



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II*

*Aula #01*

*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

*05/08/2025*



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Agenda:***

1. Apresentação Geral do Curso
  2. Objetivo do Curso e Pontos Importantes
  3. Conteúdo da Aula #01
- ✓ 3.1 Esforços solicitantes em estruturas 3D formadas por barras



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***1. Apresentação Geral do Curso***

Nome da Disciplina: Mecânica dos Sólidos II

Sigla da Disciplina: PME-3211

Número de Créditos-Aula: 4 CA (1 CA = 15 horas de atividades)

Número de Créditos-Trabalho: 0 CT (1 CT = 30 horas de atividades)

Turma: 2025202 – Prof. Roberto Ramos Jr.

Aulas: 3as, das 09:20 às 11:00

4as, das 09:20 às 11:00

Total de 27 aulas + 4 Provas (P1, P2, P3, PSub)

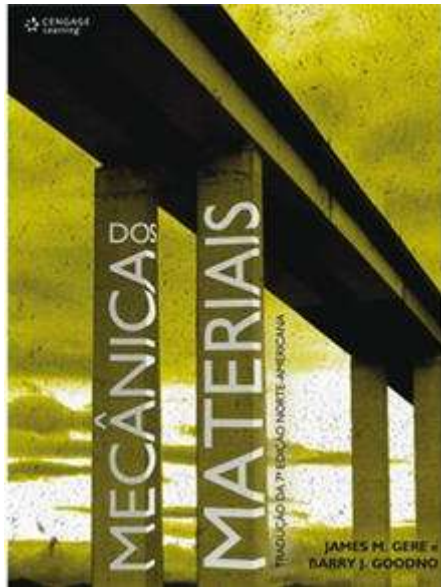
Cronograma, avisos e outros: ver <https://edisciplinas.usp.br/>



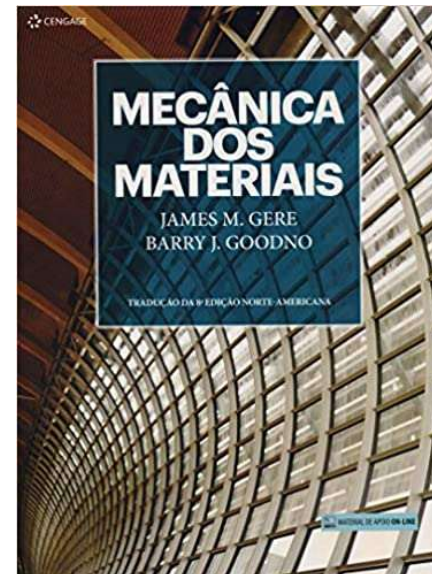
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Livro Texto:

Gere, J.M.; Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais , trad. 7ª ed. Norte-americana, Cengage Learning, 2010, 860p.



(7ª Edição)



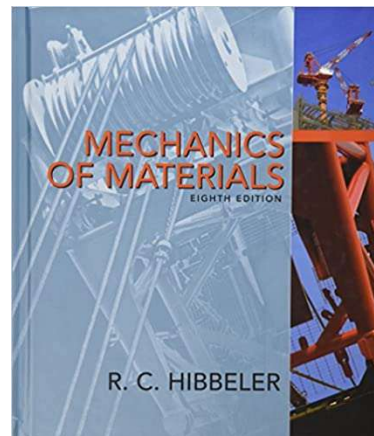
(8ª Edição)



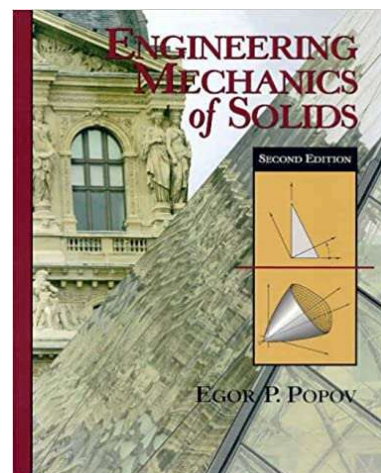
***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Outros livros de apoio:

Hibbeler, R.C. Mechanics of Materials,  
8<sup>th</sup> ed., Ed. Pearson, 2011, 888p.



Popov, E.P. Engineering Mechanics of  
Solids, 2<sup>nd</sup> ed., Prentice-Hall, Inc., 1998,  
864p.





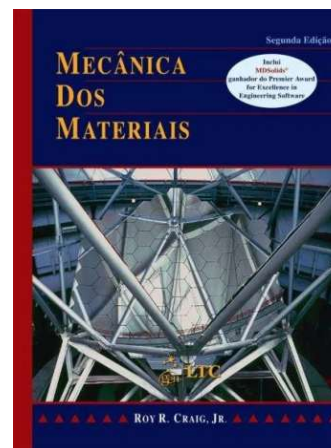
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Outros livros de apoio:

Philpot T.A. Mecânica dos Materiais - Um Sistema Integrado de Ensino, 2ª ed., Ed. LTC, 2013, 730p.



Craig, Jr., R.R. Mecânica dos Materiais, 2ª ed., Ed. LTC, 2003, 570p.





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

*Critério de Aprovação:*

$$A = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} \geq 5,0 \quad \text{e} \quad F \geq 70\%$$

Data da P1: 10/09/2025, com início às 07:30

Data da P2: 22/10/2025, com início às 09:20

Data da P3: 03/12/2025, com início às 07:30

Data da PSub: 10/12/2025, com início às 07:30

Obs:

1. PME-3211 não oferece prova de recuperação!
2. A prova substitutiva (PSub) é aberta a todos, mas substitui obrigatoriamente a pior nota obtida nas provas anteriores.



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***2. Objetivo do Curso e Pontos Importantes***

**2.1. Objetivo do Curso:**

Apresentar conceitos mais avançados sobre o comportamento das estruturas, complementando os estudos iniciados com a disciplina PME-3210, Mecânica dos Sólidos I. Em resumo, serão abordados na disciplina:

- Estado triplo de tensões e estado triplo de deformações;
- Vasos de pressão de parede fina, cilíndricos e esféricos;
- Critérios de resistência;
- Métodos de energia e análise de estruturas hiperestáticas;
- Estabilidade estrutural de barras sob flexo-compressão.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

2.2. Pontos Importantes:

- Requisito para PME-3211: PME-3210 (Mecânica dos Sólidos I)
- Apesar de não ser pré-requisito para outras disciplinas do curso de Engenharia Mecânica, a disciplina PME-3211 certamente pode auxiliar no entendimento dos conceitos apresentados em outras disciplinas como:
  - \* PME-3400 (Vibrações) – 5º semestre;
  - \* PME-3320 (Metodologia do Projeto I) – 5º semestre;
  - \* PME-3350 (Elementos de Máquinas I) – 6º semestre;
  - \* PME-3421 (Metodologia do Projeto II) – 7º semestre.



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

**2.2. Pontos Importantes (continuação):**

Com os conteúdos da disciplina, espera-se que o egresso do curso de Engenharia Mecânica seja capaz de:

- Utilizar corretamente as unidades empregadas para as diversas grandezas mecânicas relacionadas à análise estrutural;
- Reconhecer imediatamente quando uma fórmula está (ou não) correta dimensionalmente;
- Interpretar corretamente as ordens de grandeza (de tensões, deformações e deslocamentos) oriundas dos cálculos realizados, com base nas hipóteses admitidas para a utilização das formulações;
- Reconhecer as limitações das fórmulas apresentadas nos cursos de Mecânica dos Sólidos;
- Projetar e analisar estruturas mais complexas como vigas contínuas, pórticos, barras curvas, vasos de pressão cilíndricos e esféricos, etc.



### 3. Esforços solicitantes em estruturas 3D formadas por barras

#### **Objetivos:**

- Aplicar os conceitos estudados em PME-3210 para determinar os esforços solicitantes em estruturas planas (2D) e em estruturas 3D formadas por barras curvas;
- Servir de material de apoio para análises futuras (baseadas nos métodos de energia) nas quais o cálculo de deslocamentos e rotações depende do conhecimento dos esforços solicitantes em toda a estrutura.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Fig. 1. Tubulações industriais são exemplos típicos de estruturas reticuladas.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Fig. 2. Outros exemplos de tubulações industriais que podem ser analisadas como estruturas reticuladas.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

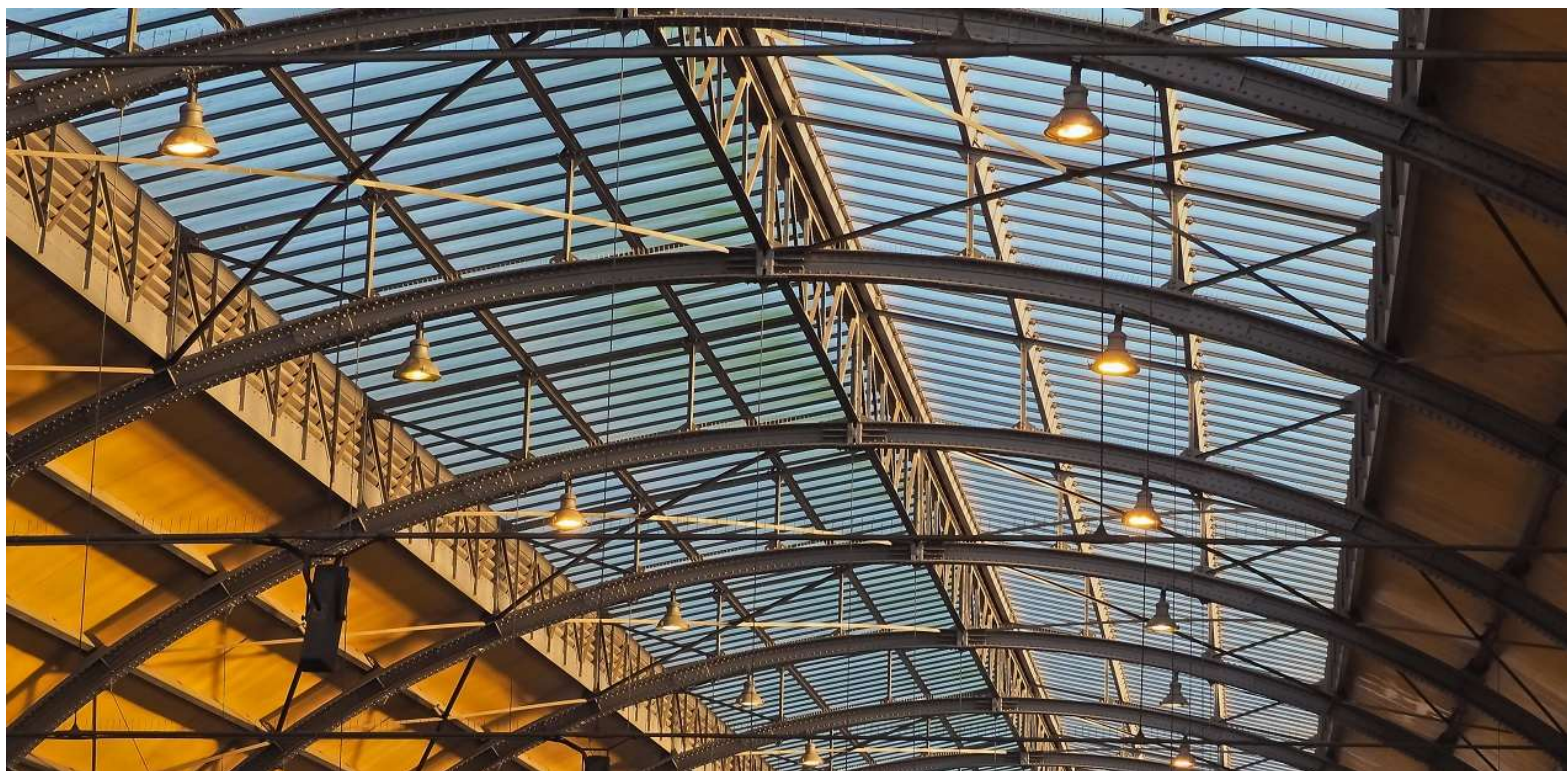


Fig. 3. Estruturas reticuladas formadas por arcos são comumente empregadas na Engenharia.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Fig. 4. Arcos sustentando a ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília [1].



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Fig. 5. Ponte da Arrábida, Porto, Portugal.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Fig. 6. Cavernas em estruturas aeronáuticas são elementos importantes para aumentar a rigidez e a resistência.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Fig. 7. Cavernas também são utilizadas para aumentar a resistência e a rigidez de submarinos.



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Estruturas Reticuladas Isostáticas sob***  
***Carregamentos Quase-estáticos***

São estruturas formadas por barras submetidas a carregamentos externos genéricos (forças concentradas ou distribuídas e momentos concentrados ou distribuídos), aplicados de forma quase-estática. Sendo estruturas isostáticas, a determinação dos esforços solicitantes internos (forças normais e cortantes, momentos fletores e momentos de torção), em qualquer seção transversal de qualquer membro da estrutura, pode ser feita simplesmente com o uso das equações de equilíbrio estático.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

*Hipóteses de Trabalho*

1. Linearidade Geométrica: a hipótese de L.G. pressupõe que as deformações (alongamentos ou distorções) em qualquer ponto da estrutura sejam muito pequenas quando comparadas à unidade e que os deslocamentos (lineares ou angulares) também sejam muito pequenos, de forma que a geometria da estrutura na configuração deformada (após a aplicação dos carregamentos) seja muito próxima da geometria da estrutura na configuração inicial (também chamada configuração de referência ou não-deformada), o que faz com que o equilíbrio de forças e momentos possa ser feito na configuração inicial da estrutura;
2. Nos problemas apresentados, admitiremos que o polo de redução de forças (em cada seção transversal) é sempre o centroide da seção transversal, o que é válido, por exemplo, para seções transversais duplamente simétricas, comumente empregadas na construção mecânica.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

Classificaremos as estruturas reticuladas em:

- Estruturas reticuladas planas submetidas a carregamentos aplicados no próprio plano;
- Estruturas reticuladas planas submetidas a carregamentos aplicados fora do plano;
- Estruturas reticuladas espaciais.

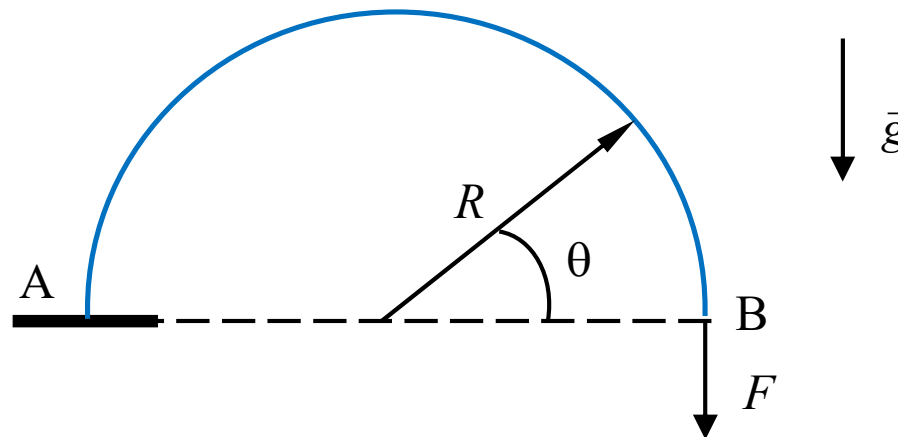


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Exemplo 1:

A estrutura em arco indicada na figura abaixo é feita de um mesmo material e a seção transversal da barra é uniforme. Considerando a ação do peso próprio e de uma única força concentrada de intensidade  $F$  aplicada no ponto B, determine as expressões de todos os esforços solicitantes existentes em função dos parâmetros fornecidos.

Dados:  $F, R, A, \gamma = \mu.g$



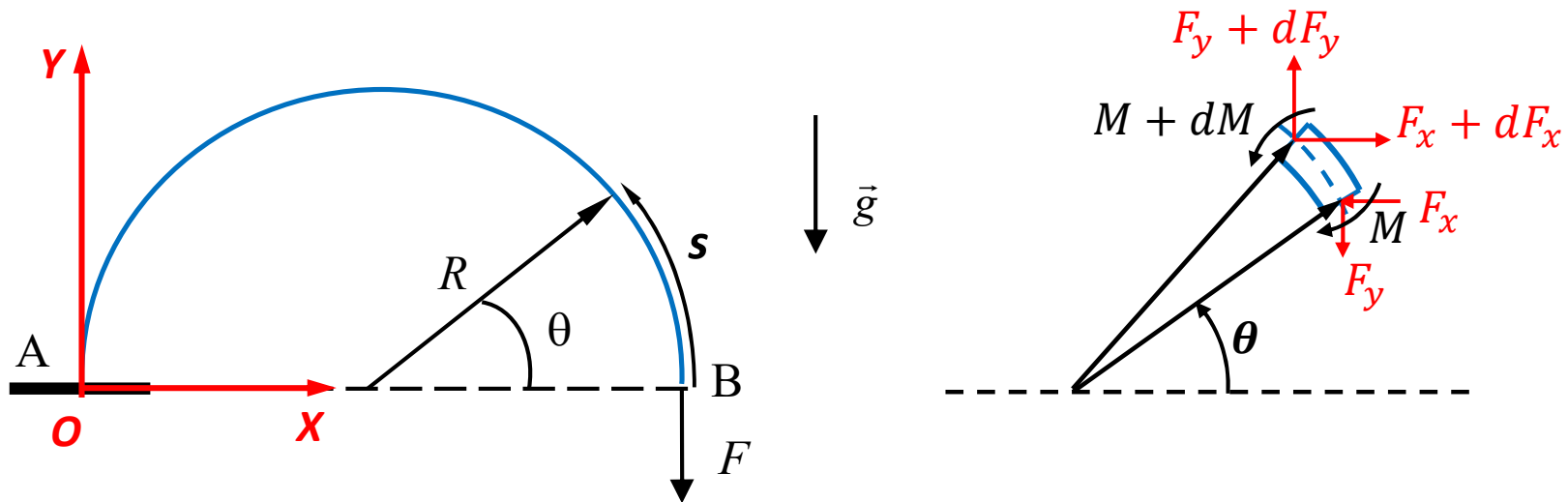


*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

**Solução:**

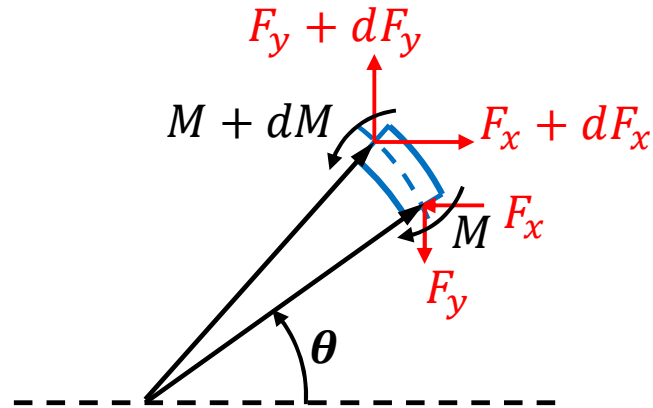
1. Efeito do peso próprio:

Para a análise do efeito do peso próprio, consideremos o sistema de coordenadas  $OXY$  indicado na figura (com  $O \equiv A$ ) e um elemento infinitesimal de comprimento  $ds$  retirado do arco (note que o equilíbrio está sendo feito na configuração de referência, com base na Hipótese 1):





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica



$$y = R \sin \theta \Rightarrow dy = R \cos \theta d\theta$$

$$dy = (\cos \theta) ds \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \cos \theta$$

$$x = R + R \cos \theta \Rightarrow dx = -R \sin \theta d\theta$$

$$dx = -(\sin \theta) ds \Rightarrow \frac{dx}{ds} = -\sin \theta$$

$$F_x + dF_x - F_x = 0 \Leftrightarrow dF_x = 0$$

$$F_y + dF_y - F_y - \gamma A(s) ds = 0 \Leftrightarrow \frac{dF_y}{ds} = \gamma A(s)$$

$$q(s) = \frac{dF_y}{ds} = \gamma A(s)$$

$$(M + dM) - M - F_x dy - F_y dx = 0$$

$$dM = F_x dy + F_y dx$$

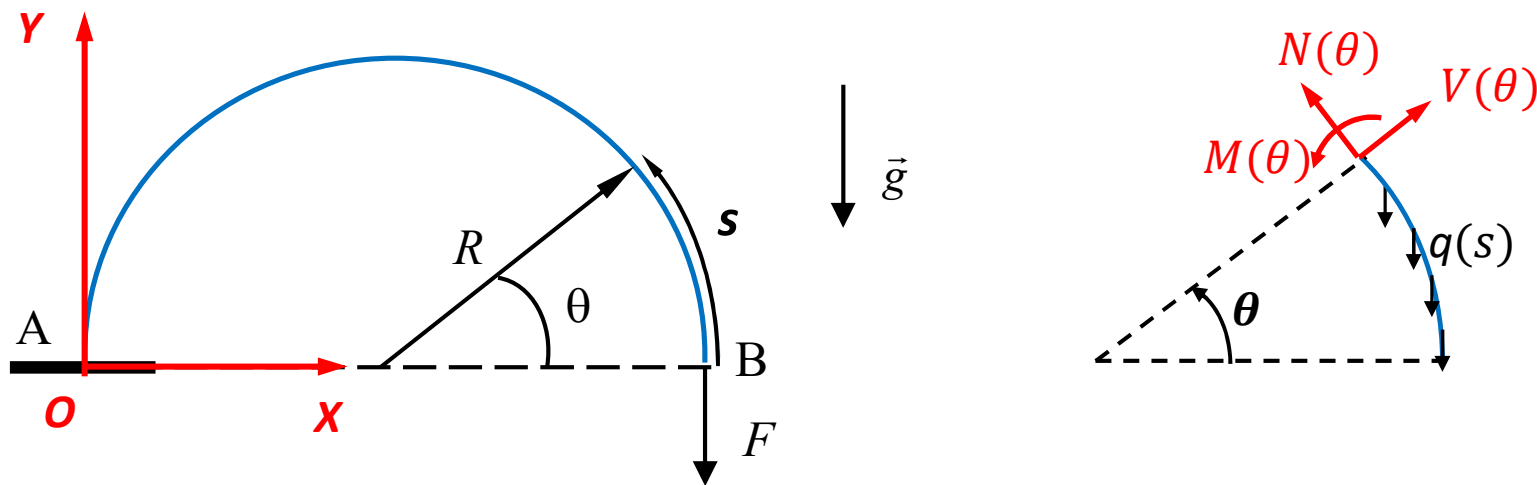
$$\frac{dM}{ds} = F_x \cos \theta - F_y \sin \theta$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

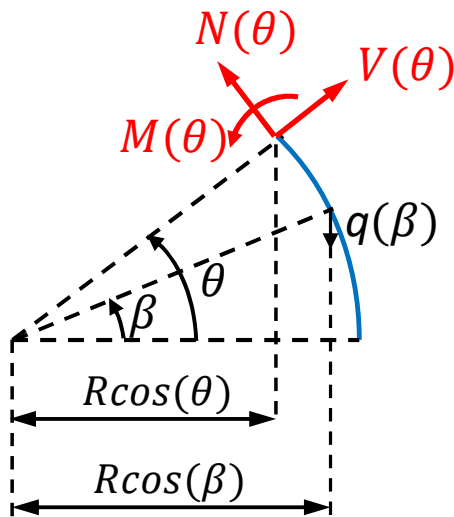
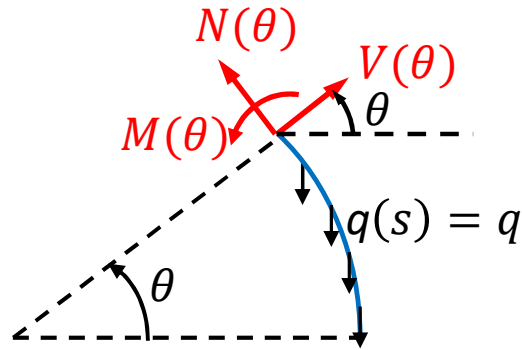
Embora a determinação dos esforços solicitantes ao longo da barra curva possa ser feita pelo uso das equações diferenciais apresentadas, faremos uso apenas da relação  $q(s) = \gamma A(s) = \gamma A$  e das equações de equilíbrio para a determinação dos esforços solicitantes em uma seção genérica.

Impondo o equilíbrio de forças e momentos para o segmento que vai de  $\theta_0 = 0$  a  $\theta_f = \theta$ , teremos:





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



$$V(\theta) \cdot \cos\theta - N(\theta) \cdot \sin\theta = 0$$

$$V(\theta) \cdot \sin\theta + N(\theta) \cdot \cos\theta = \int_0^s q ds = \int_0^\theta q R d\beta = q R \theta$$

$$M(\theta) = \int_0^\theta q R (\cos\beta - \cos\theta) R d\beta$$

$$M(\theta) = q R^2 [\sin\beta - \beta \cos\theta] \Big|_{\beta=0}^{\beta=\theta}$$

Resultam:

$$N(\theta) = q R \theta \cos\theta \quad V(\theta) = q R \theta \sin\theta$$

$$M(\theta) = q R^2 (\sin\theta - \theta \cos\theta)$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Adimensionalizando as expressões da força normal e da força cortante (dividindo-as por  $qR$ ) e adimensionalizando a expressão do momento fletor (dividindo-a por  $qR^2$ ), teremos:

$$\hat{N}(\theta) = \theta \cos \theta$$

$$\hat{V}(\theta) = \theta \sin \theta$$

$$\hat{M}(\theta) = \sin \theta - \theta \cos \theta$$

Verificações (rápidas):

$$\theta = 0$$



$$\left[ \begin{array}{l} \hat{N}(0) = 0 \\ \hat{V}(0) = 0 \\ \hat{M}(0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

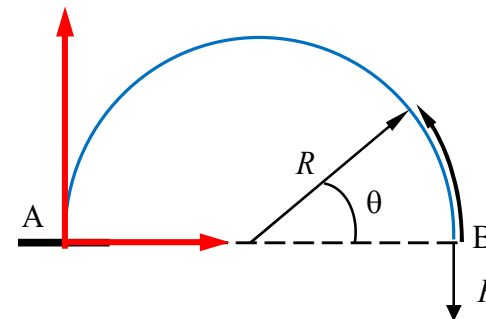


$$\left[ \begin{array}{l} \hat{N}(\pi/2) = 0 \\ \hat{V}(\pi/2) = \frac{\pi}{2} \\ \hat{M}(\pi/2) = 1 \end{array} \right.$$

$$\theta = \pi$$

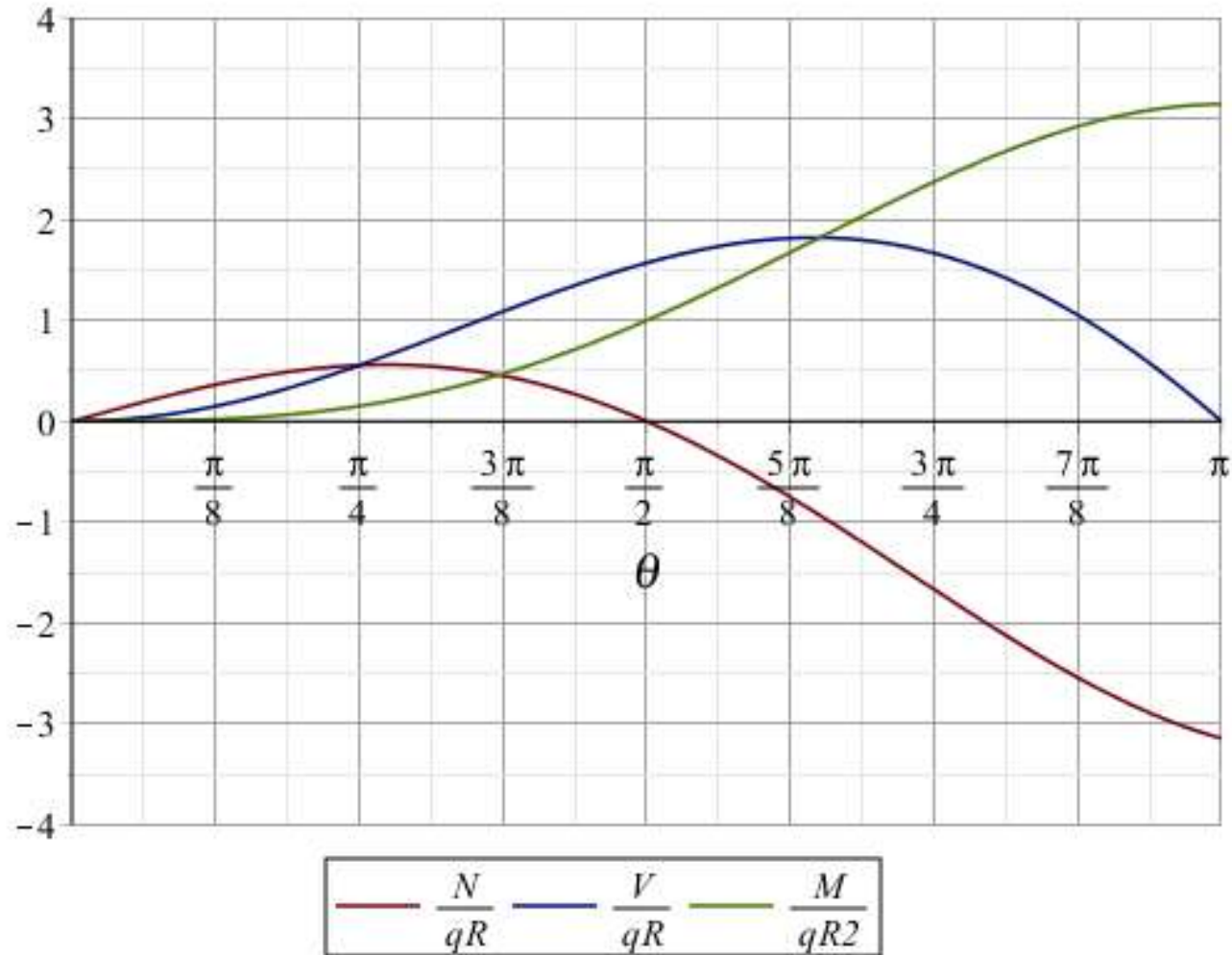


$$\left[ \begin{array}{l} \hat{N}(\pi) = -\pi \\ \hat{V}(\pi) = 0 \\ \hat{M}(\pi) = \pi \end{array} \right.$$





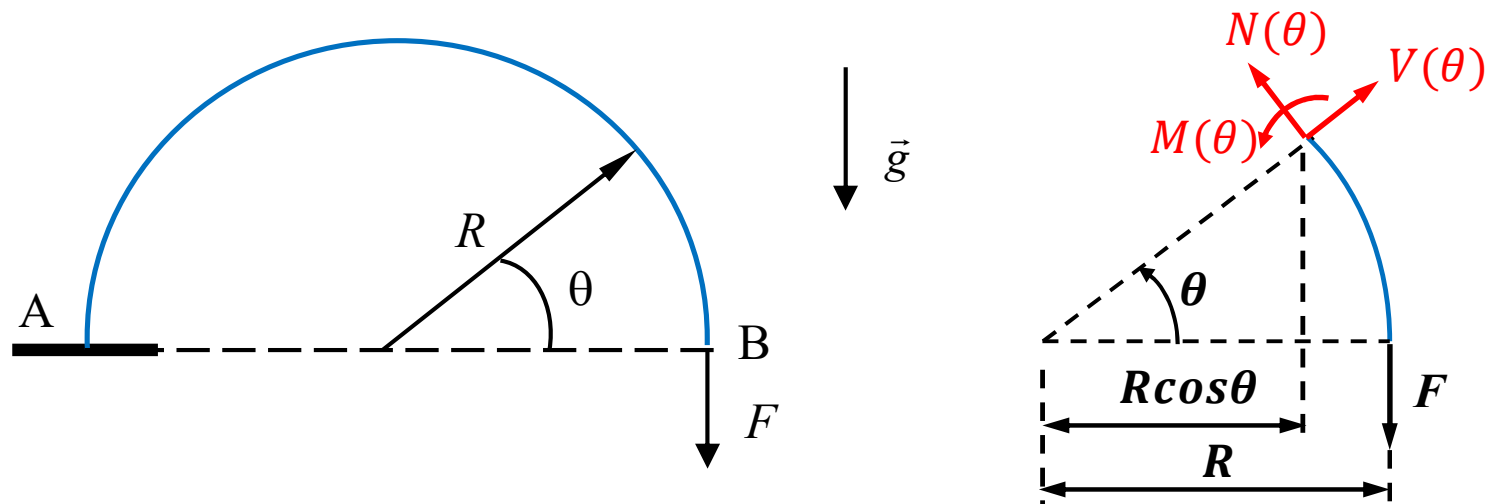
*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

2. Efeito da força concentrada ( $F$ ) aplicada na extremidade B



$$N(\theta) = F \cos \theta$$

$$M(\theta) = FR(1 - \cos \theta)$$

$$V(\theta) = F \sin \theta$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

3. Resultado final (aplicando o Princípio da Superposição)

$$N(\theta) = qR\theta \cos\theta + F \cos\theta$$

$$V(\theta) = qR\theta \sin\theta + F \sin\theta$$

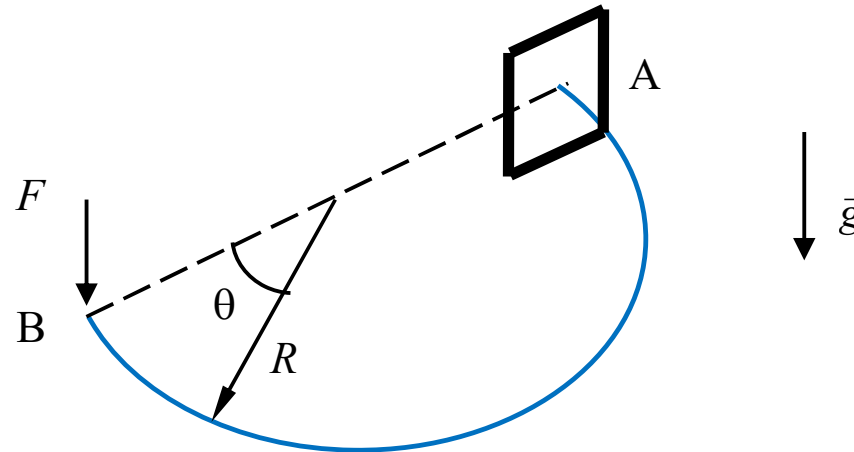
$$M(\theta) = qR^2(\sin\theta - \theta \cos\theta) + FR(1 - \cos\theta)$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Exemplo 2:

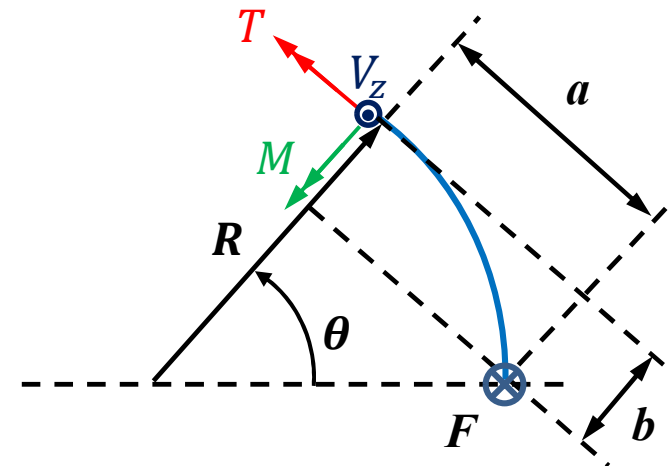
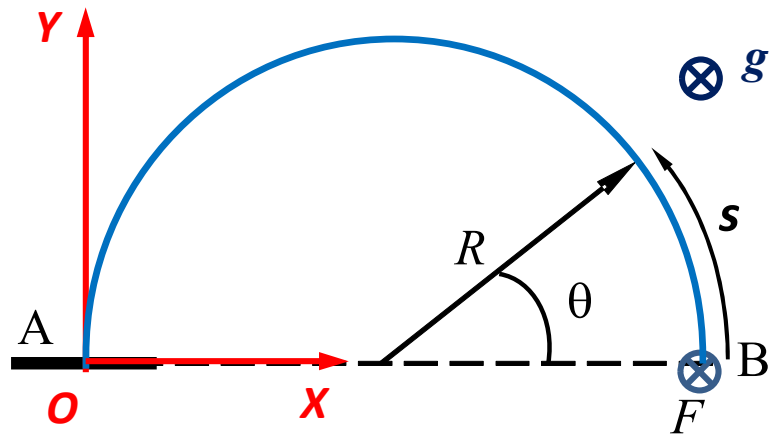
Considere a estrutura em arco apresentada abaixo, disposta em um plano horizontal e submetida à ação de uma força concentrada de intensidade  $F$  aplicada no ponto B e do peso próprio da barra. Determine as expressões de todos os esforços solicitantes existentes em função dos parâmetros fornecidos. São dados:  $F, R, A, \gamma = \mu.g$ .





**Solução:**

1. Efeito da força concentrada ( $F$ ) aplicada na extremidade B



$$V_z(\theta) = F$$

$$M(\theta) = Fa = FR\text{sen}\theta$$

$$T(\theta) = Fb = FR(1 - \text{cos}\theta)$$

$$a = R\text{sen}\theta$$

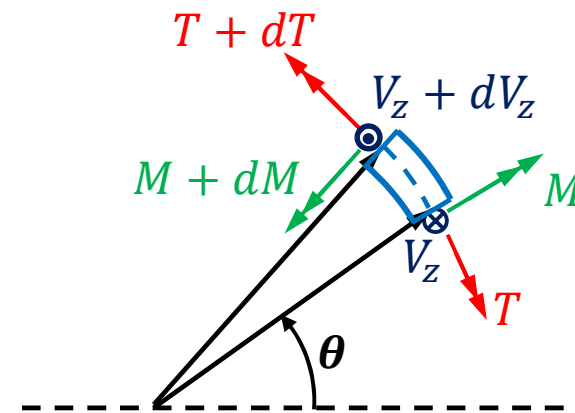
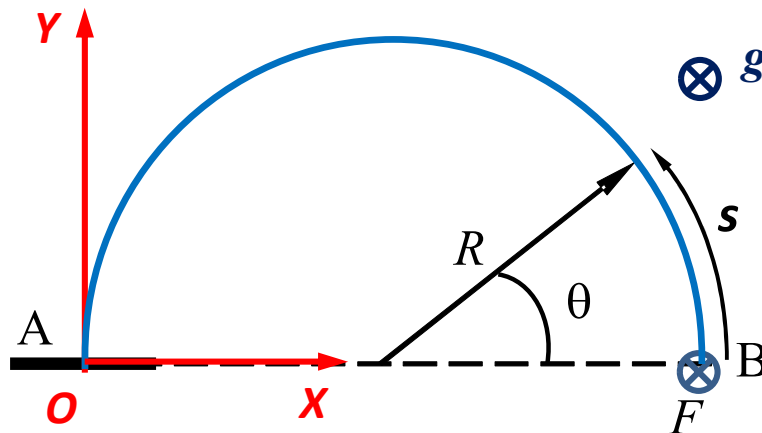
$$b = R(1 - \text{cos}\theta)$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

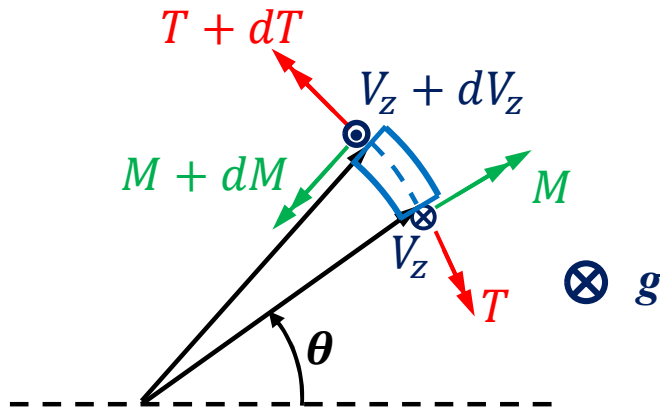
2. Efeito do peso próprio:

Para a determinação do efeito do peso próprio, consideremos o sistema de coordenadas  $OXY$  indicado na figura (com  $O \equiv A$ ) e um elemento infinitesimal de comprimento  $ds$  retirado do arco (note que o equilíbrio está sendo feito na configuração de referência, com base na Hipótese 1):





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



$$V_z + dV_z - V_z - \gamma A(s) ds = 0 \Leftrightarrow \frac{dV_z}{ds} = \gamma A(s)$$

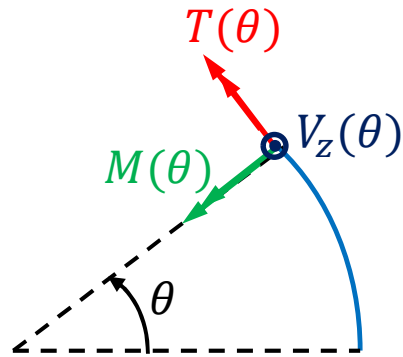
$$q(s) = \frac{dV_z}{ds} = \gamma A(s)$$

*A determinação das equações de equilíbrio envolvendo os momentos fica como tarefa de casa...*

*No que segue, faremos a determinação dos esforços impondo apenas o equilíbrio em um segmento genérico que vai de  $\theta_0 = 0$  a  $\theta_f = \theta$ .*



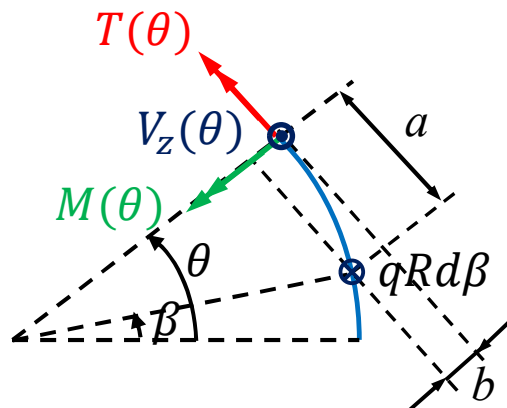
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



$$V_z(\theta) = \int_0^s q ds = \int_0^\theta q R d\beta = q R \theta$$

$$M(\theta) = \int_0^\theta q a R d\beta = \int_0^\theta q R \text{sen}(\theta - \beta) R d\beta$$

$$T(\theta) = \int_0^\theta q b R d\beta = \int_0^\theta q R [1 - \cos(\theta - \beta)] R d\beta$$



$$a = R \text{sen}(\theta - \beta)$$

$$b = R [1 - \cos(\theta - \beta)]$$

Resultam:

$$M(\theta) = q R^2 [1 - \cos \theta]$$

$$T(\theta) = q R^2 [\theta - \text{sen} \theta]$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Adimensionalizando a expressão da força cortante (dividindo-a por  $qR$ ) e as dos momentos fletor e de torção (dividindo-os por  $qR^2$ ), teremos:

$$\hat{V}_z(\theta) = \theta \quad \hat{M}(\theta) = 1 - \cos\theta \quad \hat{T}(\theta) = \theta - \sin\theta$$

Verificações (rápidas):

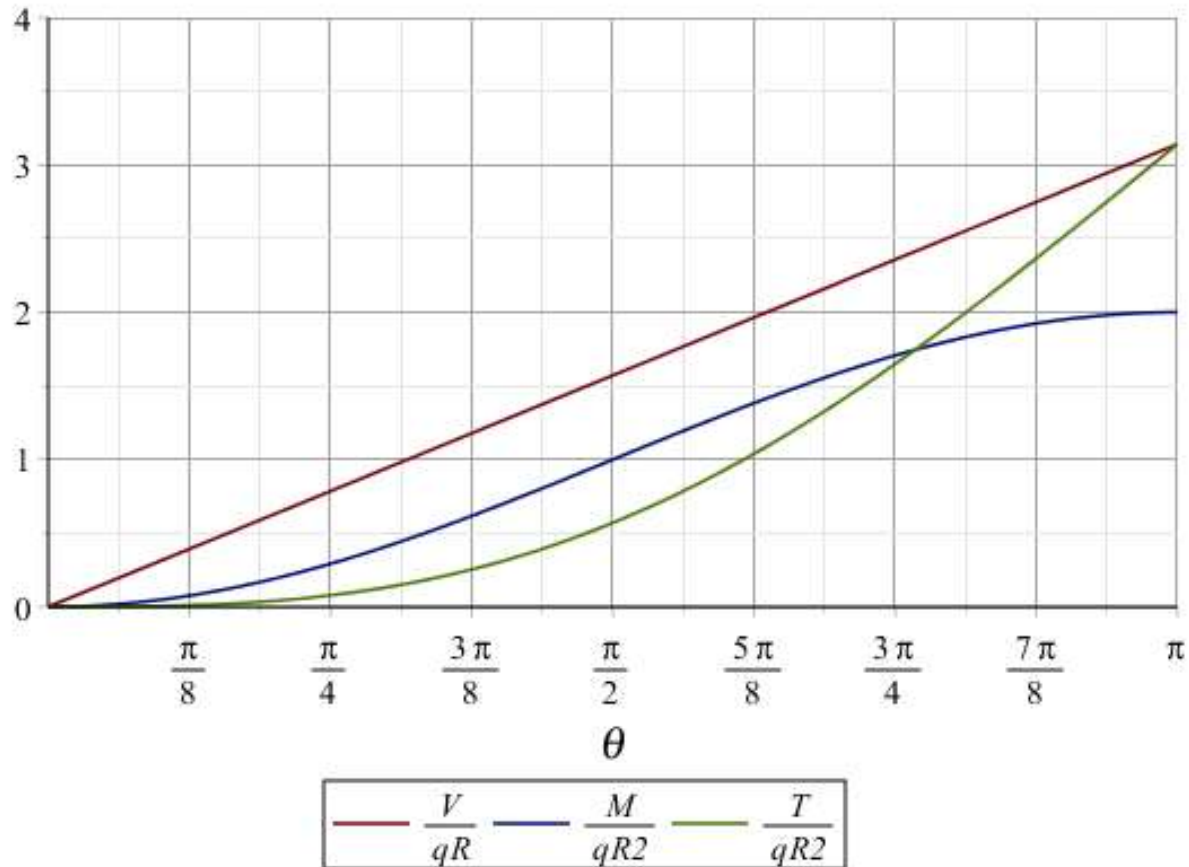
$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{V}_z(0) = 0 \\ \hat{M}(0) = 0 \\ \hat{T}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{V}_z(\pi) = \pi \\ \hat{M}(\pi) = 2 \\ \hat{T}(\pi) = \pi \end{cases}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{V}_z(\pi/2) = \pi/2 \\ \hat{M}(\pi/2) = 1 \\ \hat{T}(\pi/2) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**





***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

3. Resultado final (aplicando o Princípio da Superposição)

$$V_z(\theta) = F + qR\theta$$

$$M(\theta) = FR\text{sen}\theta + qR^2(1 - \text{cos}\theta)$$

$$T(\theta) = FR(1 - \text{cos}\theta) + qR^2(\theta - \text{sen}\theta)$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Referências:***

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Juscelino\\_Kubitschek\\_bridge](https://en.wikipedia.org/wiki/Juscelino_Kubitschek_bridge)
- [2] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p.
- [3] Ricardo, O.G.S. Teoria das Estruturas. Edusp & McGraw-Hill, 1978, 670p.