



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #02

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

06/08/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Estudo das Tensões – Aula #02

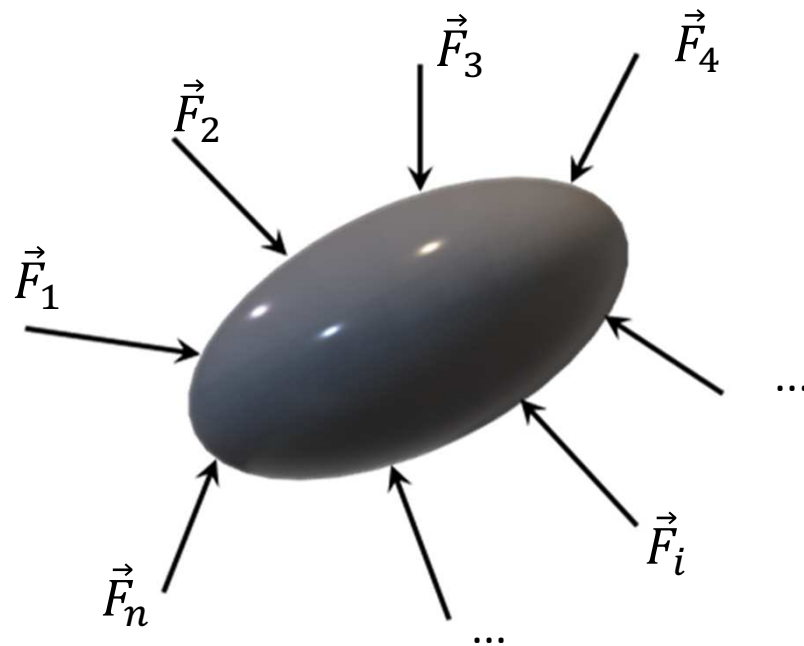
Agenda:

1. Conceito de tensão;
2. Tensão normal e de cisalhamento;
3. Notação para forças distribuídas e tensões;
4. Tensões nos planos coordenados;
5. Convenção de sinais para tensões;
6. Vetor tensão em um plano inclinado e o tensor das tensões de Cauchy.



1. Conceito de tensão

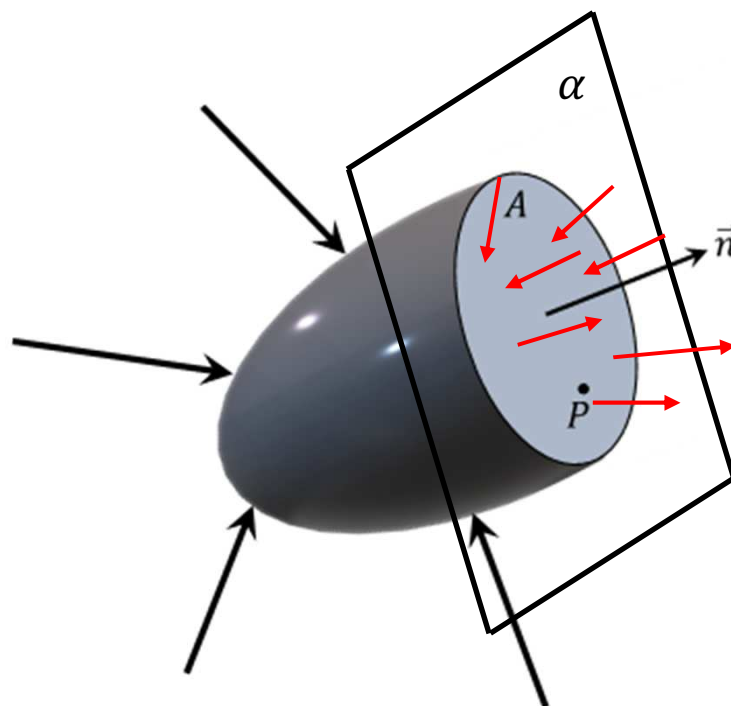
Seja o sólido genérico S representado abaixo, submetido a um sistema de n forças externas $\vec{F}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) em equilíbrio (estático ou dinâmico):





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Consideremos, agora, que o sólido S seja cortado por um plano α que passa por um ponto $P \in S$ e é perpendicular a um versor $\vec{n}$. Para que a parte que foi separada de S continue em equilíbrio, é necessário que existam forças distribuídas sobre a área A que garantam esse equilíbrio. Essas forças são chamadas de forças internas e são responsáveis pela transmissão dos esforços pelo sólido.

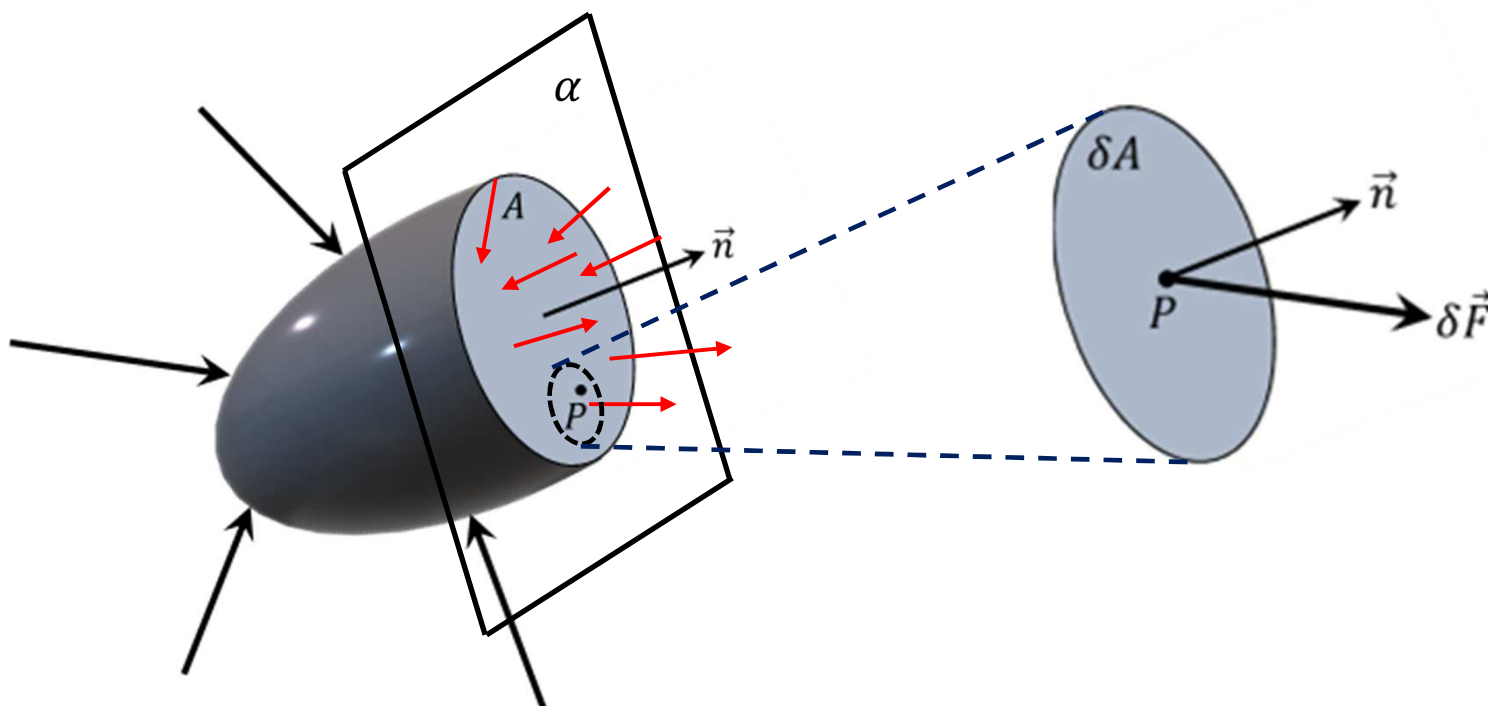




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Um elemento de área infinitesimal δA tomado sobre α em torno do ponto P estará submetido a uma força interna infinitesimal $\delta \vec{F}$. Em geral, podemos estabelecer que:

$$\delta \vec{F} = \delta \vec{F}(P, \vec{n}, \delta A)$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Denominaremos tensão média à razão:

$$\vec{\rho}_m = \frac{\delta \vec{F}}{\delta A}$$

E, do exposto: $\vec{\rho}_m = \vec{\rho}_m(P, \vec{n}, \delta A)$

Levando ao limite para $\delta A \rightarrow 0$ (e considerando que exista este valor limite), obtemos o denominado vetor tensão de Cauchy [1], dado por:

$$\vec{\rho} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}}{\delta A}$$

Sendo que, neste caso: $\vec{\rho} = \vec{\rho}(P, \vec{n})$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Unidade (no S.I.):

$$[\rho] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

Para conhecer o *estado de tensão* no ponto P é necessário conhecer o vetor $\vec{\rho}$ em todas as direções. Cada ponto de um sólido pode estar (e, em geral, está) submetido a um estado de tensão diferente.

O estudo das tensões que ocorrem nos pontos de uma estrutura é fundamental para saber se ela é capaz de resistir aos esforços externos aplicados sem sofrer falha.



2. Tensão normal e de cisalhamento

Assim como a força interna, o vetor tensão $\vec{\rho}$ também pode ser decomposto em duas componentes: uma normal ao plano de corte α (denominada tensão normal) e outra paralela ao plano de corte (denominada tensão cisalhante). A relação entre o vetor tensão e suas componentes (normal e cisalhante) é dada por:

$$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

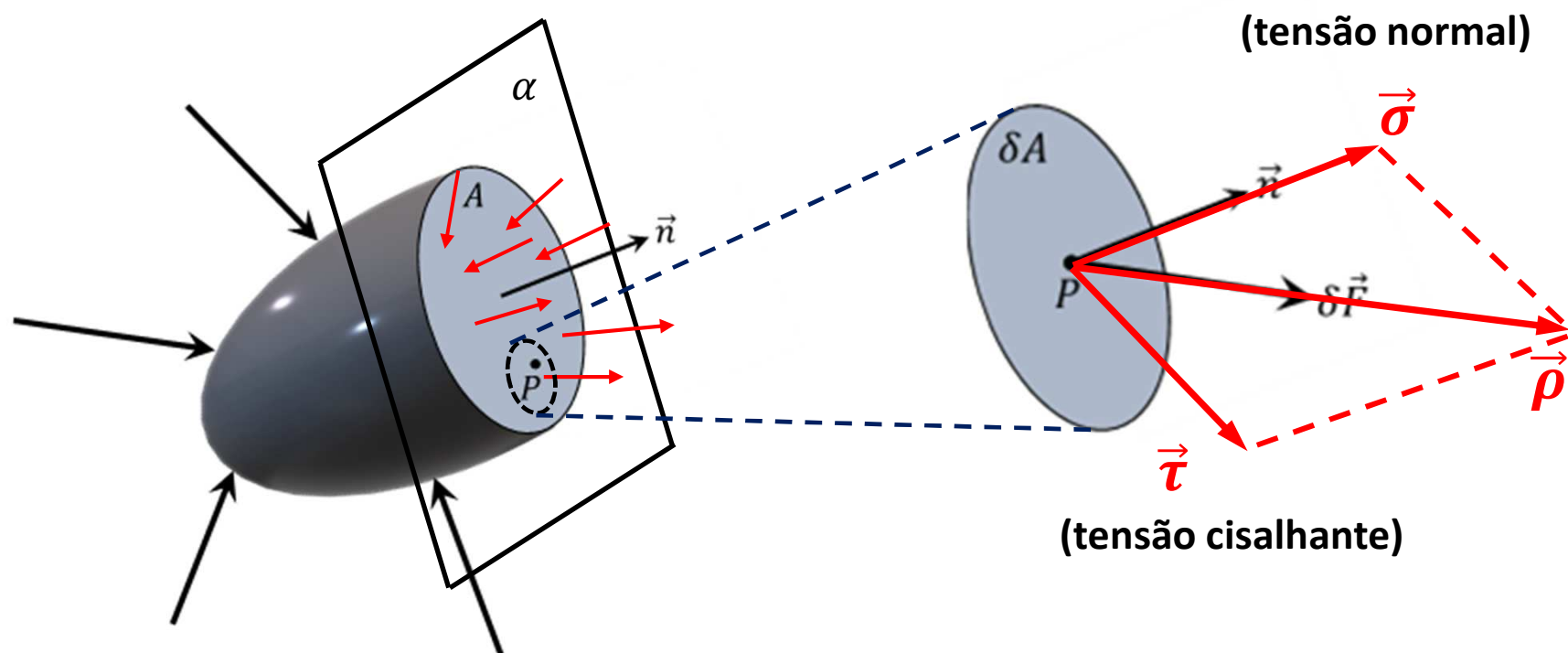
Onde:

- $\vec{\sigma} = \sigma \vec{n}$ $\vec{\tau} = \tau \vec{t}$
- $\vec{\sigma}$ e $\vec{\tau}$: são vetores (possuem magnitude, direção e sentido)
- σ e τ : são escalares
- $\vec{n}$ e $\vec{t}$: são versores (possuem norma unitária)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\vec{\rho} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Note que a componente normal ($\vec{\sigma}$) do vetor tensão ($\vec{\rho}$) terá sempre a direção do versor $\vec{n}$ (versor normal ao plano de corte) e:

- Se $\sigma > 0$, a tensão normal é de tração;
- Se $\sigma = 0$, não há componente normal do vetor tensão;
- Se $\sigma < 0$, a tensão normal é de compressão.

Quanto à componente cisalhante, esta pode ser obtida simplesmente pela diferença (vetorial) entre o vetor tensão e sua componente normal:

$$\vec{\rho} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \quad \longleftrightarrow \quad \tau \vec{t} = \vec{\rho} - \sigma \vec{n}$$

Outra relação útil: $\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Deve-se observar que a decomposição do vetor tensão nessas duas componentes não tem apenas significado geométrico, pois os materiais têm limites de resistência diferentes quando submetidos a tensões normais ou tensões de cisalhamento.

Nas próximas aulas, veremos que será possível determinarmos para cada ponto do sólido:

- A máxima tensão normal e sua direção;
- A máxima tensão de cisalhamento e sua direção.

Sendo estas determinações importantes para a análise (ou dimensionamento) de uma estrutura.



3. Notação para forças distribuídas e tensões

As forças que atuam sobre as estruturas podem ser classificadas em:

- Forças distribuídas no volume (dadas, no S.I., em N/m^3), a exemplo das forças gravitacionais, forças eletromagnéticas e forças de inércia;
- Forças distribuídas na superfície (dadas, no S.I., em N/m^2), a exemplo das forças de contato entre sólidos, ou das forças decorrentes da ação de fluidos sobre sólidos, a exemplo das forças hidrostáticas ou hidrodinâmicas.

Notação para forças distribuídas no volume: $\vec{b}$

Notação para forças distribuídas na superfície: $\vec{\mathcal{J}}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para as tensões internas, como vimos, utilizaremos as letras gregas:

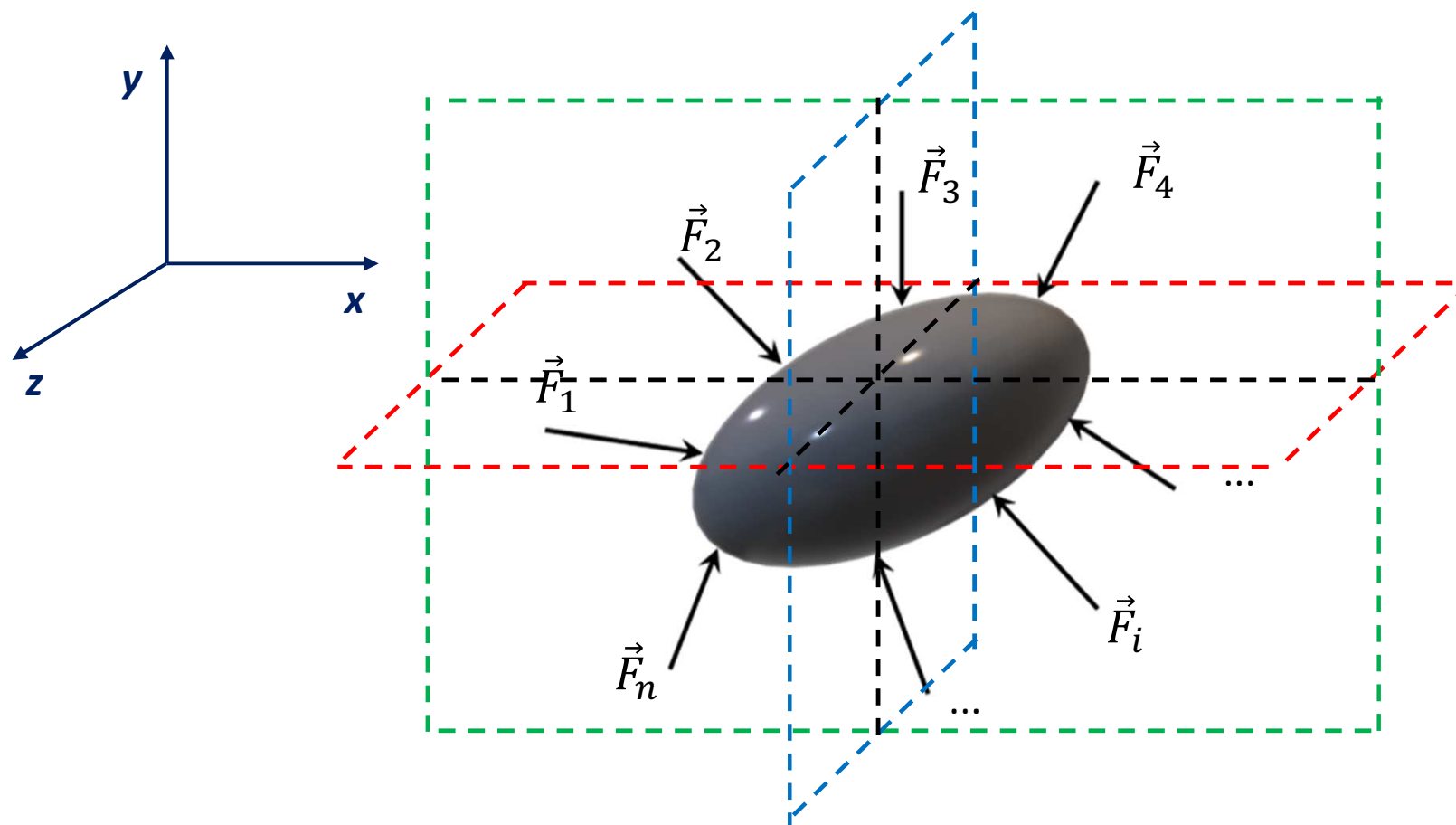
σ (sigma): para denotar a tensão normal a um dado plano em um dado ponto;

τ (tau): para denotar a tensão cisalhante a um dado plano em um dado ponto;

ρ (rho): para denotar o vetor tensão em um dado plano em um dado ponto.



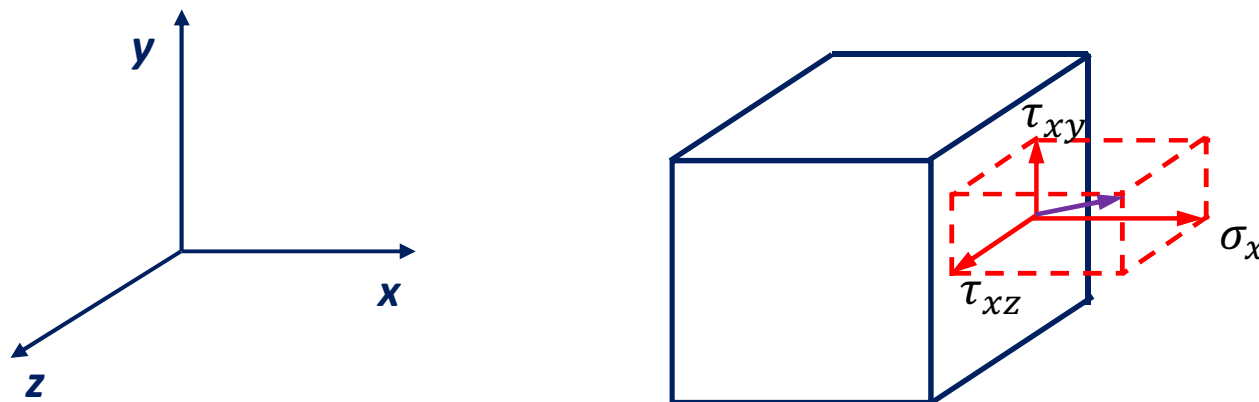
4. Tensões nos planos coordenados





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Vetor tensão obtido segundo o plano de corte com normal externa $\vec{n} = \vec{e}_x$:

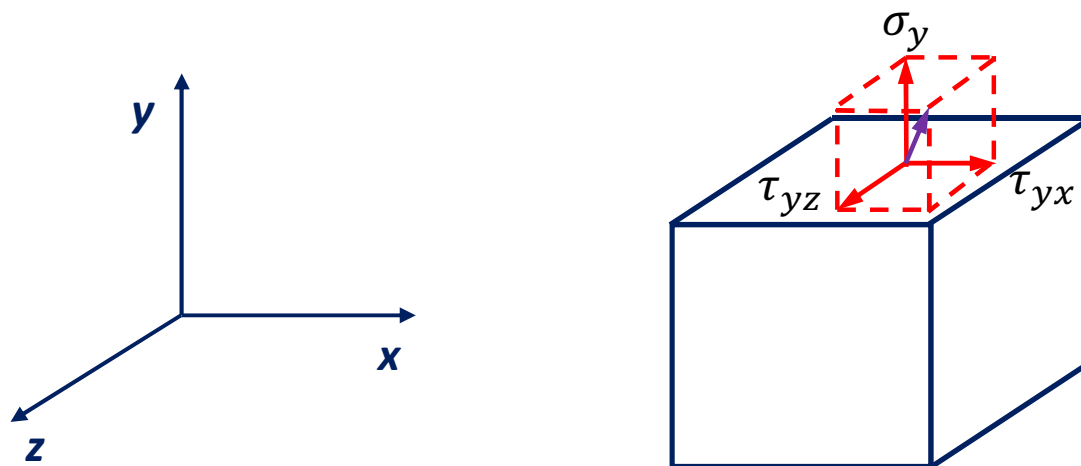


$$\vec{\rho}\Big|_{\vec{n}=\vec{e}_x} = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{xy} \vec{e}_y + \tau_{xz} \vec{e}_z$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Vetor tensão obtido segundo o plano de corte com normal externa $\vec{n} = \vec{e}_y$:

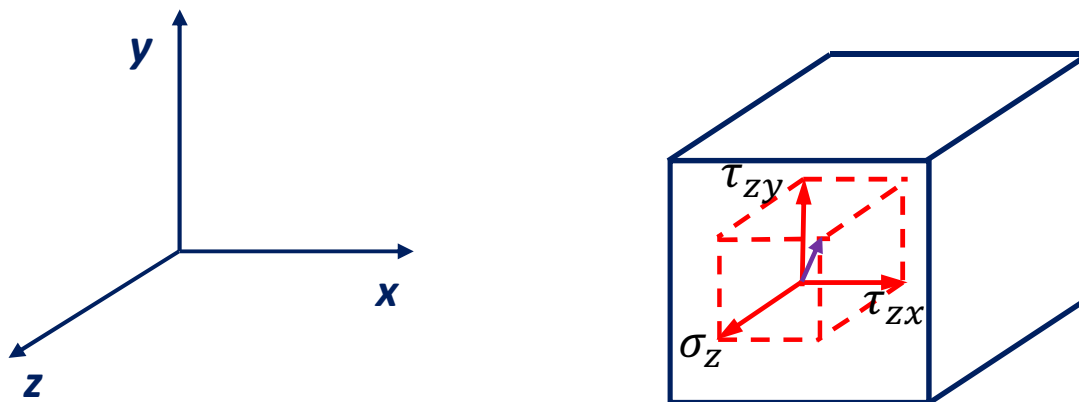


$$\vec{\rho}\Big|_{\vec{n}=\vec{e}_y} = \tau_{yx}\vec{e}_x + \sigma_y\vec{e}_y + \tau_{yz}\vec{e}_z$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Vetor tensão obtido segundo o plano de corte com normal externa $\vec{n} = \vec{e}_z$:

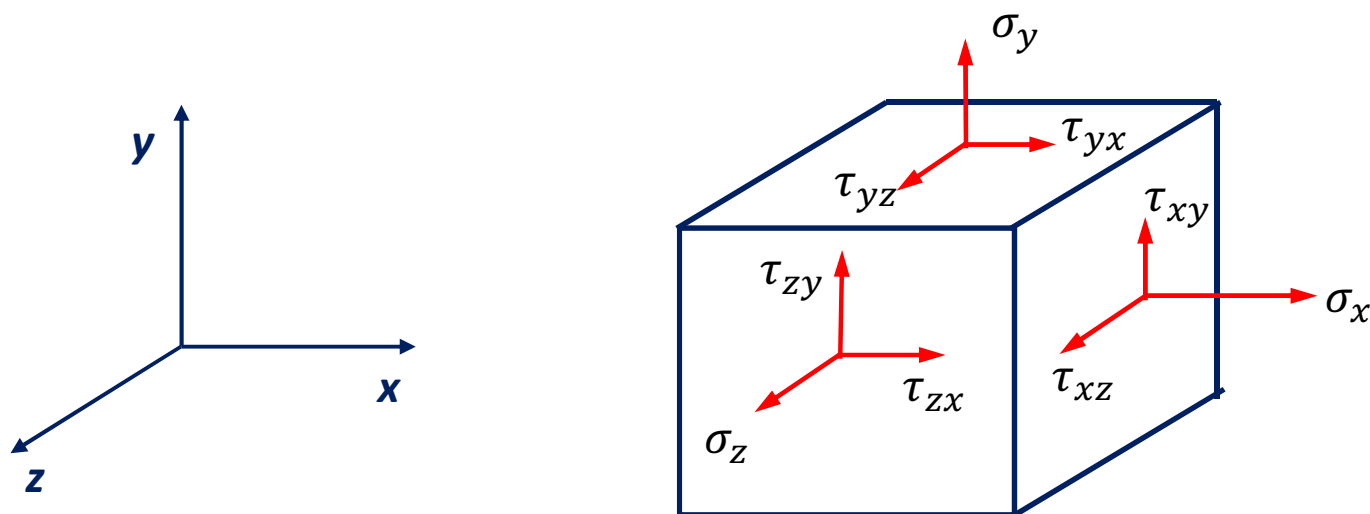


$$\vec{\rho}\Big|_{\vec{n}=\vec{e}_z} = \tau_{zx}\vec{e}_x + \tau_{zy}\vec{e}_y + \sigma_z\vec{e}_z$$



5. Convenção de sinais para tensões

Seja o estado de tensões em um ponto de um sólido como indicado:

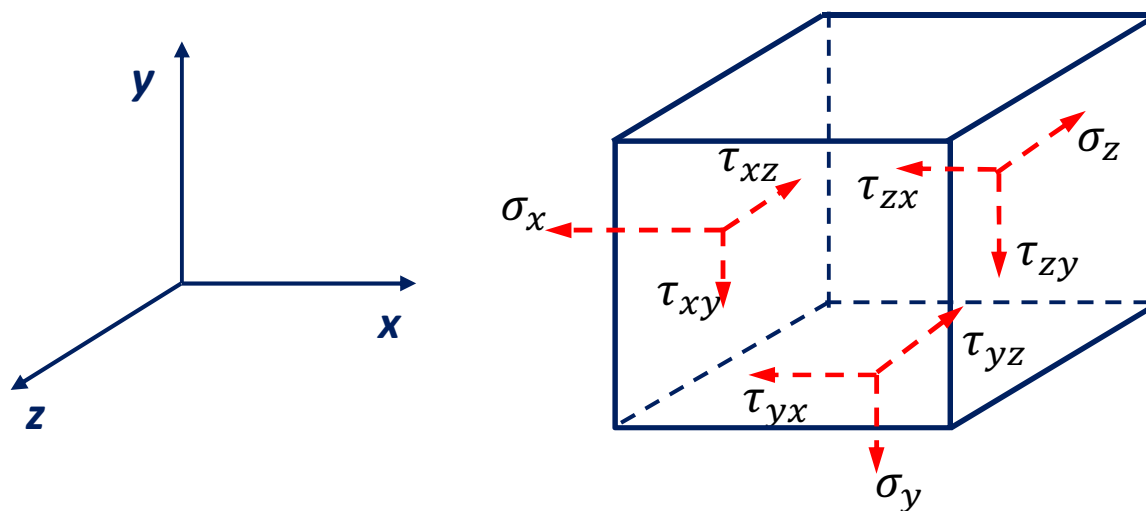


Nas faces de orientação positiva, as tensões são positivas se tiverem o mesmo sentido de um dos eixos coordenados, e são negativas se tiverem o sentido oposto a um dos eixos coordenados.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tensões nas faces de orientação negativa:

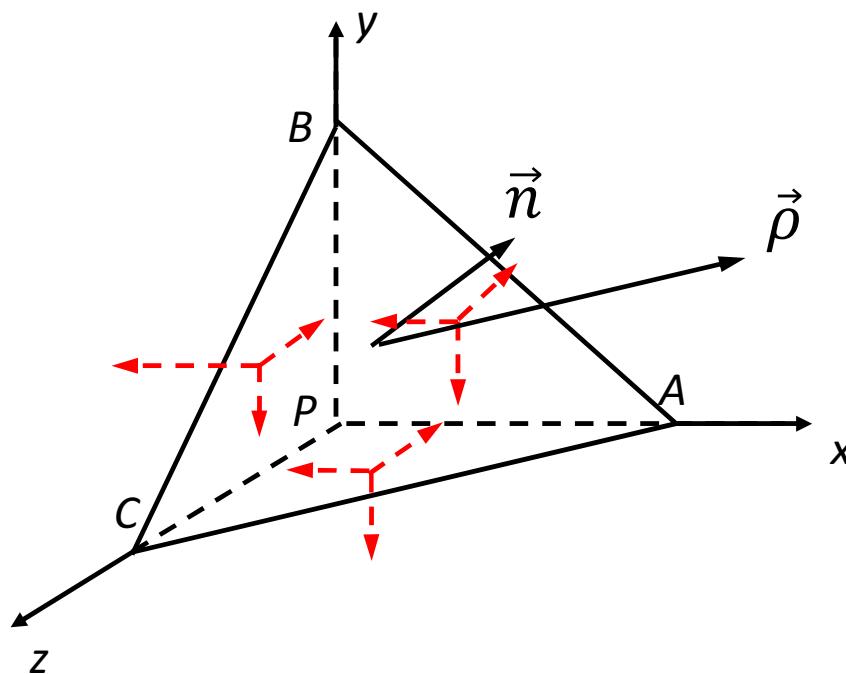


Nas faces de orientação negativa, as tensões são positivas se tiverem o sentido oposto a um dos eixos coordenados, e são negativas se tiverem o mesmo sentido de um dos eixos coordenados.



6. Vetor tensão em um plano inclinado e o tensor das tensões de Cauchy

Consideremos um sólido genérico, em equilíbrio sob a ação de forças externas $\vec{F}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e um tetraedro infinitesimal ($PABC$) retirado do sólido como indicado na figura abaixo:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Sejam também:

μ , a massa específica do material (na vizinhança do ponto P);

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, a aceleração do centro de massa do tetraedro $PABC$ em um dado instante de tempo t ;

$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, a normal externa unitária ao plano inclinado ABC ;

$\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)$, o vetor tensão atuante no plano inclinado ABC ;

dS, dS_x, dS_y, dS_z , as áreas das faces ABC, PBC, PAC e PAB , respectivamente;

h = altura do tetraedro $PABC$ relativamente ao plano inclinado ABC ;

$dV = hdS/3$ = volume infinitesimal do tetraedro $PABC$;

$m = \mu dV$ = massa do tetraedro $PABC$.



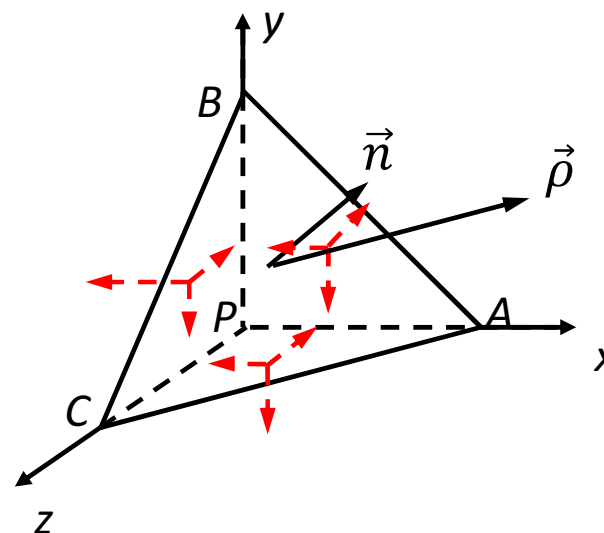
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Impondo o equilíbrio de forças no tetraedro $PABC$, teremos:

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a} = m(a_x, a_y, a_z)$$

Onde a resultante das forças atuantes sobre o tetraedro é dada por:

$$\begin{aligned} \vec{R} = & (\rho_x, \rho_y, \rho_z)dS - (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})dS_x \\ & - (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz})dS_y - (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z)dS_z \\ & + (b_x, b_y, b_z)dV \end{aligned}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Utilizando as relações geométricas:

$$\left[\begin{array}{l} dS_x = dS \cdot \cos \alpha = dS \cdot n_x \\ dS_y = dS \cdot \cos \beta = dS \cdot n_y \\ dS_z = dS \cdot \cos \gamma = dS \cdot n_z \end{array} \right.$$

Teremos:

$$\begin{aligned} \vec{R} = & (\rho_x, \rho_y, \rho_z) dS - (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}) dS \cdot n_x - (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}) dS \cdot n_y \\ & - (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z) dS \cdot n_z + (b_x, b_y, b_z) h dS / 3 = \mu (a_x, a_y, a_z) h dS / 3 \end{aligned}$$

Dividindo por dS e levando ao limite para $dS \rightarrow 0$ (o que equivale a dizer que $h \rightarrow 0$ e que o plano inclinado ABC passa, no limite, por P), teremos:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$(\rho_x, \rho_y, \rho_z) = (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})n_x + (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz})n_y + (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z)n_z$$

Ou, usando a notação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Componentes do vetor
tensão associado ao ponto P
e ao plano de normal $\vec{n}$

$\{\vec{\rho}\} = [T] \cdot \{\vec{n}\} \longrightarrow$ Normal externa (unitária) ao
plano inclinado

$\longrightarrow$ Tensor das tensões no ponto P



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$\downarrow$
 $\vec{\rho}|_{\vec{n}=\vec{e}_x}$

$\downarrow$
 $\vec{\rho}|_{\vec{n}=\vec{e}_y}$

$\downarrow$
 $\vec{\rho}|_{\vec{n}=\vec{e}_z}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy
- [2] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Tensões, (2020), 66p.
- [3] Popov, E.P. Engineering Mechanics of Solids, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1998, 864p.