



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #05

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

19/08/2025



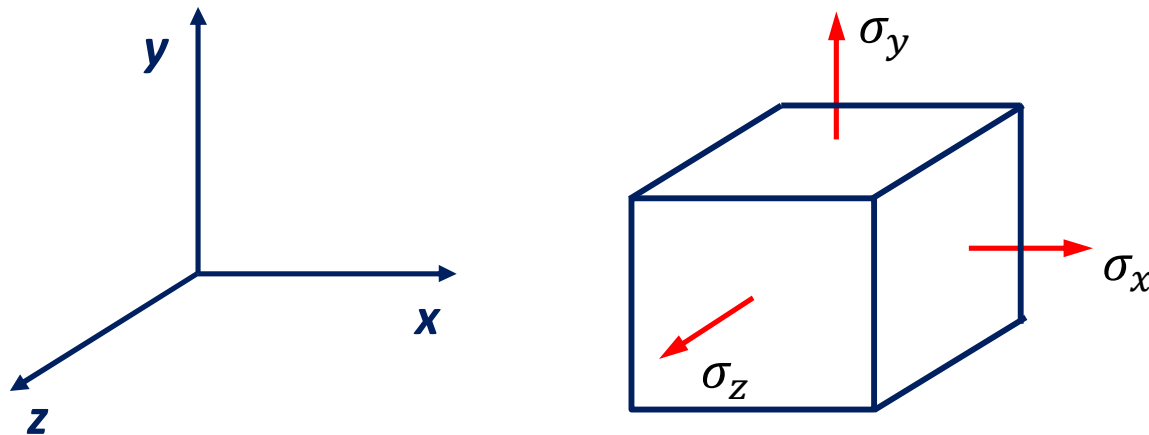
Agenda

1. Círculos de Mohr das tensões;
2. Máxima tensão de cisalhamento e planos em que atuam;
3. Transformação de tensão para o caso geral.



1. Círculos de Mohr das tensões

Consideremos o estado de tensões em um dado ponto P de um corpo, com relação a um sistema de eixos alinhados às direções principais de tensão naquele ponto:



Sem perda de generalidade, podemos considerar:

$$\sigma_x = \sigma_1 \quad \sigma_y = \sigma_2 \quad \sigma_z = \sigma_3$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Neste caso, o tensor das tensões no ponto P será dado por:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

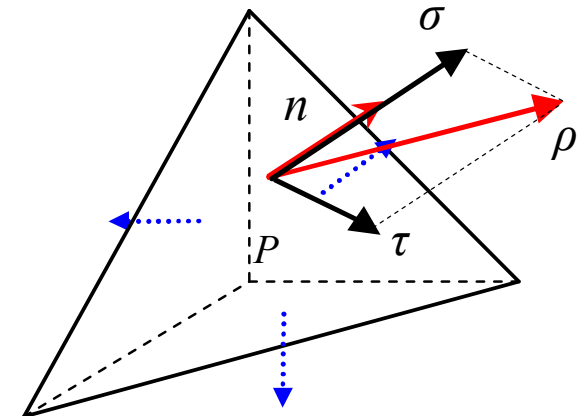
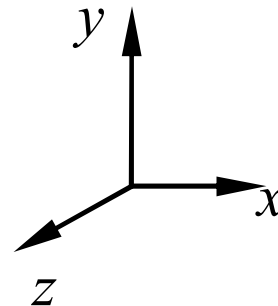
São válidas as relações:

$$\{\vec{\rho}\} = [T].\{\vec{n}\}$$

$$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

$$\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

$$\|\vec{n}\| = 1$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim, para um plano genérico de normal unitária dada por:

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)_b$$

obtemos:

$$\{\vec{\rho}\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_x \\ \sigma_2 n_y \\ \sigma_3 n_z \end{Bmatrix}$$

E as relações:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2$$

$$\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Colocando as relações anteriores na forma matricial, obtemos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \end{Bmatrix}$$

cuja solução fornece (admitindo, a priori, que as tensões principais são todas diferentes entre si):

$$n_x^2 = \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$n_y^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$n_z^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observando que: $n_x^2 \geq 0$, $n_y^2 \geq 0$, $n_z^2 \geq 0$

e lembrando que, por convenção e por hipótese: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

resulta da análise de sinal das expressões anteriores que:

$$n_x^2 = \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0$$

$$n_y^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \leq 0$$

$$n_z^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

ou de forma equivalente:

$$n_x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\sigma - \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad \text{Red Circle}$$

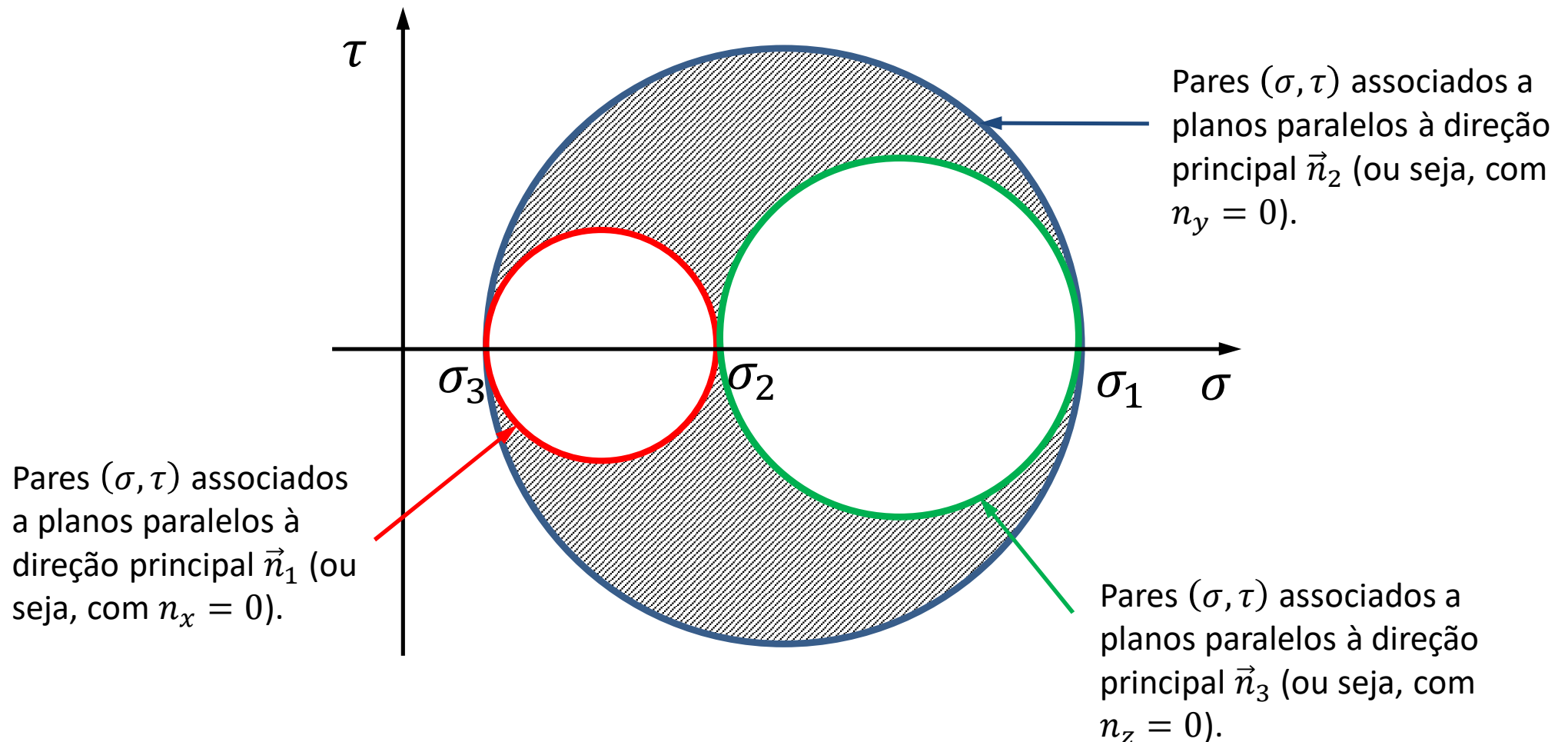
$$n_y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\sigma - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad \text{Blue Circle}$$

$$n_z^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\sigma - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad \text{Green Circle}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

No espaço definido pelas componentes do vetor tensão associado ao ponto P , as inequações dadas representam geometricamente a seguinte região hachurada:

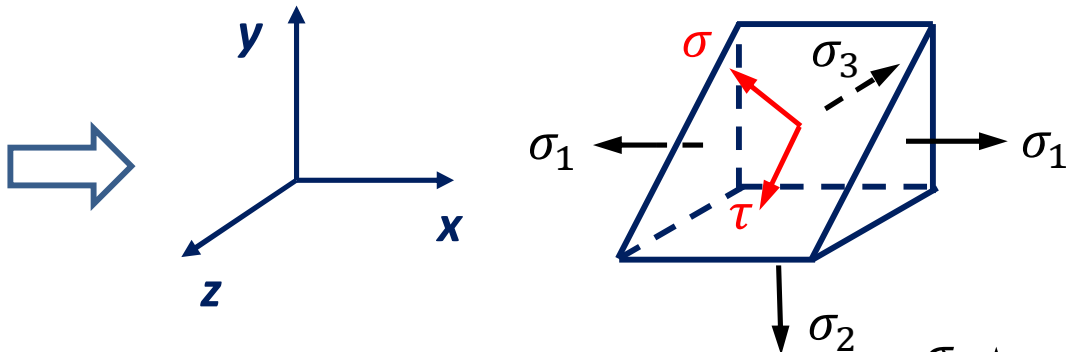




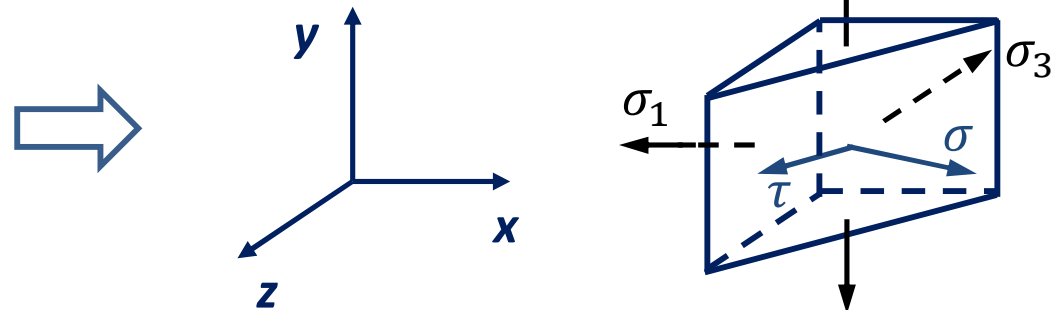
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Note:

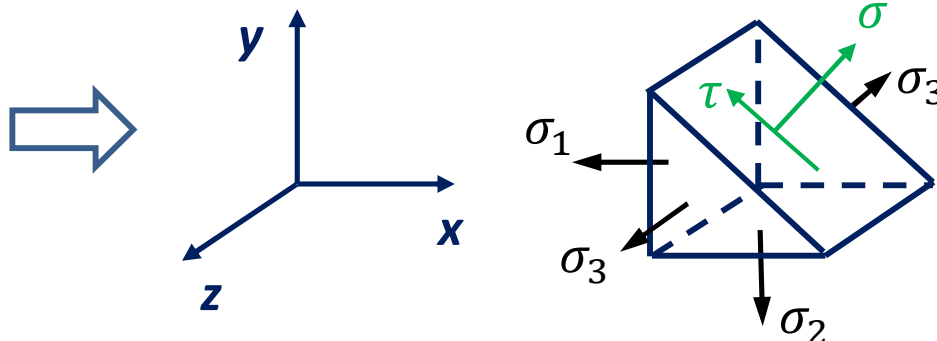
Planos paralelos à direção principal $\vec{n}_1$ estão associados a rotações do elemento de tensão em torno da direção $\vec{n}_1$.



Planos paralelos à direção principal $\vec{n}_2$ estão associados a rotações do elemento de tensão em torno da direção $\vec{n}_2$.



Planos paralelos à direção principal $\vec{n}_3$ estão associados a rotações do elemento de tensão em torno da direção $\vec{n}_3$.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

- 1) Verificamos que nenhuma tensão normal é superior à tensão principal dada por σ_1 (em valor algébrico);
- 2) Da mesma forma, verifica-se que nenhuma tensão normal é inferior à tensão principal dada por σ_3 (em valor algébrico);

- 3) A maior tensão de cisalhamento no ponto é dada por:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

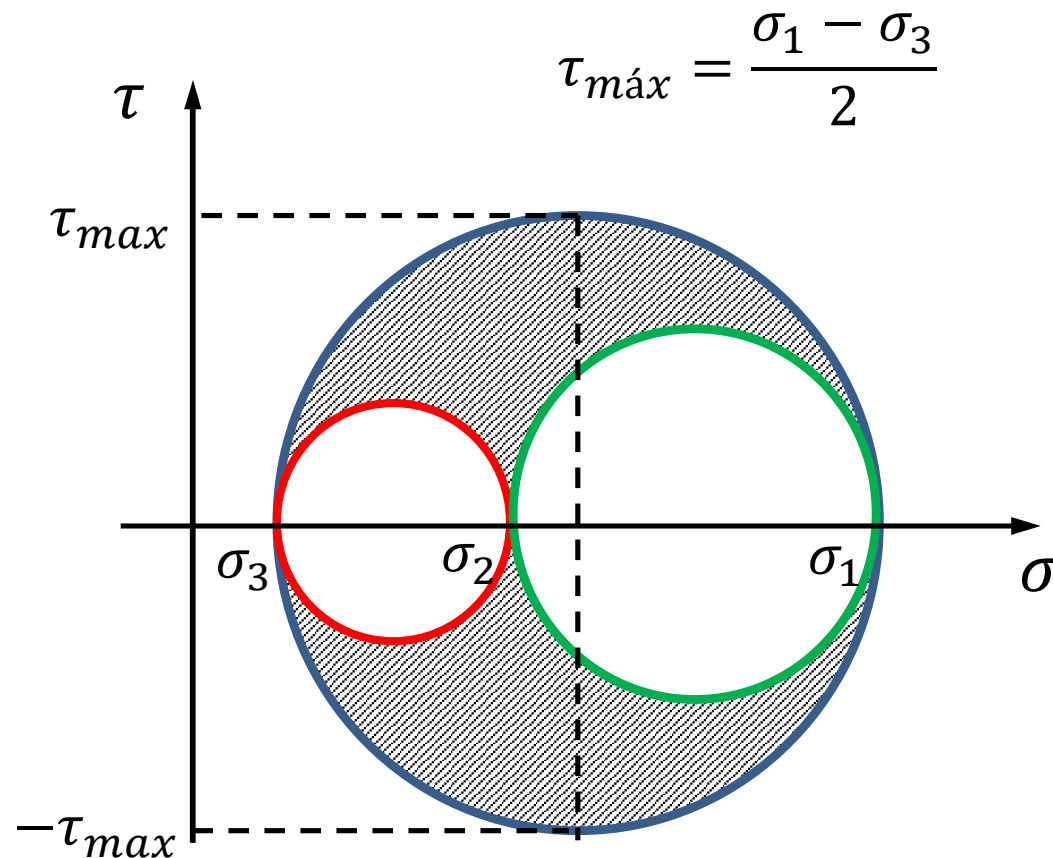
- 4) Tal tensão de cisalhamento máxima ocorre em planos cujas normais unitárias formam ângulo de 45° com as direções principais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_3$.

- 5) Para um plano inclinado genérico (que não seja paralelo a nenhuma direção principal de tensão) as componentes σ e τ do vetor tensão associado estão dentro da região hachurada compreendida pelas três circunferências.



2. Máxima tensão de cisalhamento e planos em que atuam

Como vimos pelo estudo dos círculos de Mohr, a máxima tensão cisalhante possível em um dado ponto do sólido é dada por:



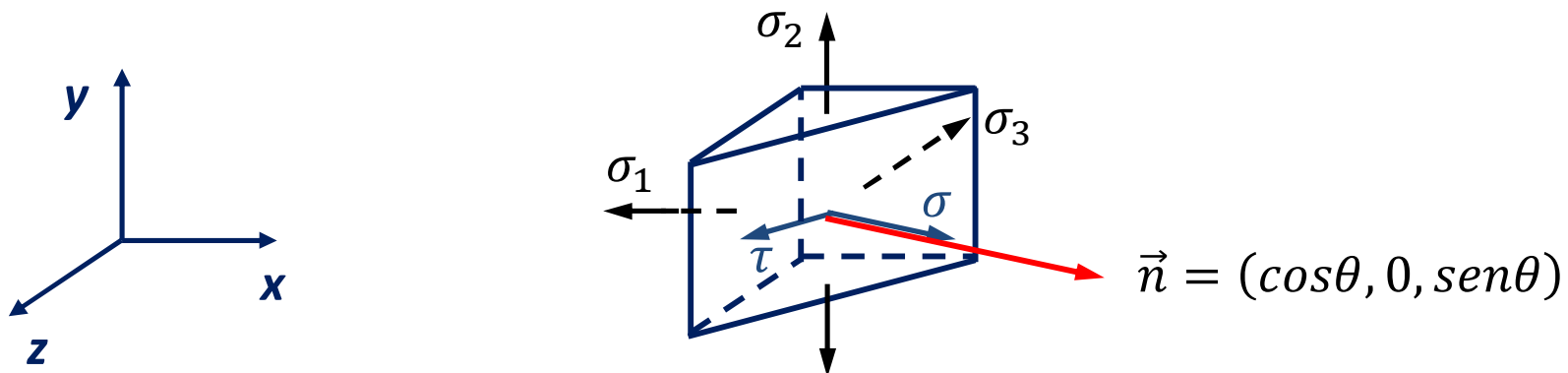


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Mostraremos, agora, que esta máxima tensão de cisalhamento ocorre em planos paralelos à direção principal $\vec{n}_2$ e cujas normais externas formam ângulos de 45° com as direções principais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_3$. Também veremos que a tensão normal atuante nesses planos será:

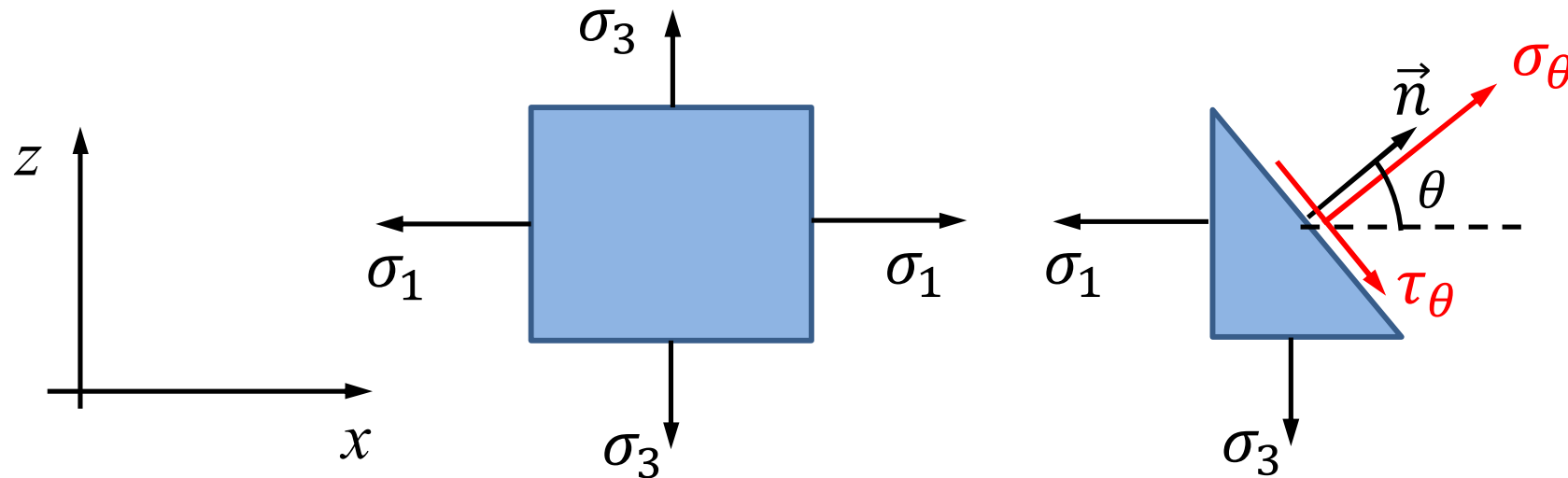
$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Como a maior circunferência está associada à condição em que $n_y = 0$, investigaremos os planos cuja normal externa é obtida por uma combinação linear dos versores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_3$, como indicado na figura:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Notemos, inicialmente, que, sendo $\vec{n} = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$, teremos:

$$\left[\begin{array}{ll} \theta = 0 & \Rightarrow \vec{n} = (1, 0, 0) = \vec{e}_x, \quad (\sigma_\theta, \tau_\theta) = (\sigma_1, 0) \\ \theta = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \vec{n} = (0, 0, 1) = \vec{e}_z, \quad (\sigma_\theta, \tau_\theta) = (\sigma_3, 0) \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para um plano genérico nestas condições (ou seja, tendo $n_y = 0$), o vetor tensão associado será dado por:

$$\{\vec{\rho}\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos\theta \\ 0 \\ \sigma_3 \sin\theta \end{Bmatrix}$$

A componente de tensão normal atuante nesse plano é:

$$\sigma_\theta = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_3 \sin^2\theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} \right) + \sigma_3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\theta)}{2} \right)$$

$$\sigma_\theta = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \cos(2\theta)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Chamando: $\vec{t} = (\text{sen}\theta, 0, -\text{cos}\theta)$

...vemos que a componente de tensão cisalhante atuante nesse plano é:

$$\tau_{\theta} = \vec{\rho} \cdot \vec{t} = \sigma_1 \text{sen}\theta \text{cos}\theta - \sigma_3 \text{sen}\theta \text{cos}\theta$$

$$\tau_{\theta} = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \text{sen}(2\theta)$$

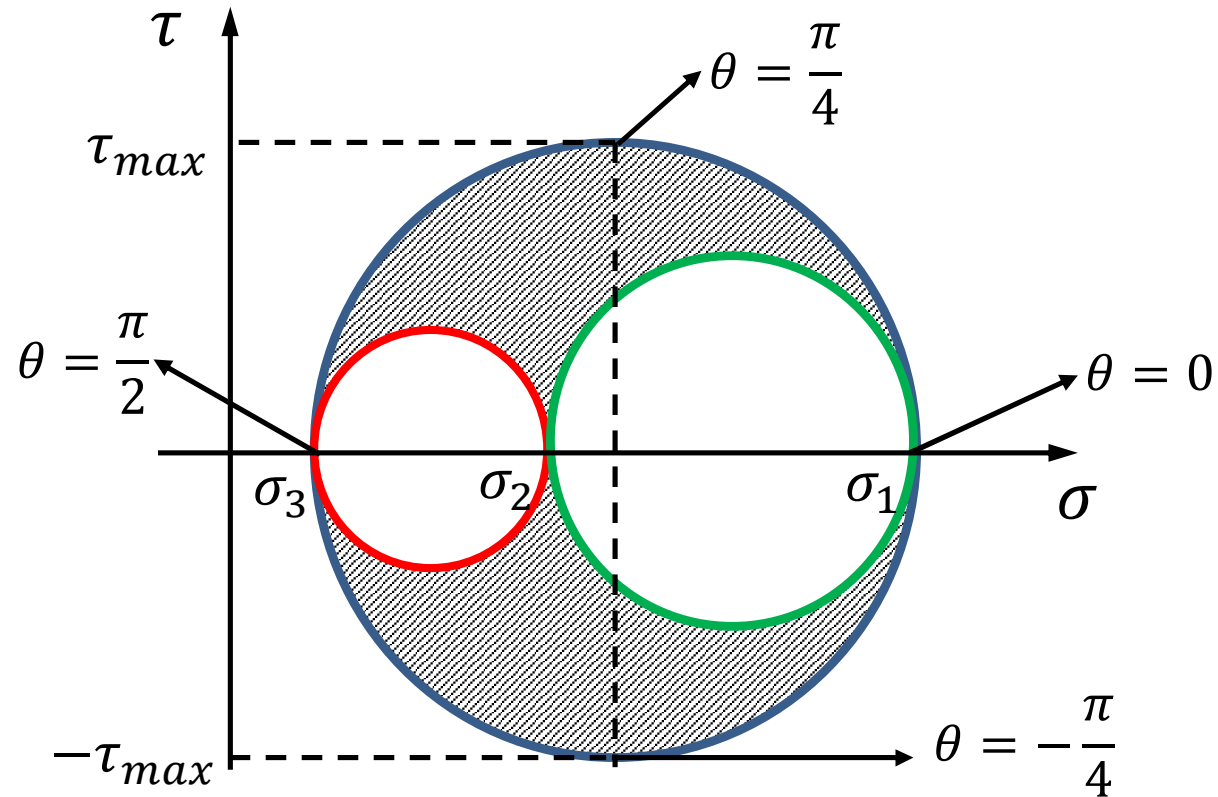
Observa-se, por fim, que as equações:

$$\sigma_{\theta} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \text{cos}(2\theta) \quad \text{e} \quad \tau_{\theta} = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \text{sen}(2\theta)$$

...são as equações paramétricas que descrevem a circunferência de raio $R = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ e centro em $(\sigma, \tau) = ((\sigma_1 + \sigma_3)/2, 0)$.



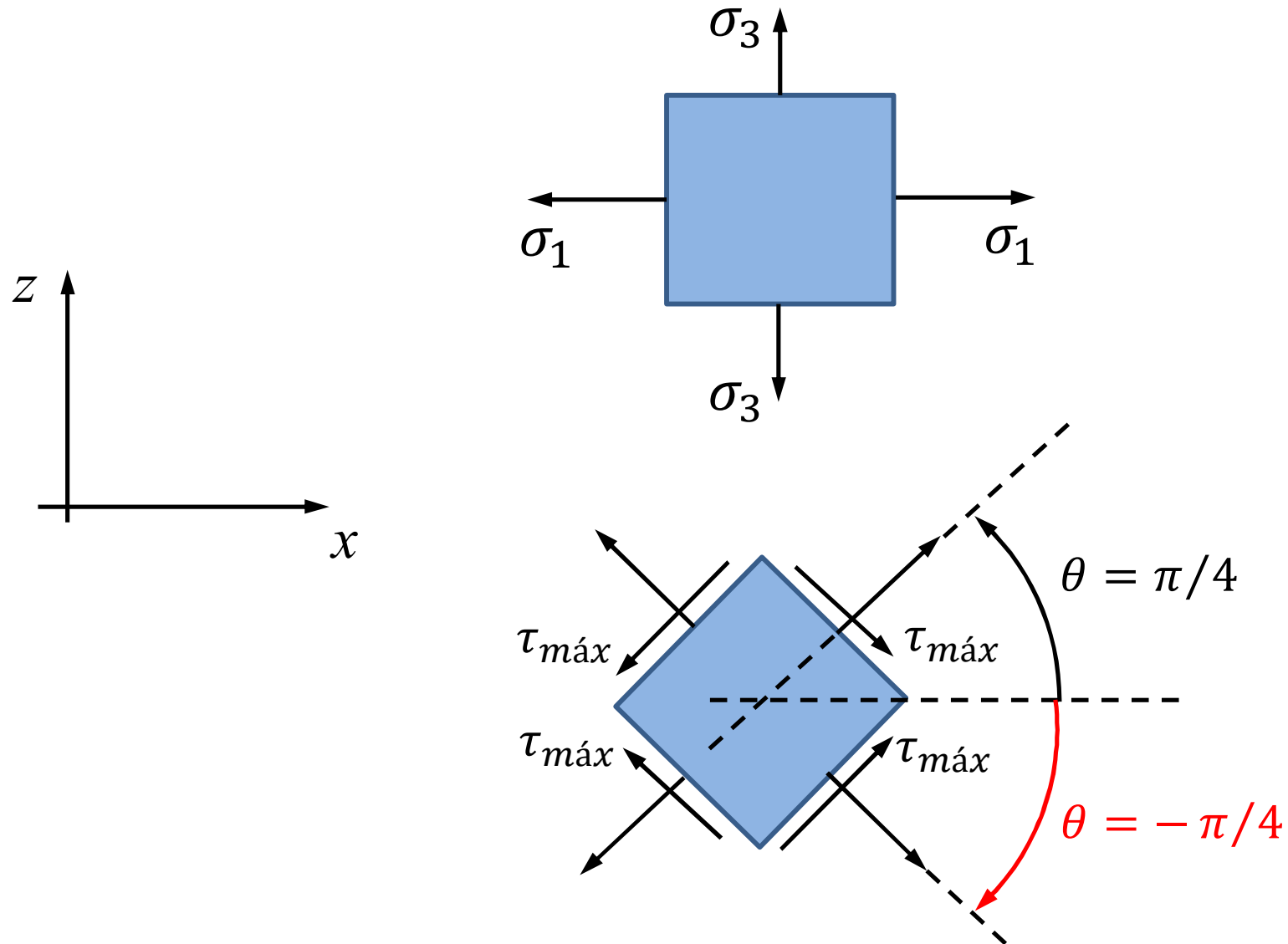
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \cos(2\theta) \\ \tau_{\theta} = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \sin(2\theta) \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} \sigma_{\theta} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \\ \tau_{\theta} = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \end{bmatrix}$$



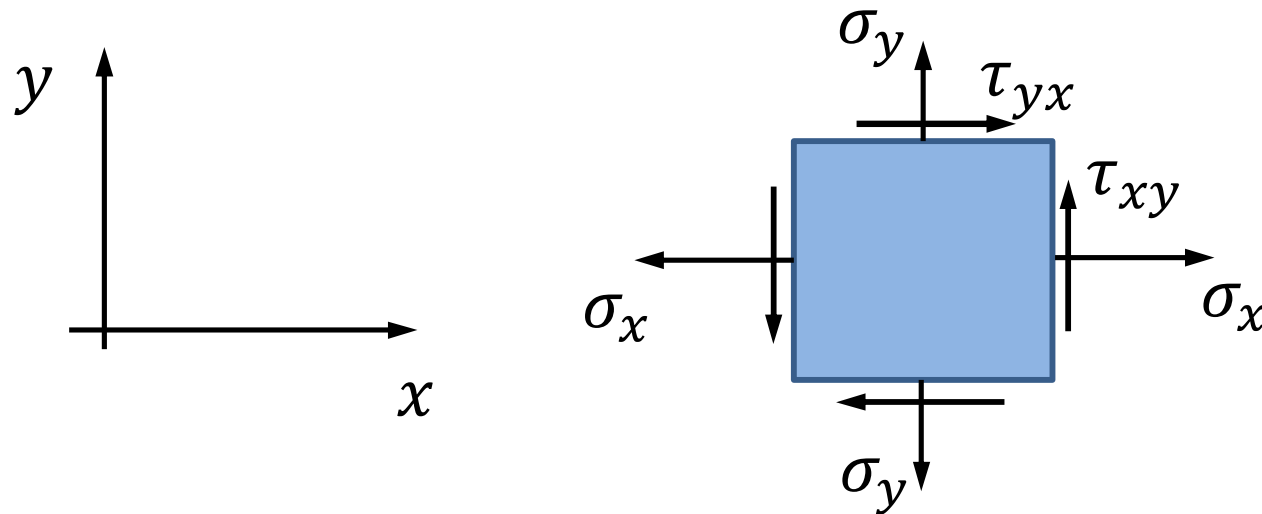
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Convenção de sinais para indicar as tensões normais e cisalhantes (pares (σ, τ)) nos círculos de Mohr das tensões:



Tensões normais: positivas se provocarem tração, e negativas se causarem compressão;

Tensões cisalhantes: positivas se girarem o elemento no sentido horário (como no caso da tensão τ_{yx} indicada no elemento acima) e negativas se girarem o elemento no sentido anti-horário (como no caso da tensão τ_{xy} indicada no elemento acima).



3. Transformação de tensão para o caso geral

Sejam $[T]_b$ e $[T]_{b'}$, as matrizes do tensor das tensões de um mesmo ponto de um sólido, porém escritas em bases diferentes. É possível mostrar que:

$$[T]_{b'} = [M]^t [T]_b [M]$$

onde:

$[M]$ = matriz de mudança de base (da base b para a base b').



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Demonstração:

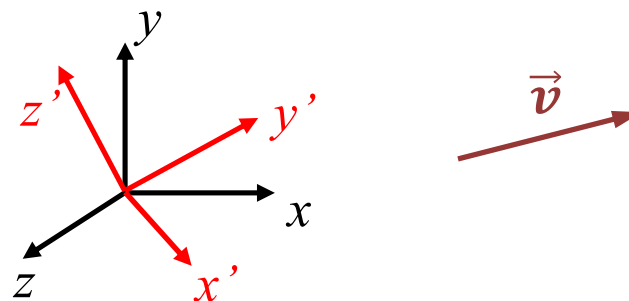
Consideremos duas bases ortonormais, com orientações positivas, formadas pelos versores:

$$b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \text{ e } b' = (\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$$

Tomemos $\vec{v}$ um vetor qualquer do espaço, com componentes:

$$\{\vec{v}\}_b = (v_x, v_y, v_z)_b = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

$$\{\vec{v}\}_{b'} = (v_{x'}, v_{y'}, v_{z'})_{b'} = v_{x'} \vec{e}_{x'} + v_{y'} \vec{e}_{y'} + v_{z'} \vec{e}_{z'}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Consideremos também que os versores da base b' sejam escritos na base b na forma:

$$\vec{e}_{x'} = m_{11}\vec{e}_x + m_{21}\vec{e}_y + m_{31}\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_{y'} = m_{12}\vec{e}_x + m_{22}\vec{e}_y + m_{32}\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_{z'} = m_{13}\vec{e}_x + m_{23}\vec{e}_y + m_{33}\vec{e}_z$$

Logo, podemos escrever:

$$\{\vec{v}\}_b = (v_x, v_y, v_z)_b = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

$$\{\vec{v}\}_{b'} = (v_{x'}, v_{y'}, v_{z'})_{b'} = v_{x'}\vec{e}_{x'} + v_{y'}\vec{e}_{y'} + v_{z'}\vec{e}_{z'}$$

$$\begin{aligned}\{\vec{v}\}_b &= v_{x'}(m_{11}\vec{e}_x + m_{21}\vec{e}_y + m_{31}\vec{e}_z) + \\ &+ v_{y'}(m_{12}\vec{e}_x + m_{22}\vec{e}_y + m_{32}\vec{e}_z) + \\ &+ v_{z'}(m_{13}\vec{e}_x + m_{23}\vec{e}_y + m_{33}\vec{e}_z)\end{aligned}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ou ainda:

$$\{\vec{v}\}_b = (v_x, v_y, v_z)_b = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \{\vec{v}\}_b &= (m_{11}v_{x'} + m_{12}v_{y'} + m_{13}v_{z'})\vec{e}_x + \\ &+ (m_{21}v_{x'} + m_{22}v_{y'} + m_{23}v_{z'})\vec{e}_y + \\ &+ (m_{31}v_{x'} + m_{32}v_{y'} + m_{33}v_{z'})\vec{e}_z + \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}_b = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix}_{b'}$$

$$\{\vec{v}\}_b = [M]\{\vec{v}\}_{b'}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A matriz $[M]$ é a matriz de mudança de base (entre as bases b e b'):

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the components of the transformation matrix $[M]$ relative to the new basis vectors $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$, and $\vec{e}_{z'}$:

- Blue dashed box around the first column (m_{11}, m_{21}, m_{31}) points to "Comp. $\vec{e}_{x'}$ ".
- Red dashed box around the second column (m_{12}, m_{22}, m_{32}) points to "Comp. $\vec{e}_{y'}$ ".
- Green dashed box around the third column (m_{13}, m_{23}, m_{33}) points to "Comp. $\vec{e}_{z'}$ ".

Como a matriz $[M]$ é formada pelos cossenos diretores dos ângulos que cada um dos versores da base b' forma com os versores da base b , ela exibe algumas propriedades interessantes como:

$$\det[M] = 1 \qquad [M]^{-1} = [M]^t$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Sejam agora $[T]_b$ e $[T]_{b'}$ as matrizes do tensor das tensões de um mesmo ponto P de um sólido, escritas respectivamente nas bases b e b' . Seja $\vec{n}$ a normal externa a um dado plano que passa por P , e $\vec{\rho}$ o vetor tensão associado ao ponto P e ao plano de normal externa $\vec{n}$.

Temos:

$$\{\vec{\rho}\}_b = [T]_b \{\vec{n}\}_b \quad \quad \{\vec{\rho}\}_{b'} = [T]_{b'} \{\vec{n}\}_{b'}$$

E, do exposto:

$$\{\vec{\rho}\}_b = [M] \{\vec{\rho}\}_{b'} \quad \quad \{\vec{n}\}_b = [M] \{\vec{n}\}_{b'}$$

Logo: $[M] \{\vec{\rho}\}_{b'} = [T]_b [M] \{\vec{n}\}_{b'} \Leftrightarrow \{\vec{\rho}\}_{b'} = [M]^t [T]_b [M] \{\vec{n}\}_{b'}$

$$[T]_{b'} = [M]^t [T]_b [M]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.7.
- [2] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Tensões, (2020), 66p.