



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II*

*Aula #24*

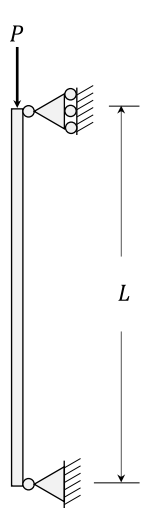
*Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins*

*18/11/2025*

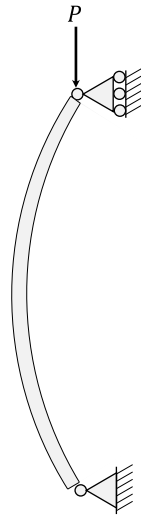


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

***Barra sob força axial***



$P$  “pequena”



$P$  “grande”

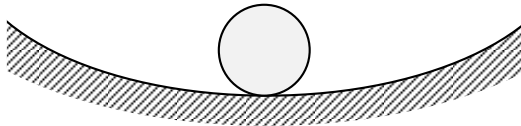
***Flambagem***

- A flambagem só ocorre para forças de compressão
- A flambagem ocorre para valores de  $P$  “grandes”
- Uma barra esbelta é mais suscetível à flambagem
- A tensão limite do material pode ser atingida na flambagem
- A flambagem é um tipo de instabilidade estrutural



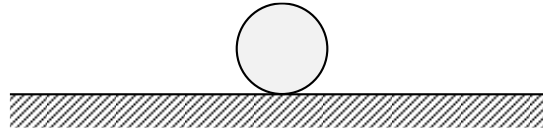
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

***Tipos de equilíbrio***

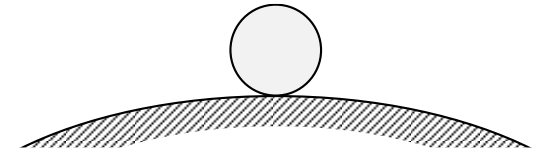


Equilíbrio Estável

- Pequenas causas provocam pequenos efeitos



Equilíbrio indiferente



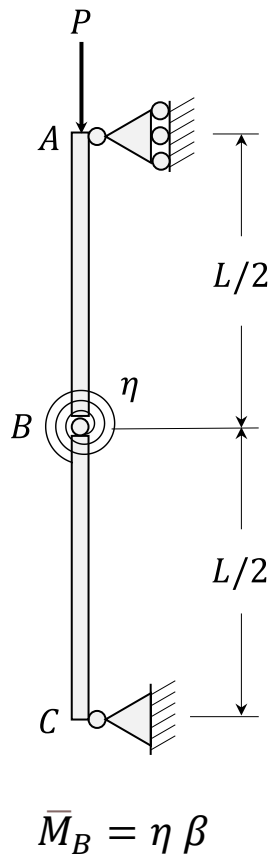
Equilíbrio instável

- Pequenas causas provocam grandes efeitos

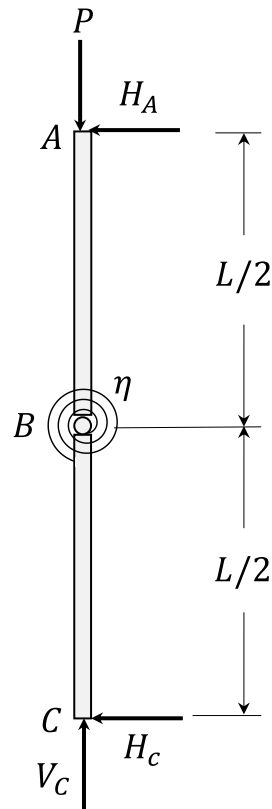


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Modelo idealizado**



• DCL



• Equilíbrio

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_C = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_C - P = 0 \Rightarrow V_C = P$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow H_A L = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

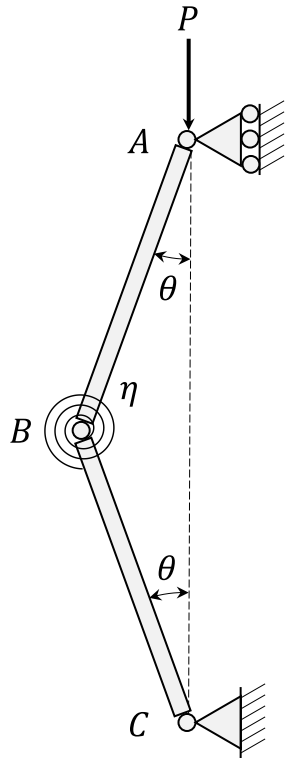
$$\Rightarrow H_C = 0$$

- O equilíbrio na posição vertical é sempre possível
- Se as barras estão na posição vertical o *momento restaurador* é nulo



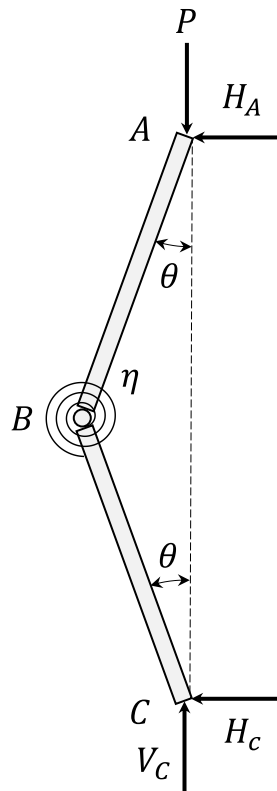
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Modelo idealizado**



*Volta ou não volta para a posição vertical?*

• DCL



• Equilíbrio

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_C = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_C - P = 0 \Rightarrow V_C = P$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow H_A L \cos \theta = 0 \Rightarrow H_A = 0$$
$$\Rightarrow H_C = 0$$

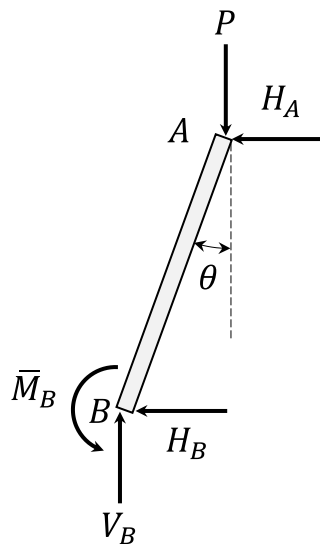
- Não dá para responder a pergunta porque o momento restaurador é um *esforço interno* e só vai aparecer nas equações de equilíbrio se as barras forem separadas!



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Modelo idealizado**

- DCL explodido



- Equilíbrio

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_B = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_B - P = 0 \Rightarrow V_B = P$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow H_A \frac{L}{2} \cos \theta - \frac{PL}{2} \sin \theta + \bar{M}_B = 0$$

$$\text{como } H_A = 0 \Rightarrow H_B = 0$$

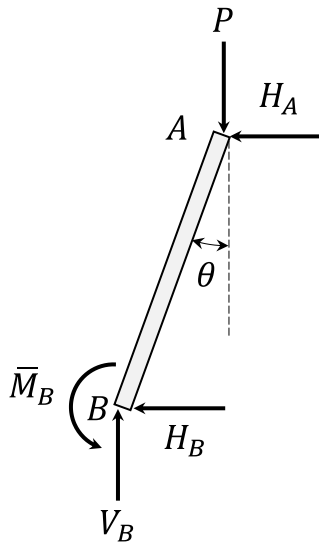
$$\Rightarrow \bar{M}_B = \frac{PL}{2} \sin \theta$$

- Se o momento restaurador for igual ao momento da força  $P$  haverá equilíbrio na posição deformada
- Se o momento restaurador for maior que o momento da força  $P$ , o sistema volta para a posição vertical
- Se o momento restaurador for menor que o momento da força  $P$ , não haverá equilíbrio



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Modelo idealizado**



$$\bar{M}_B = \frac{PL}{2} \sin \theta$$

$$\text{mas } \bar{M}_B = \eta 2\theta$$

$$\Rightarrow \eta 2\theta = \frac{PL}{2} \sin \theta$$

- Equação característica:

$$\frac{PL}{4\eta} \sin \theta - \theta = 0$$

- Existe sempre a *solução trivial*  $\theta = 0$  que corresponde à posição vertical do sistema
- Quando existe outra solução com  $\theta \neq 0$ ?



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Modelo idealizado**

- Equação característica:

$$\frac{PL}{4\eta} \sin \theta - \theta = 0$$

- Para pequenos ângulos:

$$\sin \theta = \theta$$

- Equação característica linearizada

$$\left( \frac{PL}{4\eta} - 1 \right) \theta = 0$$

- Duas soluções:

$$\text{i) } \theta = 0$$

$$\text{ii) } P = \frac{4\eta}{L}$$

- *Carga crítica ou carga de Euler:*

$$P_{cr} = \frac{4\eta}{L}$$

- Conclusão:

$$P \neq P_{cr} \Rightarrow \theta = 0$$

$$P = P_{cr} \Rightarrow \theta \text{ é qualquer}$$

- Esta conclusão é o que se espera?
- Informações foram perdidas no processo de linearização!



### **Modelo idealizado**

- Equação característica:

$$\frac{PL}{4\eta} \sin \theta - \theta = 0$$

- Para pequenos ângulos:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

- Equação característica não-linear

$$\left[ \frac{PL}{4\eta} \left( 1 - \frac{\theta^2}{6} \right) - 1 \right] \theta = 0$$

ou

$$\left( 1 - \frac{\theta^2}{6} - \frac{4\eta}{PL} \right) \theta = 0$$

ou, ainda,

$$\left( 1 - \frac{\theta^2}{6} - \frac{P_{cr}}{P} \right) \theta = 0$$

- Raízes

i)  $\theta = 0$

ii)  $\theta = \pm \sqrt{6} \sqrt{1 - \frac{P_{cr}}{P}}$

- Note que só existe solução não-trivial para  $P > P_{cr}$

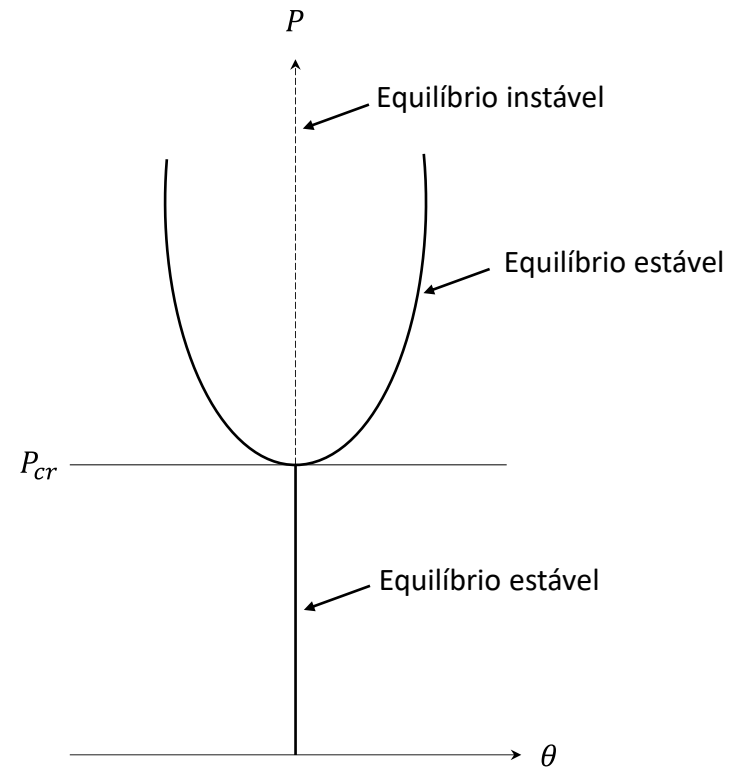


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Modelo idealizado**

- A solução linearizada não é capaz de prever o que acontece para valores de  $P$  superiores à carga crítica
- Mas ela é capaz de prever o valor da carga crítica

- Diagrama de estabilidade



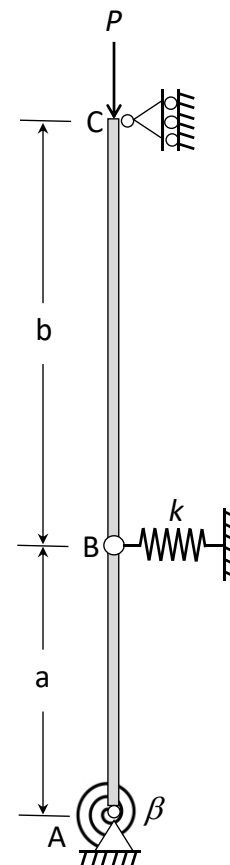
*Instabilidade do tipo “pitchfork”*



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

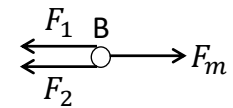
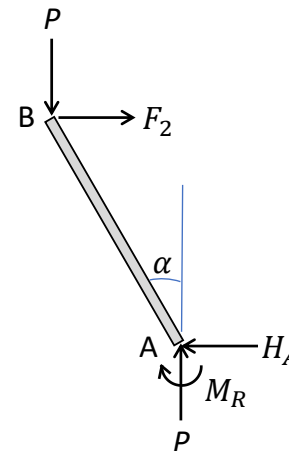
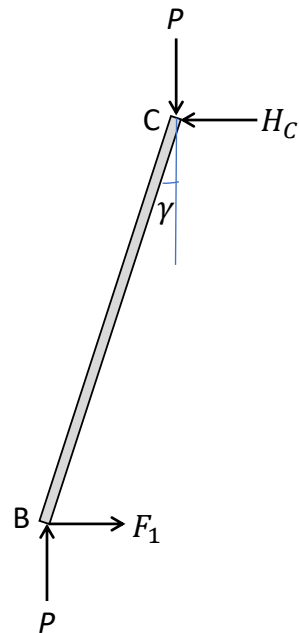
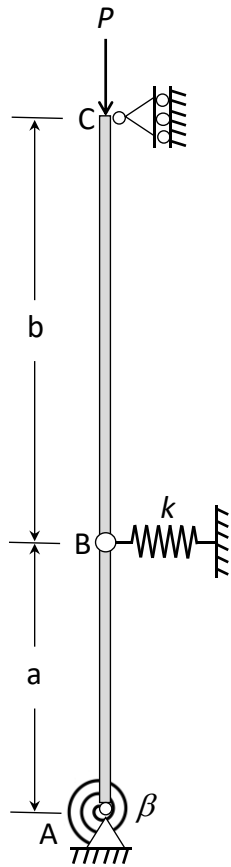
**Exercício**

*A figura mostra uma estrutura idealizada formada por duas barras infinitamente rígidas, AB e BC, conectadas em B por uma articulação. A estrutura está vinculada em A por uma articulação ligada a uma mola rotacional linear de constante elástica  $\beta$  e em C, por um apoio simples. À articulação B está conectada uma mola translacional linear de constante elástica  $k$ . A estrutura está submetida a uma força vertical  $P$ . Pedese determinar o valor crítico de  $P$ .*





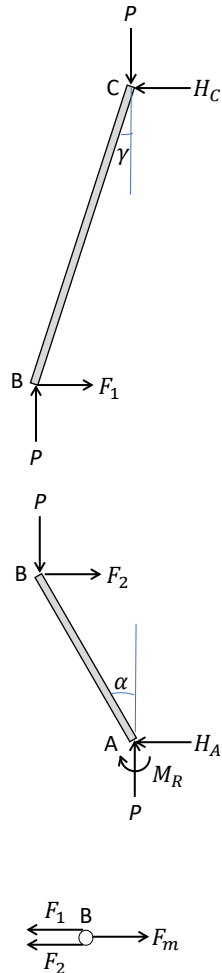
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**





## Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

### Departamento de Engenharia Mecânica



- Barra AB

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Pa\alpha - F_2a = M_R = \beta\alpha$$

- Barra BC

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow P\gamma - F_1 = 0$$

- Nó B

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = ka\alpha = kb\gamma$$

- Juntando tudo:

$$[Pa(a + b) - b(ka^2 + \beta)]\alpha = 0$$

- Carga crítica: (Para haver uma solução diferente da trivial)

$$P_{cr} = \frac{b(ka^2 + \beta)}{a(a + b)}$$

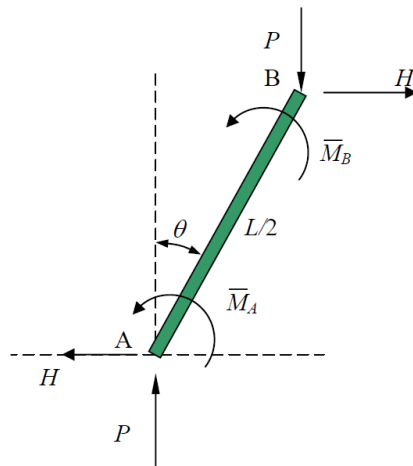
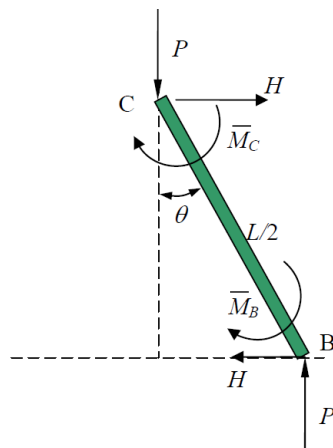
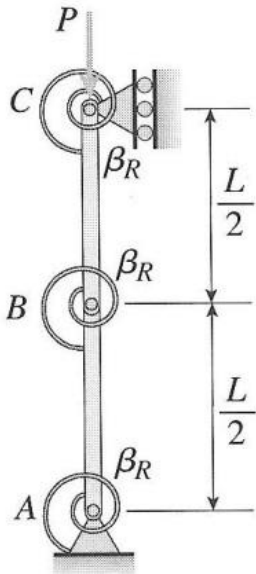


## Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

### Departamento de Engenharia Mecânica

#### Exercício

A figura mostra uma estrutura idealizada formada por duas barras rígidas AB e BC, cada uma com comprimento  $L/2$ . Em A, B e C existem molas, cada uma com rigidez à rotação  $\beta_R$ . Pode-se determinar o valor da carga crítica.



#### • Equilíbrio de momentos

##### • Barra AB

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A + \bar{M}_B = P \frac{L}{2} \sin \theta + H \frac{L}{2} \cos \theta$$

##### • Barra BC

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \bar{M}_B + \bar{M}_C = P \frac{L}{2} \sin \theta - H \frac{L}{2} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \bar{M}_A + 2\bar{M}_B + \bar{M}_C = PL \sin \theta$$

$$\bar{M}_A = \beta_R \theta \quad \bar{M}_B = \beta_R (2\theta) \quad \bar{M}_C = \beta_R \theta$$

$$\Rightarrow 6\beta_R \theta = PL \sin \theta$$

#### • Equação linear

$$6\beta_R \theta = PL \theta \Rightarrow (PL - \beta_R) \theta = 0$$

#### • Para existir solução não-trivial:

$$PL - 6\beta_R = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{6\beta_R}{L}$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Referência***

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo da Flambagem de Barras*. Disponível no Moodle

Gere, J.M. & Goodno, B.J. *Mecânica dos Materiais* – 7ª edição – Capítulo 11