



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #25

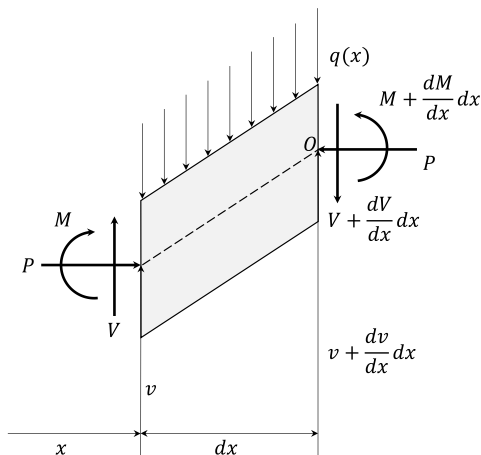
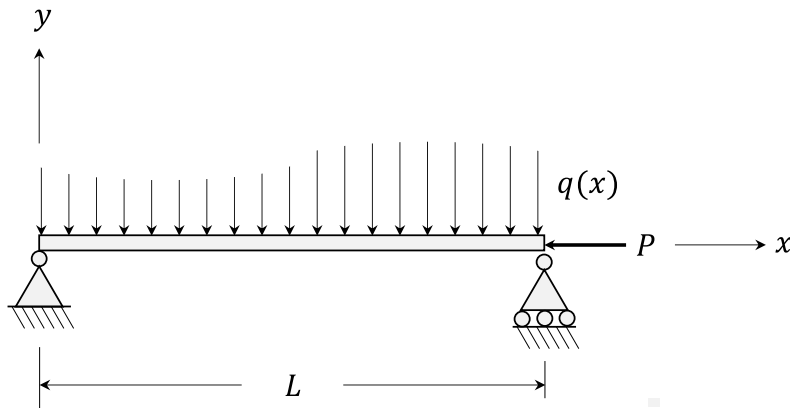
Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

19/11/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Equação diferencial da curva de deflexão incluindo o efeito da força normal



$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V - \left(V + \frac{dV}{dx} dx \right) - q dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q(x)$$

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow -M + \left(M + \frac{dM}{dx} dx \right) - V dx + P \frac{dv}{dx} dx + q dx \frac{dx}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V = \frac{dM}{dx} + P \frac{dv}{dx} \quad (\text{Note a influência da força normal na força cortante!})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} + P \frac{dv}{dx} \right) = -q(x)$$

Como P é constante:

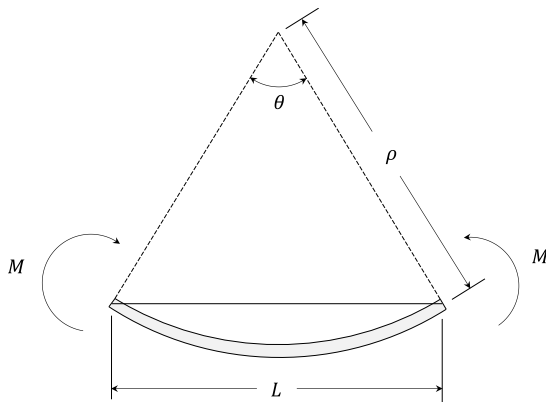
$$\frac{d^2 M}{dx^2} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = -q(x)$$



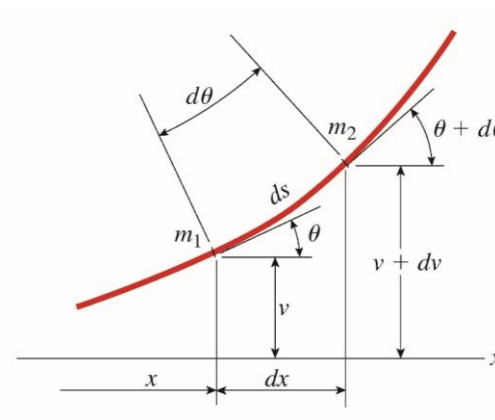
Equação diferencial da curva de deflexão incluindo o efeito da força normal

- Para material elástico-linear:

$$M = EI \kappa = EI \frac{d\theta}{ds}$$



- Para pequenos ângulos:



$$\theta = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{linearização da curvatura})$$

$$\Rightarrow M = EI \frac{d^2v}{dx^2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Equação diferencial da curva de deflexão incluindo o efeito da força normal

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = -q(x)$$

- Material elástico linear:
$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 v}{dx^2} = -q(x)$$

- Barra prismática:
$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = -q(x)$$

- Na notação de Lagrange:
$$EI v^{iv} + P v'' = -q(x)$$

- Equação homogênea:
$$EI v^{iv} + P v'' = 0$$

- Definindo-se $k^2 = \frac{P}{EI}$:
$$v^{iv} + k^2 v'' = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Força cortante

$$V = \frac{dM}{dx} + P \frac{dv}{dx}$$

- Material elástico linear:
$$V = \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + P \frac{dv}{dx}$$

- Barra prismática:
$$V = EI \frac{d^3 v}{dx^3} + P \frac{dv}{dx}$$

- Na notação de Lagrange:
$$V = EI v''' + P v'$$

- Definindo-se $k^2 = \frac{P}{EI}$:
$$\frac{V}{EI} = v''' + k^2 v'$$



Solução da equação diferencial:

$$v^{iv} + k^2 v'' = 0$$

$$v(x) = A \sen kx + B \cos kx + Cx + D$$

$$\theta(x) = v' = kA \cos kx - kB \sen kx + C$$

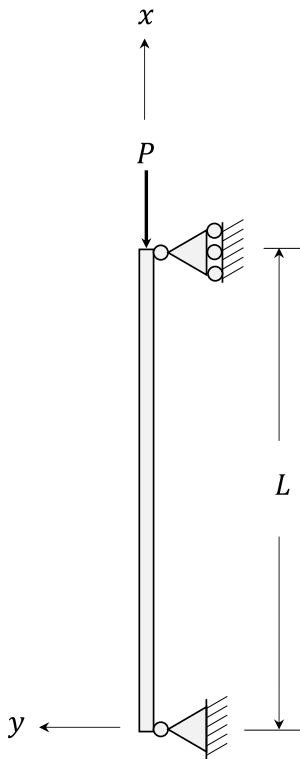
$$\frac{M(x)}{EI} = v'' = -k^2 A \sen kx - k^2 B \cos kx$$

$$\frac{V(x)}{EI} = v''' + k^2 v' = k^2 C$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Coluna biapoitada



$$v(x) = A \sen kx + B \cos kx + Cx + D$$

$$\theta(x) = v' = kA \cos kx - kB \sen kx + C$$

$$\frac{M(x)}{EI} = v'' = -k^2 A \sen kx - k^2 B \cos kx$$

$$\frac{V(x)}{EI} = v''' + k^2 v' = k^2 C$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow B + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow A \sen kL + B \cos kL + CL + D = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$M(L) = 0 \Rightarrow A \sen kL + B \cos kL = 0 \Rightarrow A \sen kL = 0$$

- Equação característica:

$$A \sen kL = 0 \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \text{ (solução trivial)} \\ \text{ou} \\ \sen kL = 0 \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Coluna biapoçada

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{como } k^2 = \frac{P}{EI} \Rightarrow P_n = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

- *Carga crítica ou carga de Euler:*

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

- *Curva de deflexão:*

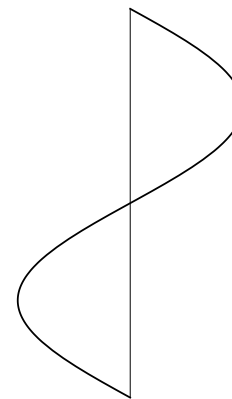
$$v(x) = A \sin kx$$

- *Modos de flambagem:*

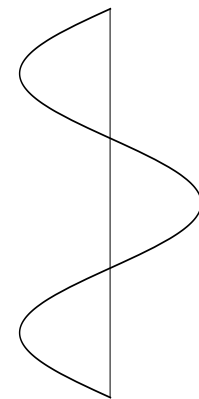
$$v_n(x) = A \sin \left(n\pi \frac{x}{L} \right)$$



1º modo



2º modo

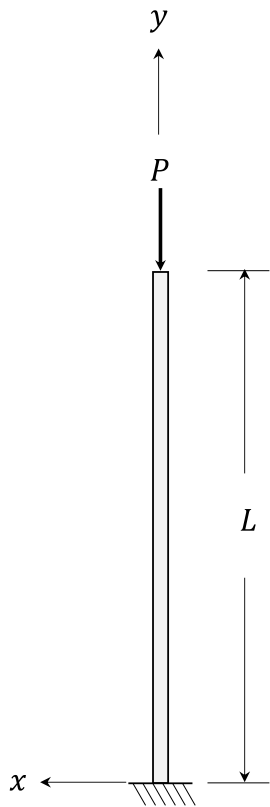


3º modo



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Coluna engastada



$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D$$

$$\theta(x) = v' = kA \cos kx - kB \sin kx + C$$

$$\frac{M(x)}{EI} = v'' = -k^2 A \sin kx - k^2 B \cos kx$$

$$\frac{V(x)}{EI} = v''' + k^2 v' = k^2 C$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow B + D = 0 \Rightarrow B = -D$$

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow kA + C = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$M(L) = 0 \Rightarrow A \sin kL + B \cos kL = 0 \Rightarrow B \cos kL = 0$$

$$V(L) = 0 \Rightarrow C = 0$$

- Equação característica:

$$B \cos kL = 0 \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \text{ (solução trivial)} \\ \text{ou} \\ \cos kL = 0 \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Coluna engastada

$$\cos kL = 0 \Rightarrow kL = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{como } k^2 = \frac{P}{EI} \Rightarrow P_n = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

- *Carga crítica ou carga de Euler:*

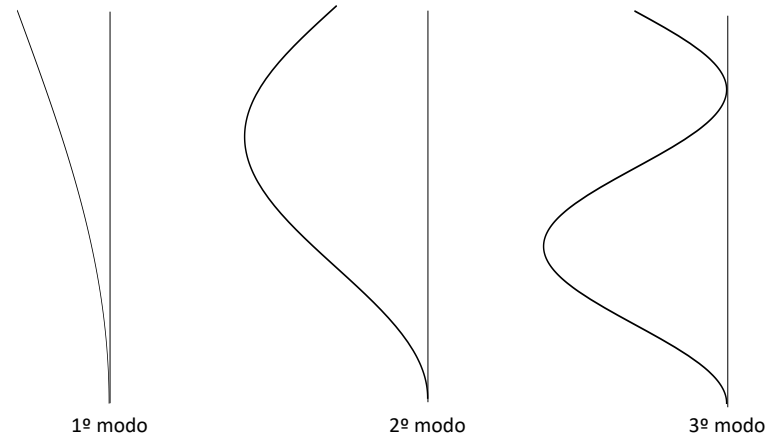
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

- *Curva de deflexão:*

$$v(x) = D(1 - \cos kx)$$

- *Modos de flambagem:*

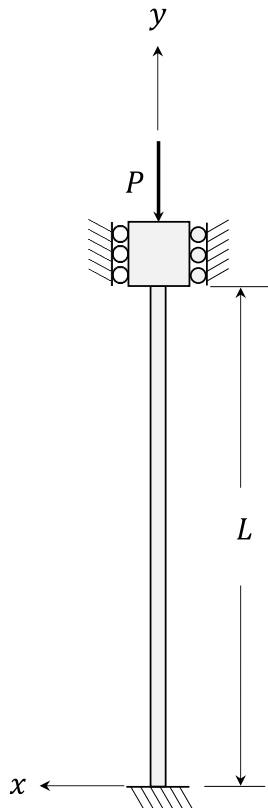
$$v_n(x) = D \left[1 - \cos \left((2n - 1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right) \right]$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Coluna biengastada



$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D$$

$$\theta(x) = v' = kA \cos kx - kB \sin kx + C$$

$$\frac{M(x)}{EI} = v'' = -k^2 A \sin kx - k^2 B \cos kx$$

$$\frac{V(x)}{EI} = v''' + k^2 v' = k^2 C$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow B + D = 0$$

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow kA + C = 0$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow A \sin kL + B \cos kL + CL + D = 0$$

$$\theta(L) = 0 \Rightarrow kA \cos kL - kB \sin kL + C = 0$$

- Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kL & \cos kL & L & 1 \\ k \cos kL & -k \sin kL & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Coluna biengastada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } kL & \cos kL & L & 1 \\ k \cos kL & -k \text{sen } kL & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- É imediato ver que o sistema admite a solução trivial $A = B = C = D = 0$
- Para que exista uma outra solução é necessário que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } kL & \cos kL & L & 1 \\ k \cos kL & -k \text{sen } kL & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Equação característica:

$$2 - 2 \cos kL - kL \text{sen } kL = 0$$



Coluna biengastada

- Usando as relações trigonométricas:

$$\cos kL = 1 - 2 \sin^2 \frac{kL}{2} \quad \text{e} \quad \sin kL = 2 \sin \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2}$$

- A equação característica pode ser colocada na forma:

$$\sin \frac{kL}{2} \left(\frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} - \sin \frac{kL}{2} \right) = 0$$

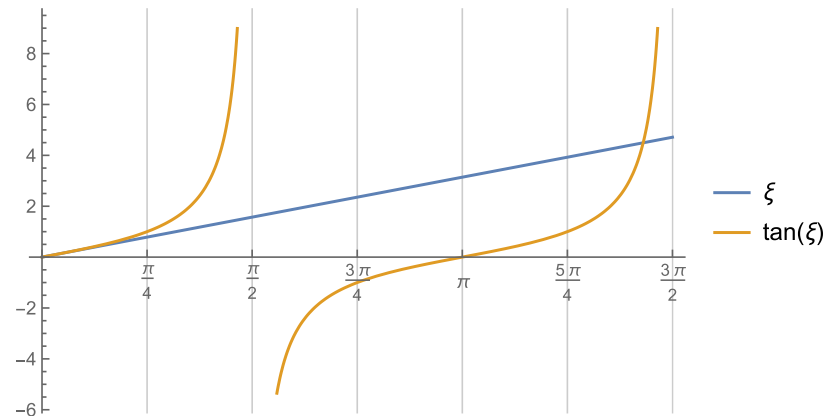
- Soluções:

i) $\sin \frac{kL}{2} = 0 \Rightarrow \frac{kL}{2} = \pi$

ii) $\frac{kL}{2} = \tan \frac{kL}{2} \Rightarrow \frac{kL}{2} > \pi$

- Carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$





Coluna biengastada

- Primeiro modo natural:

$$kL = 2\pi$$

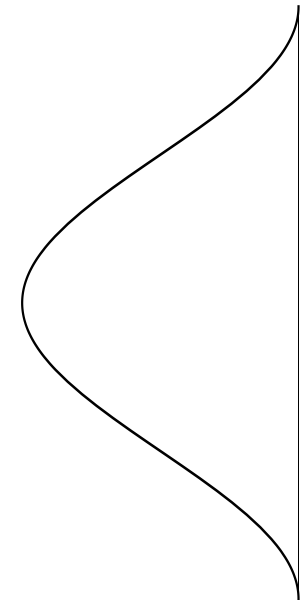
$$B + D = 0 \Rightarrow B = -D$$

$$kA + C = 0$$

$$A \sin kL + B \cos kL + CL + D = 0 \Rightarrow B + CL + D = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$kA \cos kL - kB \sin kL + C = 0 \Rightarrow kA + C = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$v_1(x) = D \left(1 - \cos 2\pi \frac{x}{L} \right)$$



1º Modo



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo da Flambagem de Barras*. Disponível no Moodle