



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #06

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

20/08/2025

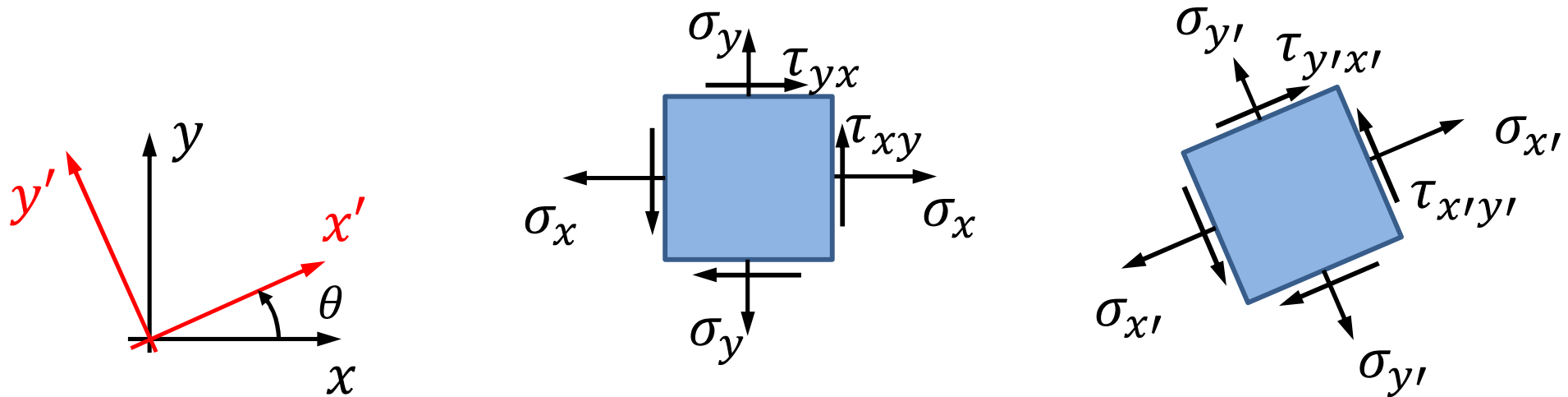


Agenda

1. Transformação de tensão para o caso de estado plano de tensões;
2. Convenção de sinais para a construção gráfica do círculo de Mohr das tensões (caso de estado plano de tensões);
3. Método gráfico para a construção dos círculos de Mohr (caso de estado plano de tensões);
4. Exemplo.



1. Transformação de tensão para o caso de estado plano de tensões



Dado: $[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$

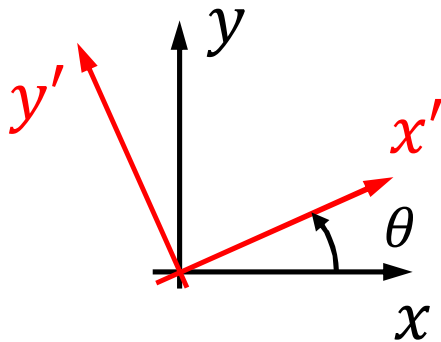
Obter: $[T]_{b'} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{y'x'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1º Modo: Aplicando a fórmula geral vista na aula anterior: $[T]_{b'} = [M]^t [T]_b [M]$

Nesse caso, basta determinarmos a matriz de mudança de base $[M]$:



$$\vec{e}_{x'} = \cos\theta \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_{y'} = -\sin\theta \cdot \vec{e}_x + \cos\theta \cdot \vec{e}_y$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad [M]^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Note que: $\det[M] = 1$ $[M]^{-1} = [M]^t$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim: $[T]_{b'} = [M]^t [T]_b [M]$

$$[T]_{b'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[T]_{b'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta & -\sigma_x \sin\theta + \tau_{xy} \cos\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta & -\tau_{xy} \sin\theta + \sigma_y \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \\ \sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \\ \tau_{x'y'} = \tau_{y'x'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{array} \right.$$

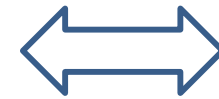


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) + \sigma_y \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) + \tau_{xy} \text{sen}(2\theta)$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) + \sigma_y \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) - \tau_{xy} \text{sen}(2\theta)$$

$$\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'} = - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \text{sen}(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$



$$\sigma_{x'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos(2\theta) + \tau_{xy} \text{sen}(2\theta)$$

Eq (7.4.a), [1]

$$\sigma_{y'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos(2\theta) - \tau_{xy} \text{sen}(2\theta)$$

Eq (7.5), [1]

$$\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'} = - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \text{sen}(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

Eq (7.4.b), [1]



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2º Modo: Determinando o vetor tensão em um dos planos inclinados e suas componentes.

Tomando, por exemplo, o plano de normal externa $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$, virá:

$$\{\vec{\rho}\}_b = [T]_b \{\vec{n}\}_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{yx} \sin\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{Bmatrix}$$

A componente normal do vetor tensão dado acima será:

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

$$\sigma = \sigma_{x'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

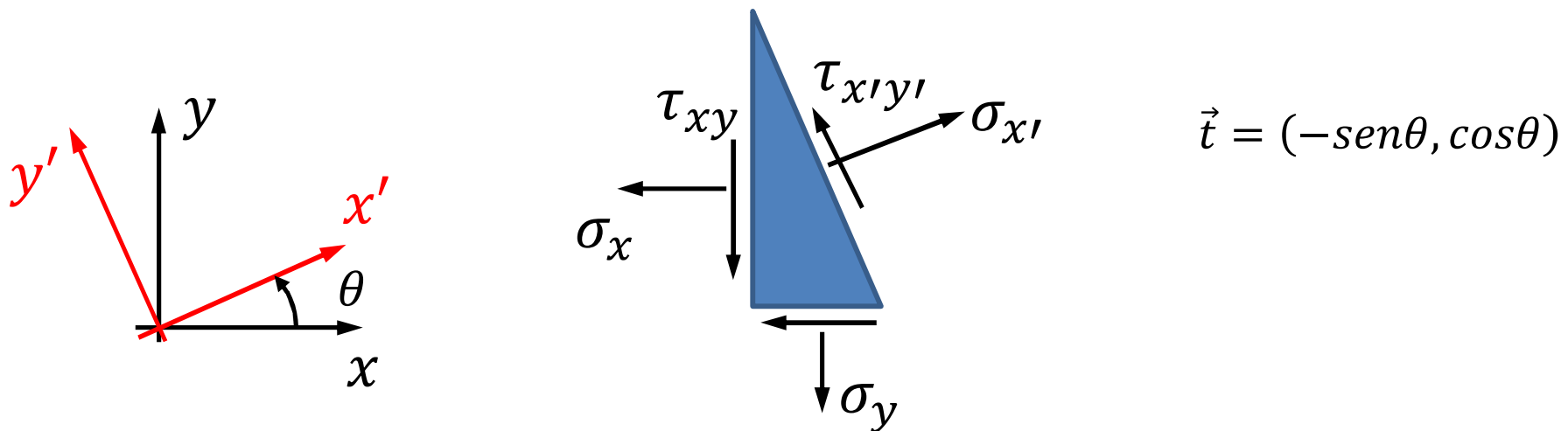


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A componente $\sigma_{y'}$ pode ser obtida lembrando que o traço do tensor das tensões é um invariante. Logo:

$$\sigma_{y'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

Já a componente cisalhante no plano inclinado pode ser obtida pelo produto escalar entre o vetor tensão (obtido no slide 30) e o versor tangente $\vec{t}$ dado por:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultando:

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

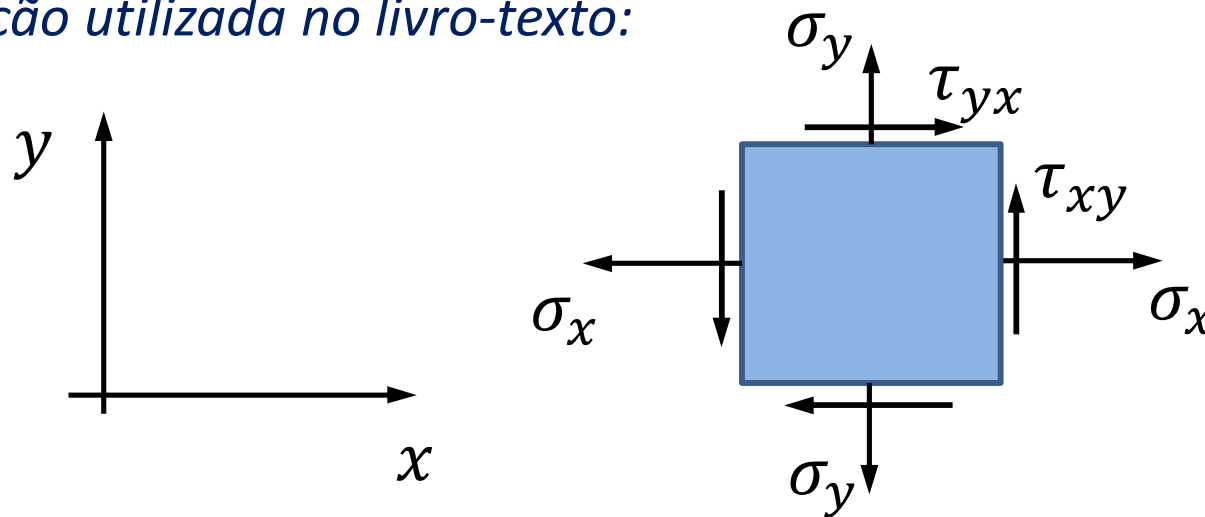
$$\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin(2\theta) + \tau_{xy}\cos(2\theta)$$

Verifique que as expressões obtidas utilizando os dois métodos são as mesmas!



2. Convenção de sinais para a construção gráfica do círculo de Mohr das tensões:

2.1. Convenção utilizada no livro-texto:



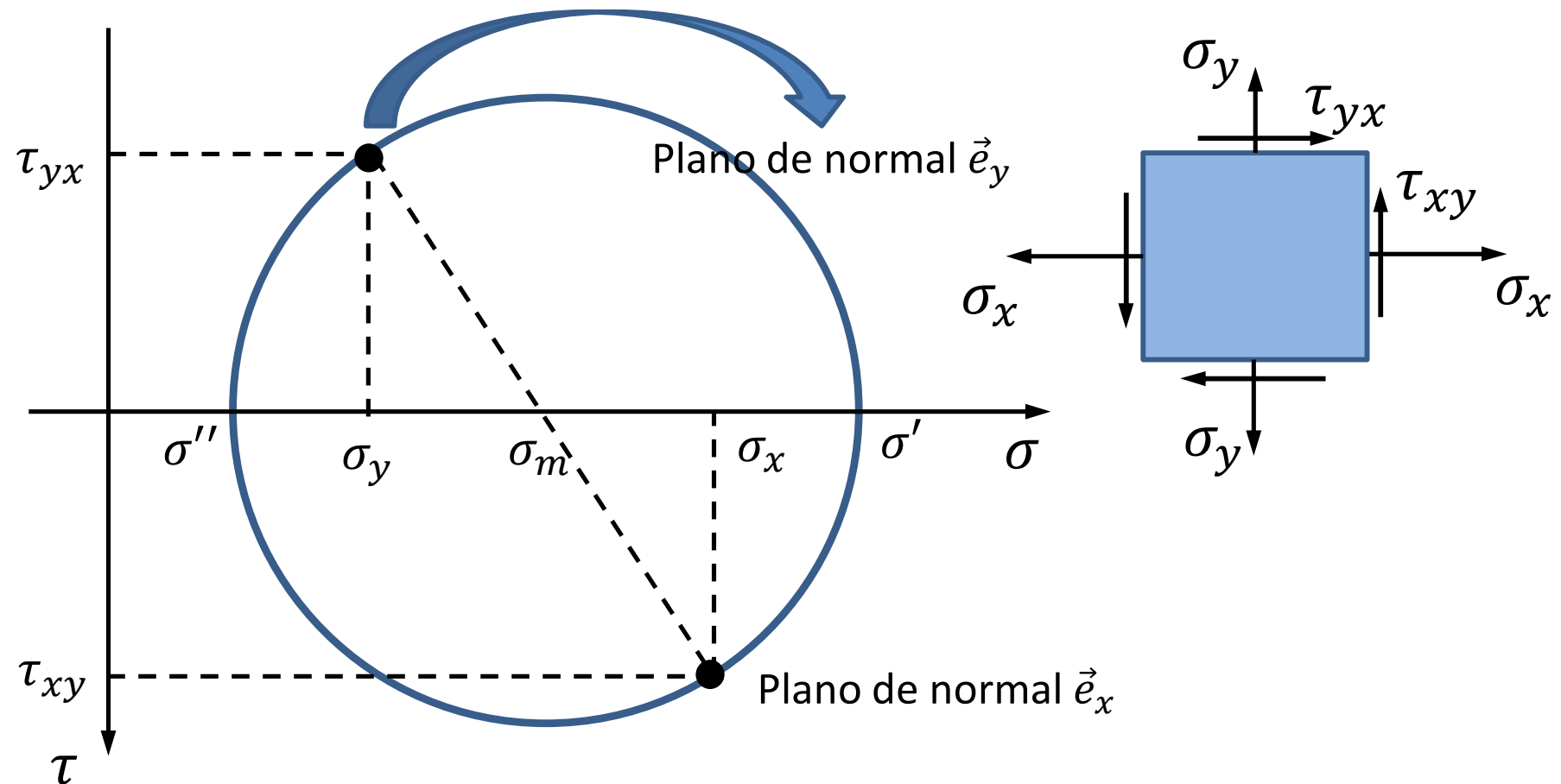
Tensões normais: positivas se provocarem tração, e negativas se causarem compressão;

Tensões cisalhantes: positivas se girarem o elemento no sentido anti-horário (como no caso da tensão τ_{xy} indicada no elemento acima) e negativas se girarem o elemento no sentido horário (como no caso da tensão τ_{yx} indicada no elemento acima).



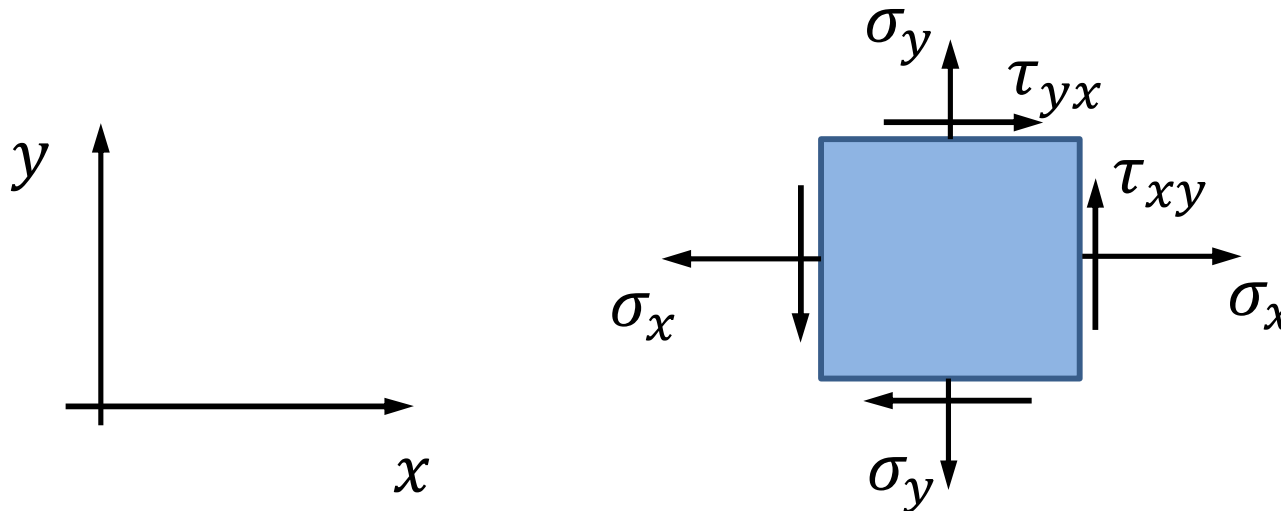
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Deve-se observar que, neste caso, o eixo que indica as tensões de cisalhamento no espaço $\sigma \times \tau$ deve estar orientado para baixo, como indicado abaixo:





2.2. Outra convenção possível:



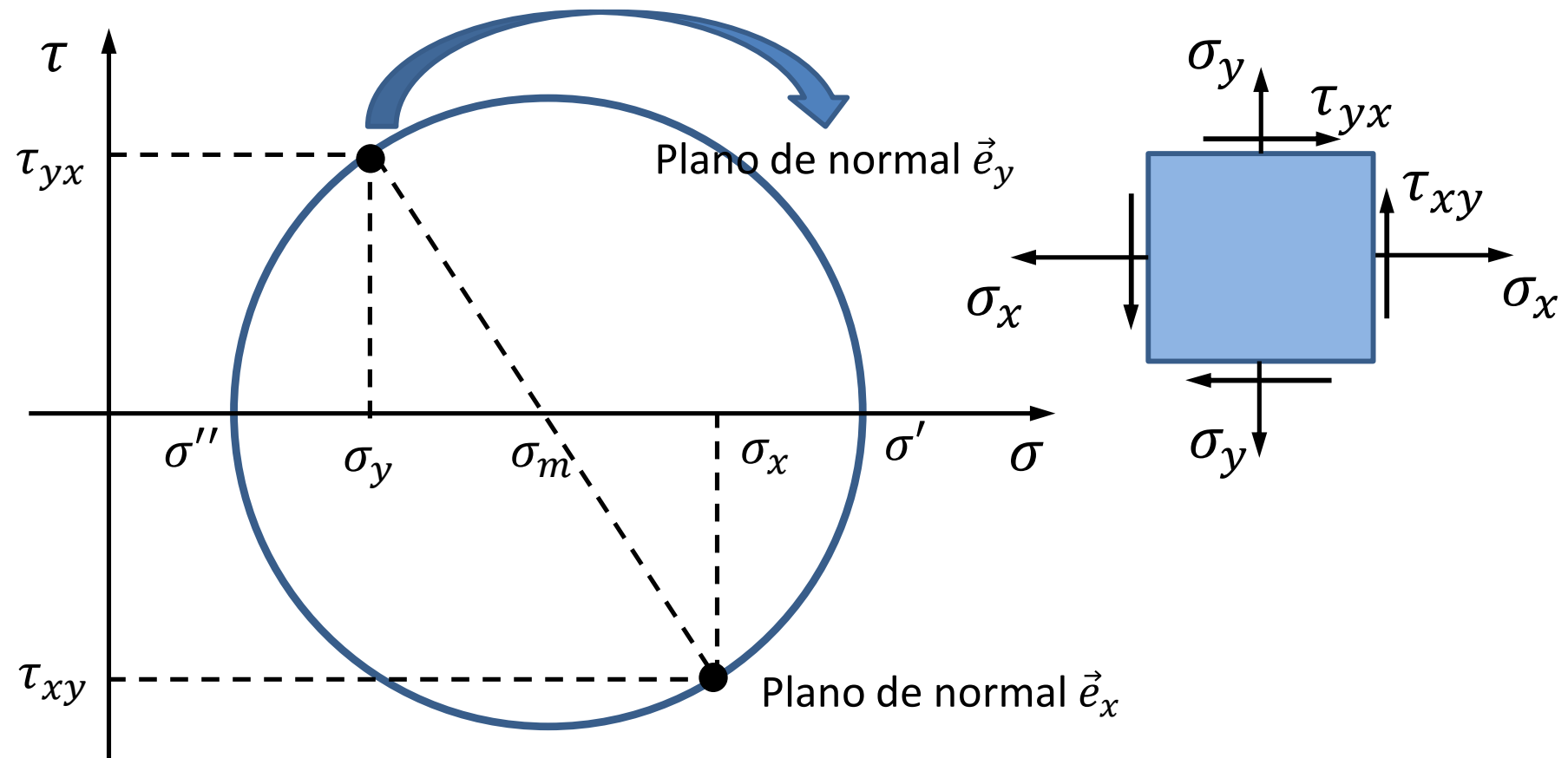
Tensões normais: positivas se provocarem tração, e negativas se causarem compressão (sem alteração em relação à convenção do livro-texto);

Tensões cisalhantes: positivas se girarem o elemento no sentido horário (como no caso da tensão τ_{yx} indicada no elemento acima) e negativas se girarem o elemento no sentido anti-horário (como no caso da tensão τ_{xy} indicada no elemento acima).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Deve-se observar que, neste 2º caso, o eixo que indica as tensões de cisalhamento no espaço $\sigma \times \tau$ deve estar orientado para cima, como indicado abaixo:





3. Método gráfico para a construção dos círculos de Mohr (casos de estado plano de tensões)

Em casos de estado plano de tensão, é possível obter os círculos de Mohr das tensões utilizando um método gráfico, baseado nas equações de transformação de tensão reescritas abaixo:

$$\sigma_{x'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos(2\theta) + \tau_{xy} \operatorname{sen}(2\theta)$$

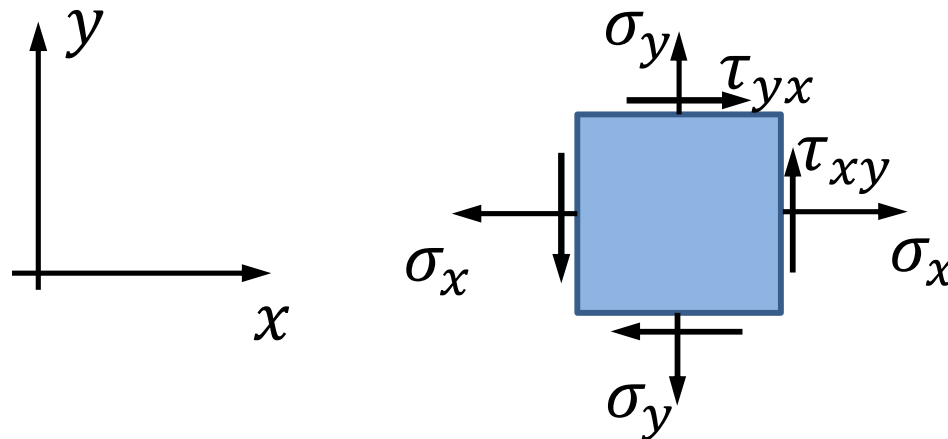
$$\sigma_{y'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos(2\theta) - \tau_{xy} \operatorname{sen}(2\theta)$$

$$\tau_{x'y'} = - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \operatorname{sen}(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Consideremos como dados de entrada o estado de tensões em um dado ponto do sólido como o indicado abaixo (note que se trata de estado plano de tensões):



Para o traçado do círculo de Mohr associado ao estado de tensões indicado, observamos que as rotações do elemento são feitas em torno da direção principal $\vec{e}_z$ (associada, neste caso, ao autovalor $\sigma_z = 0$, que já é uma das tensões principais). O procedimento visa à obtenção das duas outras tensões principais para o traçado do círculo de Mohr correspondente a elas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

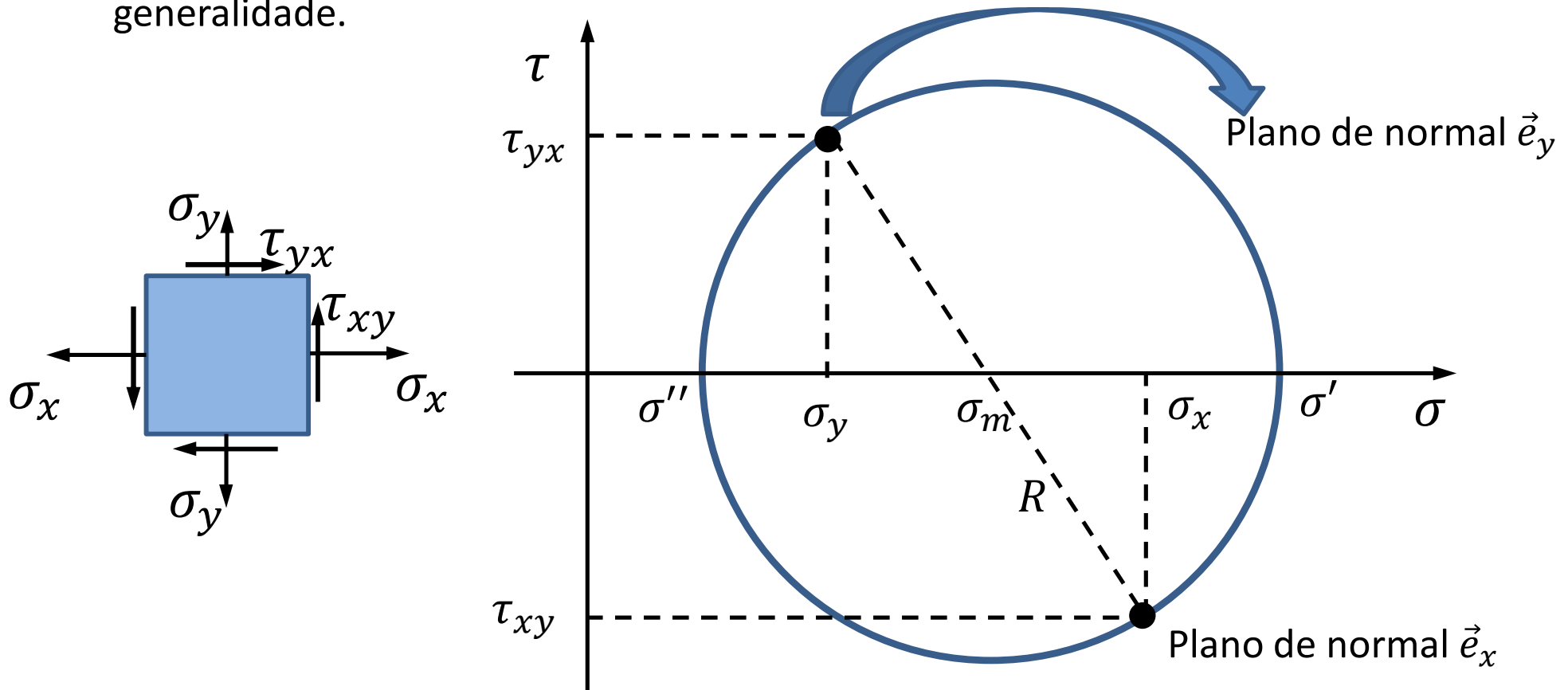
Levando em conta que:

- Cada ponto do círculo de Mohr das tensões está associado às componentes do vetor tensão (σ, τ) que atuam em um determinado plano. Em outras palavras, cada par (σ, τ) do círculo está associado a uma direção $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$;
 - Pelas equações paramétricas vistas, um giro de θ no elemento corresponde a um giro de 2θ no círculo correspondente;
 - Dois planos (ou duas direções) ortogonais entre si correspondem a dois pares (σ, τ) que são diametralmente opostos no círculo de Mohr;
- ...o seguinte procedimento permite o traçado do círculo de Mohr:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1º Passo: posicionar os pares (σ, τ) associados aos planos de normal $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$ no círculo de Mohr (utilizando uma das duas convenções de sinais apresentadas). Para a figura abaixo, consideramos que $\sigma_x > \sigma_y > 0$, sem perda de generalidade.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2º Passo: determinar o centro do círculo de Mohr correspondente

Como os planos de normal $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$ correspondem a planos ortogonais, o centro do círculo fica dado pela média aritmética entre σ_x e σ_y :

$$C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) = (\sigma_m, 0)$$

3º Passo: determinar o raio do círculo de Mohr correspondente:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4º Passo: Determinar as tensões principais σ' e σ'' , ordenar as tensões, e traçar os círculos (todos!).

$$\sigma' = \sigma_m + R = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma'' = \sigma_m - R = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

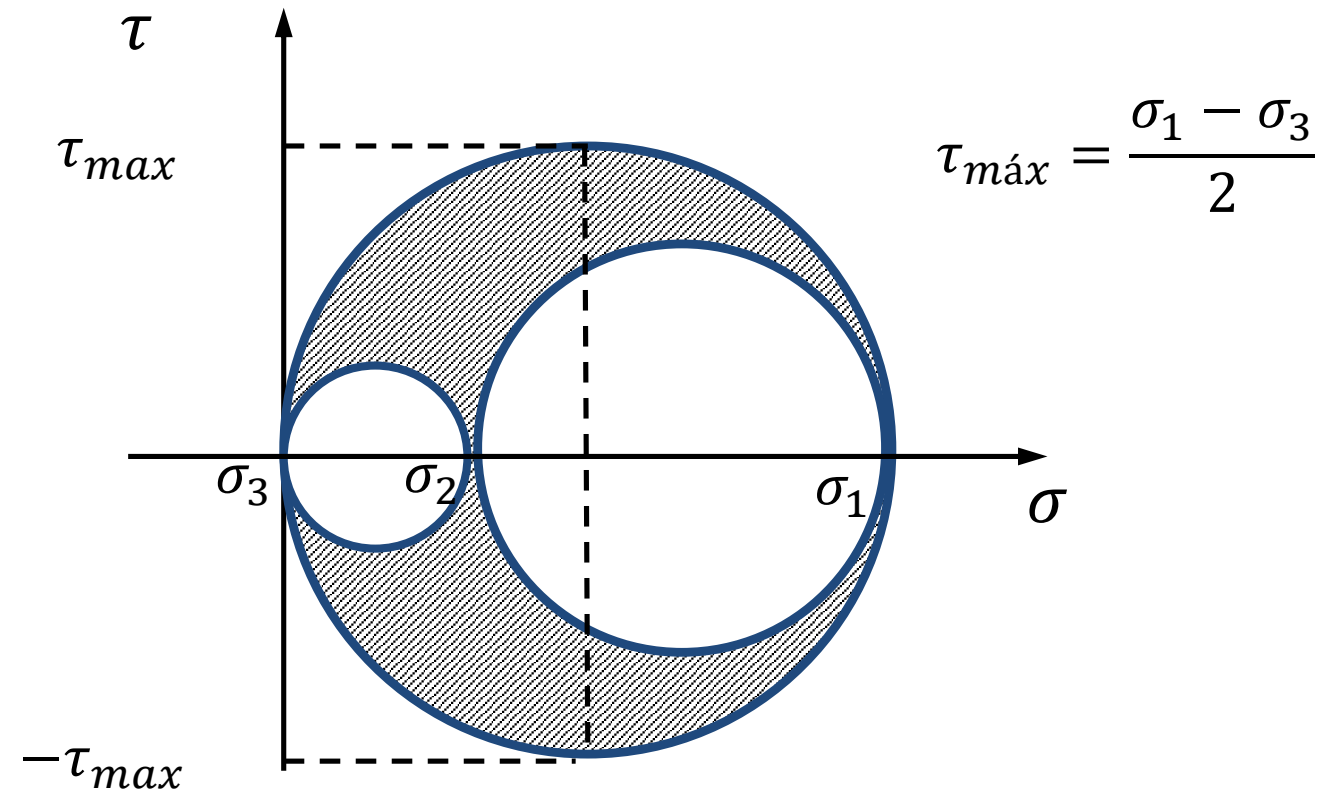
$$\sigma_1 = \max\{\sigma', \sigma'', \sigma_z\}$$

$$\sigma_3 = \min\{\sigma', \sigma'', \sigma_z\}$$

σ_2 = tensão intermediária entre σ_1 e σ_3 .



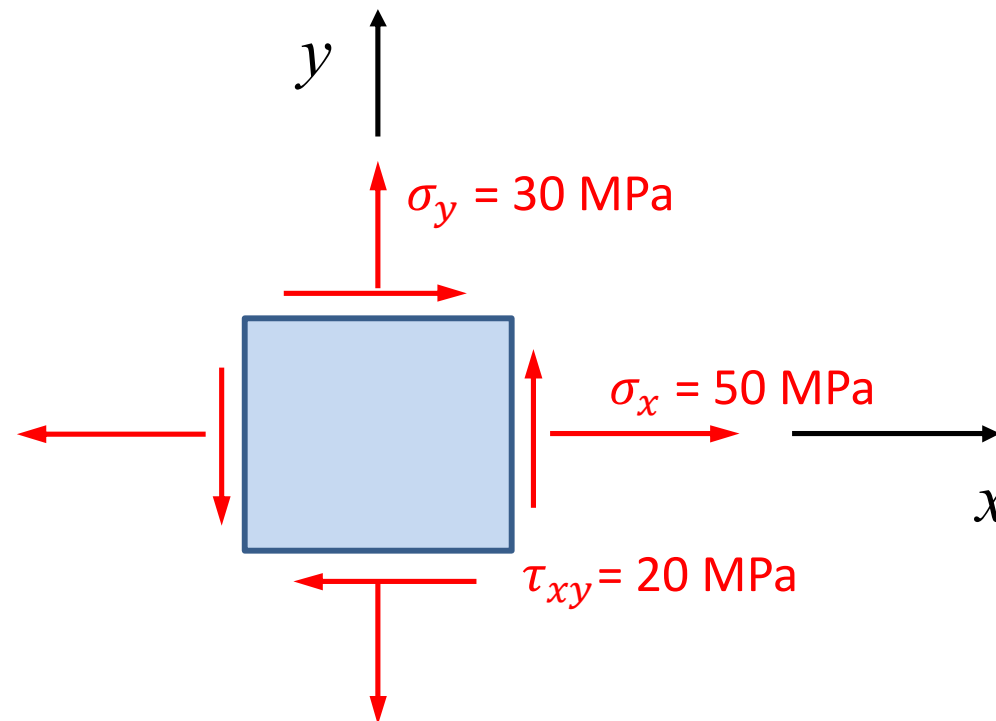
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





4. Exemplo

7.3-1. Um elemento em estado plano de tensões está submetido às tensões $\sigma_x = 50$ MPa, $\sigma_y = 30$ MPa e $\tau_{xy} = 20$ MPa. Determine as tensões principais e mostre-as em um esboço de um elemento adequadamente orientado.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Na solução deste problema, vamos, inicialmente, obter fórmulas gerais para determinar as tensões principais em casos de estado plano de tensões. O tensor das tensões para um ponto do sólido nestas condições, escrito na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fica:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar as tensões principais no ponto, aplicamos o procedimento geral visto nas aulas anteriores:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = 0$$

Lembrando que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ (o tensor das tensões é sempre simétrico), ficaremos com:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sigma[(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2] = 0$$

Assim uma das raízes será, evidentemente, $\sigma = \sigma_z = 0$ (já que a face de normal $\vec{n} = \vec{e}_z$ está visivelmente descarregada (sem tensões cisalhantes e sem tensão normal)). As demais tensões principais vêm da solução da equação de 2º grau:

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$$

$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\tau_{xy}^2)}$$

$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Assim, as duas outras tensões principais são:

$$\sigma' = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma'' = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultando, finalmente:

$$\sigma_1 = \max\{\sigma', \sigma'', \sigma_z\} \qquad \sigma_3 = \min\{\sigma', \sigma'', \sigma_z\}$$

...e σ_2 é a tensão principal intermediária restante.

Aplicando diretamente os equações encontradas para o caso em tela, virá:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_x = 50 \text{ MPa} \\ \sigma_y = 30 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 20 \text{ MPa} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sigma' = \frac{(50+30)}{2} + \sqrt{\left(\frac{50-30}{2}\right)^2 + (20)^2} = 62,36 \text{ MPa} \\ \sigma'' = \frac{(50+30)}{2} - \sqrt{\left(\frac{50-30}{2}\right)^2 + (20)^2} = 17,64 \text{ MPa} \end{array} \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultando:

$$\sigma_1 = \max\{\sigma', \sigma'', \sigma_z\} = 62,36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \min\{\sigma', \sigma'', \sigma_z\} = 0$$

$$\sigma_2 = 17,64 \text{ MPa}$$

Observação: note que, como esperado:

$$I_1 = \text{tr}(T) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Determinação da direção principal $\vec{n}_1$ (associada ao autovalor σ_1):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{x,i} \\ n_{y,i} \\ n_{z,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Assim, para:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} 50 & 20 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa)} \quad \sigma_1 = 62,36 \text{ MPa}$$

teremos:

$$\begin{bmatrix} -12,36 & 20 & 0 \\ 20 & -32,36 & 0 \\ 0 & 0 & -62,36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\begin{bmatrix} -12,36 & 20 & 0 \\ 20 & -32,36 & 0 \\ 0 & 0 & -62,36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Da 3ª equação, é imediato ver que: $n_{z1} = 0$

A 1ª e 2ª equações são necessariamente l.d., de tal forma que basta usar uma delas:

$$-12,36n_{x1} + 20n_{y1} = 0 \Leftrightarrow n_{y1} = \frac{12,36}{20}n_{x1} = 0,618n_{x1}$$

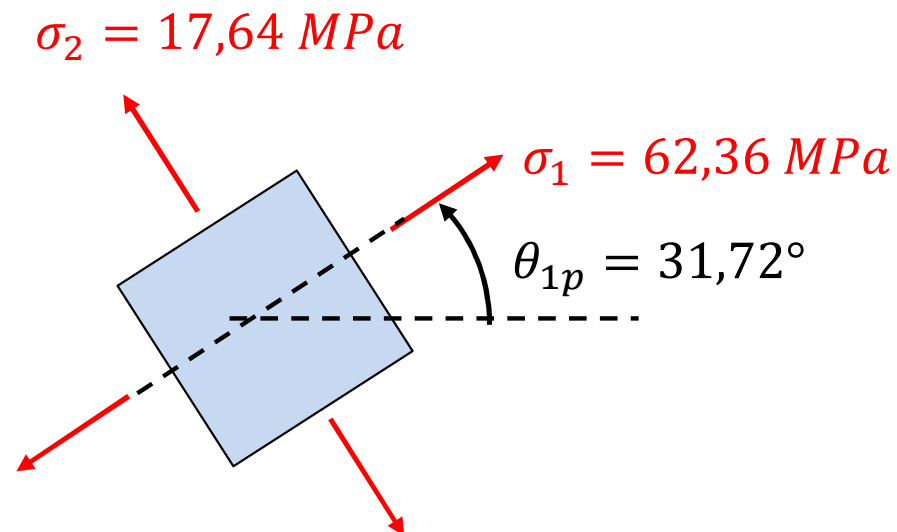
Logo:

$$\vec{n}_1 = \frac{(1; 0,618; 0)}{\sqrt{(1)^2 + (0,618)^2}} = (0,85066; 0,52571; 0)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resulta: $\theta_{1p} = \arccos(0,85066) = 31,72^\circ$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.7.
- [2] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Tensões, (2020), 66p.