



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #26

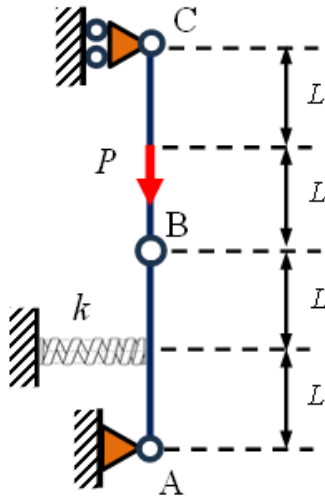
Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

25/11/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

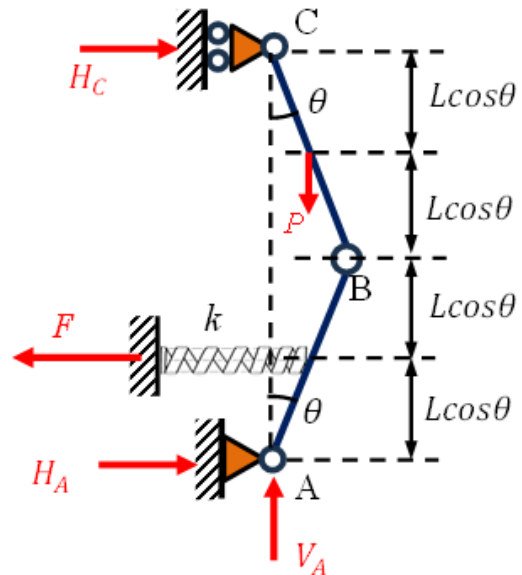


A estrutura idealizada indicada na figura é formada por duas barras rígidas (indeformáveis) AB e BC, ambas de mesmo comprimento ($2L$) e ligadas por uma articulação ideal (sem atrito) em B. As extremidades A e C estão simplesmente apoiadas. O ponto médio da barra AB está conectado a uma mola de comportamento elástico-linear com constante k , e, no ponto médio da barra BC, é aplicada uma força P que age sempre na direção vertical. Na configuração inicial (antes da aplicação da força P) os eixos centrais das duas barras encontram-se perfeitamente alinhados e a mola não exerce nenhuma força sobre a estrutura. Pede-se determinar a carga crítica da estrutura (P_{cr}) em função dos parâmetros dados.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- DCL na posição deformada:



- Equilíbrio:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A = P$$

$$\Sigma M_{BC,B} = 0 \Rightarrow H_C(2L \cos \theta) = P(L \sin \theta)$$

$$\Sigma M_{AB+BC,A} = 0 \Rightarrow H_C(4L \cos \theta) + P(L \sin \theta) = F(L \cos \theta)$$

$$\Rightarrow 3P \sin \theta = F \cos \theta$$

- Força na mola:

$$F = kL \sin \theta$$

- Equação característica:

$$3P \sin \theta = kL \sin \theta \cos \theta$$

- Equação característica linearizada:

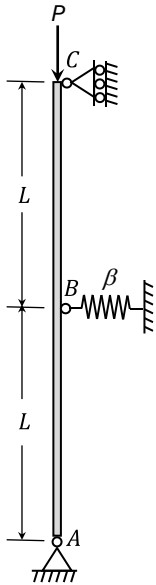
$$3P\theta = kL\theta \Rightarrow (3P - kL)\theta = 0$$

- Carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{kL}{3}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



A coluna da figura tem rigidez flexional EI e comprimento $2L$. Ela está vinculada em A por uma articulação e em C por um apoio simples. A coluna está submetida a uma força de compressão axial P . No ponto B a coluna está ligada a uma mola translacional de constante elástica β . Pede-se obter a **equação característica** que permite calcular a carga crítica.

Nota: Note que a estrutura é simétrica e suponha que o modo de flambagem é **simétrico**.

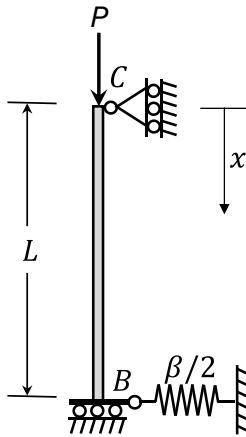
Adotar: $\beta = \frac{2EI}{L^3}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

- Aproveitando a simetria da estrutura, podemos considerar apenas a metade superior da coluna (ou a inferior), vinculando-a adequadamente:



- Como em outros problemas resolvidos, o modo de flambagem pode ser escrito na forma:

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D$$

- Com:

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

- Assim

$$\theta(x) = v' = kA \cos kx - kB \sin kx + C$$

$$\frac{M(x)}{EI} = v'' = -k^2 A \sin kx - k^2 B \cos kx$$

$$\frac{V(x)}{EI} = v''' + k^2 v' = k^2 C$$

- Condições de contorno:

$$v(0) = 0 \Rightarrow B + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$v'(L) = 0 \Rightarrow kA \cos kL + C = 0$$

$$\Rightarrow C = -kA \cos kL$$

$$V(L) = \frac{\beta}{2} v(L)$$

$$\Rightarrow EIk^2 C = \frac{EI}{L^3} (A \sin kL + CL)$$

- Equação característica

$$EIk^2 (-kA \cos kL) = \frac{EI}{L^3} (A \sin kL - kA \cos kL L)$$

$$\Rightarrow kL(1 - k^2 L^2) = \tan kL$$



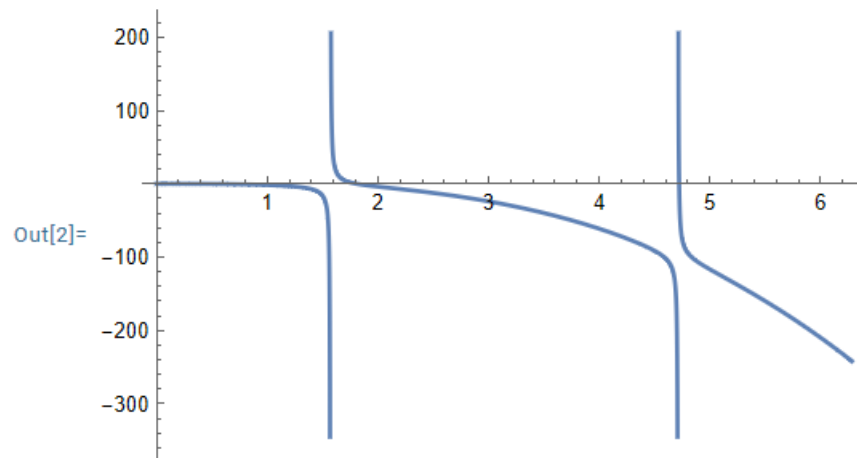
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Solução numérica da equação característica

```
In[1]:= f[x_] := x (1 - x^2) - Tan[x]
```

+

```
In[2]:= Plot[f[x], {x, 0, 2 π}]
```



```
In[3]:= answer = FindRoot[f, {1.6, 2}];
```

```
In[4]:= n = answer[[1]] / π
```

Out[4]= 0.575911



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

- Primeiro modo de flambagem:

$$v(x) = A(\sin kx - kx \cos kL)$$

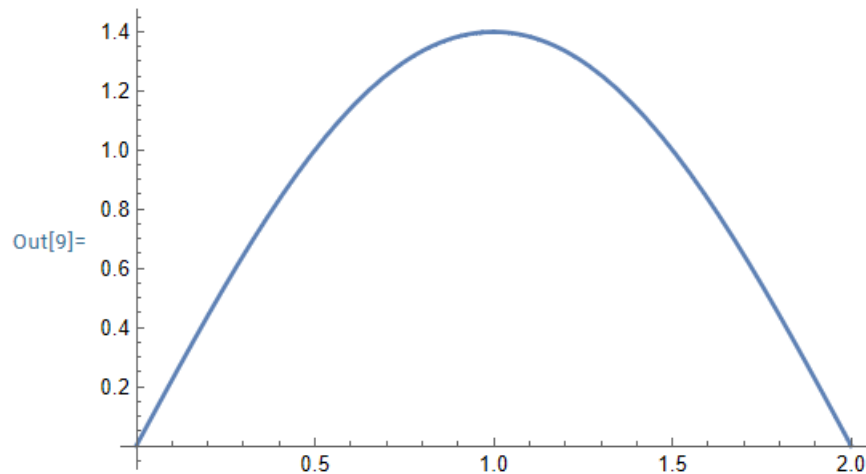
```
In[5]:= l = 1;
```

```
In[6]:= parte1[x_] := Sin[n * π * x / l] - n * π * x / l * Cos[n * π]
```

```
In[7]:= parte2[x_] := Sin[n * π * (2 * l - x) / l] - n * π * (2 * l - x) / l * Cos[n * π]
```

```
In[8]:= modoFlambagem[x_] := Piecewise[{{parte1[x], x ≤ l}, {parte2[x], x > l}}]
```

```
In[9]:= Plot[modoFlambagem[x], {x, 0, 2 * l}]
```





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo da Flambagem de Barras*. Disponível no Moodle