.glmhead.com/hemispherical-dished-head-product/>
- [4] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Tensões, (2020), 66p.
- [5] Young, W.C., Budynas, R.G., Roark's formulas for stress and strain, 7<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill Co., 854p.