



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #22

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

12/11/2025

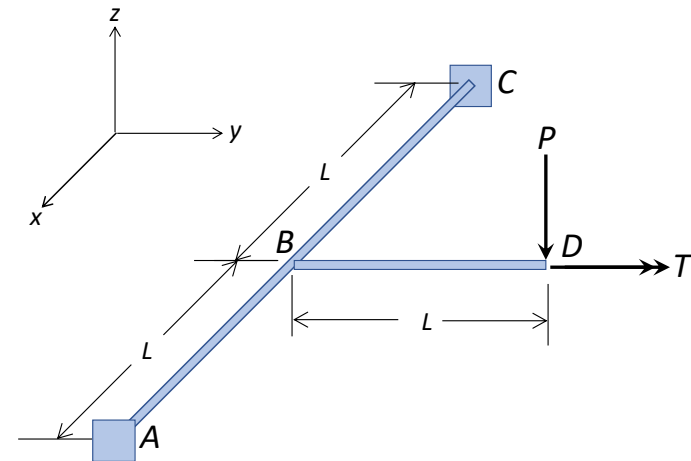


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício:

A estrutura ABCD da figura é horizontal. A barra BD está soldada em B à barra ABC e forma com ela um ângulo reto. A estrutura está engastada nos pontos A e C. Em D estão aplicados uma força vertical P e um torque T . As barras têm mesma rigidez flexional EI e mesma rigidez à torção $GI_P = \frac{4}{5}EI$. Sabendo que a energia complementar devida à força cortante é desprezível, pedem-se:

- a) o deslocamento vertical do ponto D;
- b) a rotação do ponto D em torno da direção y .



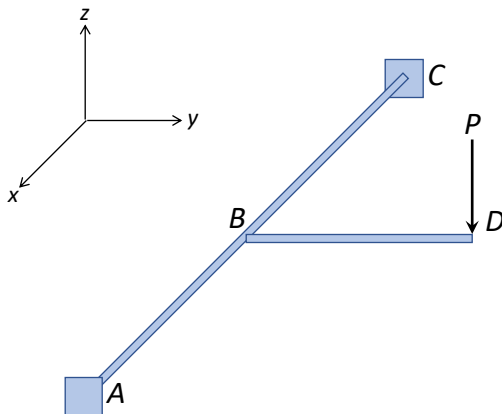


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

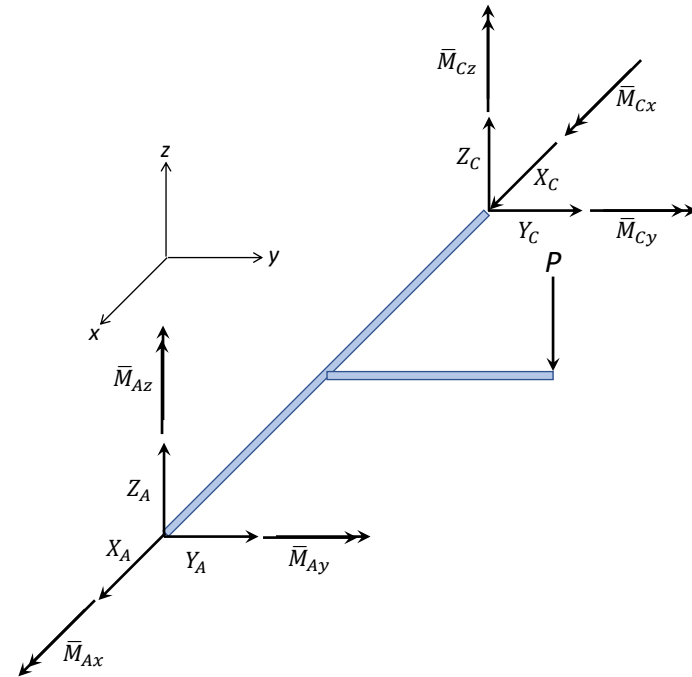
Departamento de Engenharia Mecânica

a) Cálculo do deslocamento vertical em D

- Somente a parte simétrica do carregamento colabora:



DCL



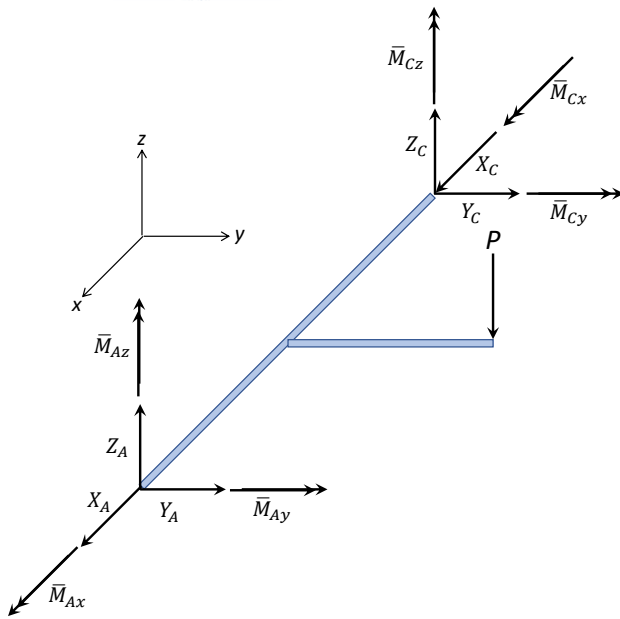
- Grau de hiperestaticidade:

$$\left. \begin{array}{l} 6 \text{ equações} \\ 12 \text{ incógnitas} \end{array} \right\} g = 6$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica



A estrutura é simétrica
e está submetida a um
carregamento
simétrico

⇒ As reações tem que ser
simétricas

• Equilíbrio:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow X_A + X_C = 0$$

Não há nenhum esforço
aplicado na direção de x $\Rightarrow X_A = X_C = 0$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_C = 0$$

Simetria $\Rightarrow Y_A = Y_C = 0$

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow Z_A + Z_C - P = 0$$

Simetria $\Rightarrow Z_A = Z_C = P/2$

$$\Sigma M_{Cx} = 0 \Rightarrow \bar{M}_{Ax} + \bar{M}_{Cx} - PL = 0$$

Simetria $\Rightarrow \bar{M}_{Ax} = \bar{M}_{Cx} = PL/2$

$$\Sigma M_{Cy} = 0 \Rightarrow \bar{M}_{Ay} + \bar{M}_{Cy} - Z_A 2L + PL = 0$$

Simetria $\Rightarrow \bar{M}_{Ay} = -\bar{M}_{Cy} \Rightarrow 0 = 0$

$\Rightarrow \bar{M}_{Ay} = -\bar{M}_{Cy} = \bar{M}$ (incógnita)

$$\Sigma M_{Cz} = 0 \Rightarrow \bar{M}_{Az} + \bar{M}_{Cz} + Y_A 2L = 0$$

Como $Y_A = 0$ não há nenhum esforço que
tende a girar a estrutura em torno de z

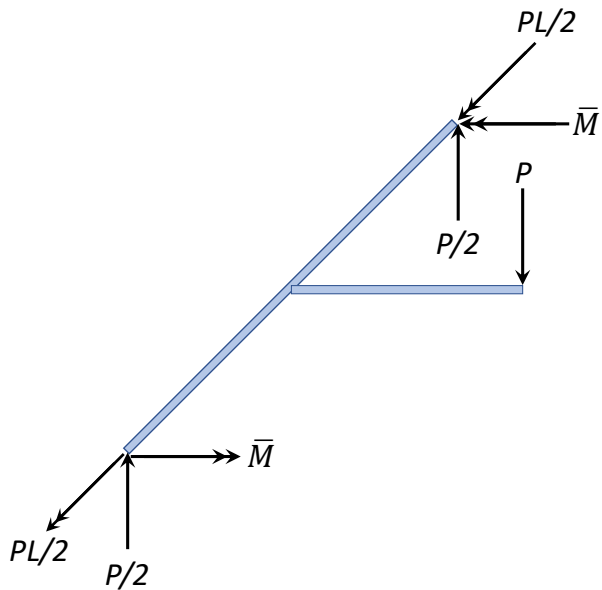
$\Rightarrow \bar{M}_{Az} = \bar{M}_{Cz} = 0$

• Grau de hiperestaticidade considerando a simetria:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \text{ equações} \\ 1 \text{ incógnitas } (\bar{M}) \end{array} \right\} g = 1$$



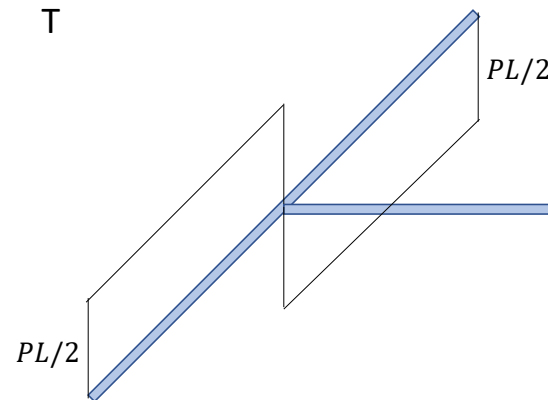
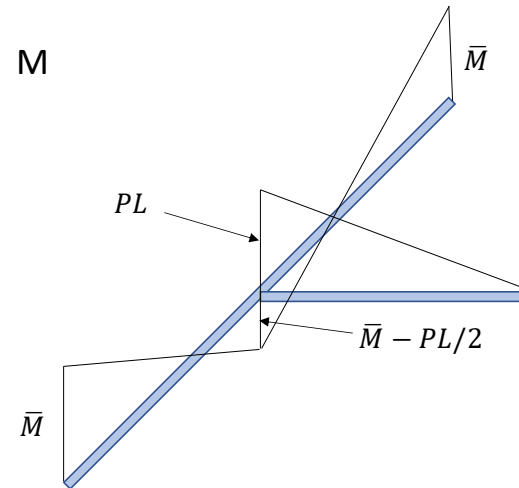
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



- Princípio da Energia Complementar Mínima

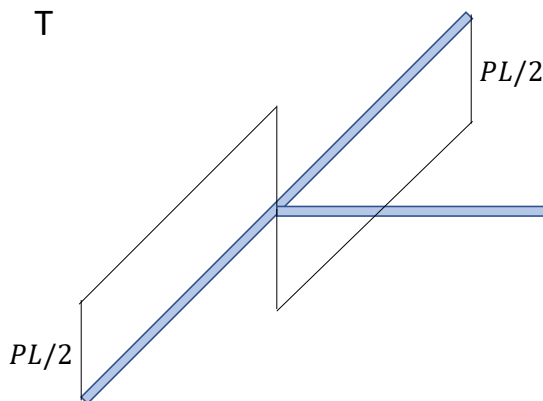
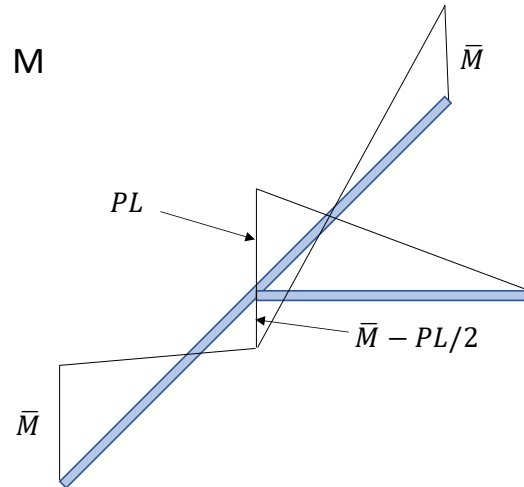
$$\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} = 0$$

$$U^* = U_{flexão}^* + U_{torção}^*$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



- Energia complementar

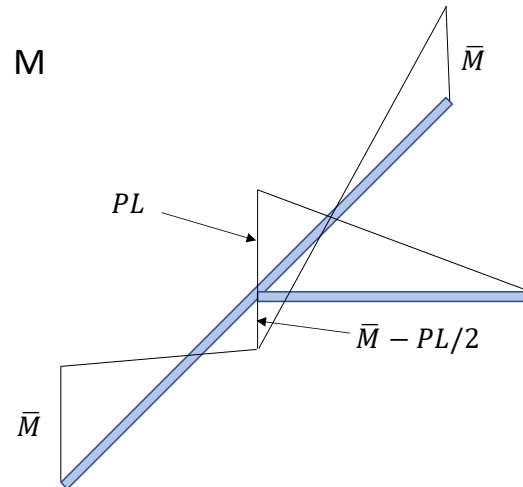
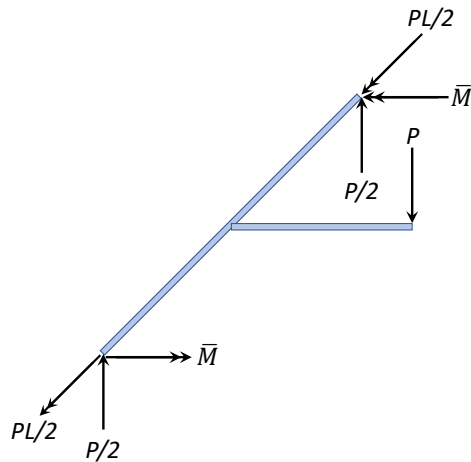
$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial \bar{M}} dx \\ & + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BD} \frac{\partial M_{BD}}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{AB} \frac{\partial T_{AB}}{\partial \bar{M}} dx \\ & + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BC} \frac{\partial T_{BC}}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L T_{BD} \frac{\partial T_{BD}}{\partial \bar{M}} dx = 0 \end{aligned}$$

- Várias dessas parcelas são nulas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial \bar{M}} dx = 0 \\ \Rightarrow & \frac{2}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}} dx = 0 \end{aligned}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}} dx = 0$$

$$M_{AB} = \bar{M} - \frac{P}{2}x \quad \frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}} = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^L \left(\bar{M} - \frac{P}{2}x \right) dx = 0$$

$$\Rightarrow \bar{M}L - \frac{PL^2}{4} = 0$$

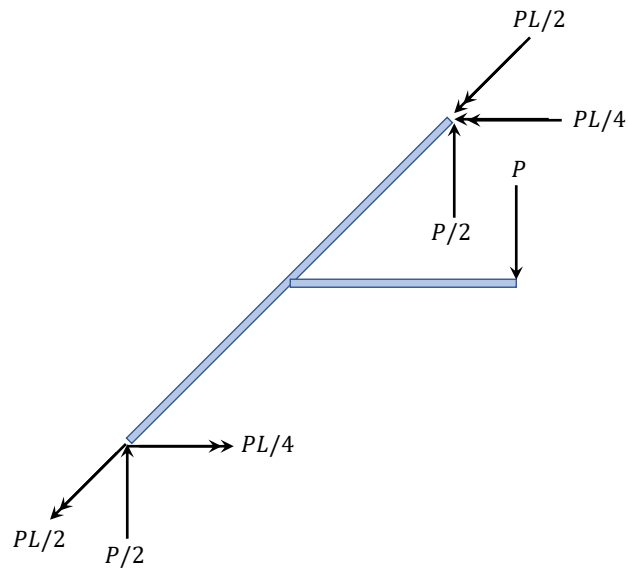
$$\Rightarrow \bar{M} = \frac{PL}{4}$$



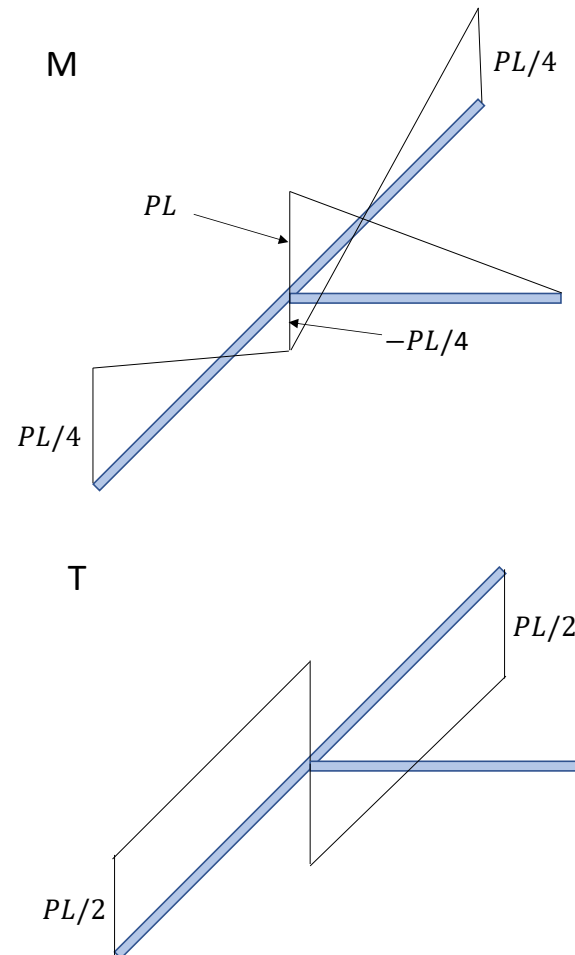
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

- Após a resolução do problema hiperestático ficamos com o *DCL*:



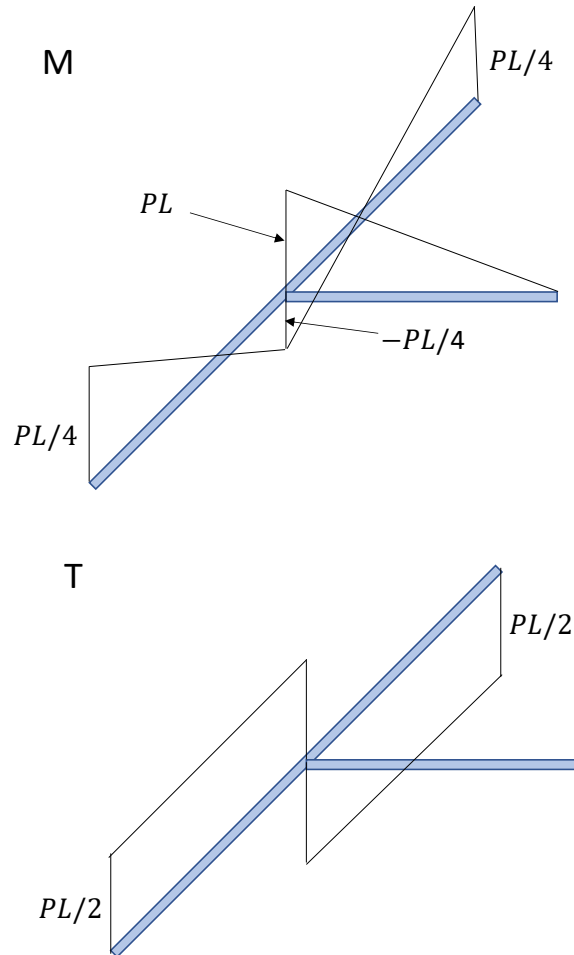
- E com os diagramas de esforços solicitantes:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica



- O deslocamento vertical do ponto *D* é calculado usando o Teorema de Crotti-Engesser

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P}$$

- ou, na forma modificada do Segundo Teorema de Castigliano:

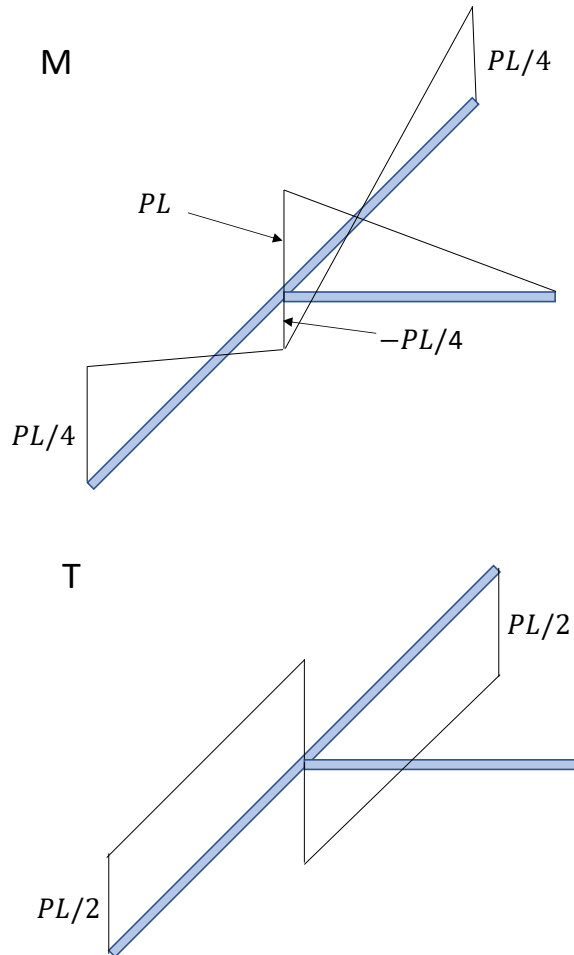
$$\begin{aligned} \delta = & \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial P} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial P} dx \\ & + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BD} \frac{\partial M_{BD}}{\partial P} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{AB} \frac{\partial T_{AB}}{\partial P} dx \\ & + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BC} \frac{\partial T_{BC}}{\partial P} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BD} \frac{\partial T_{BD}}{\partial P} dx \end{aligned}$$

- ou, eliminando parcelas nulas e considerando simetrias:

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{2}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial P} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BD} \frac{\partial M_{BD}}{\partial P} dx \\ & + \frac{2}{GI_P} \int_0^L T_{AB} \frac{\partial T_{AB}}{\partial P} dx \end{aligned}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\delta = \frac{2}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial P} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BD} \frac{\partial M_{BD}}{\partial P} dx + \frac{2}{GI_P} \int_0^L T_{AB} \frac{\partial T_{AB}}{\partial P} dx$$

$$M_{AB} = \frac{P}{4}(L - 2x) \quad \frac{\partial M_{AB}}{\partial P} = \frac{1}{4}(L - 2x)$$

$$M_{BC} = Px \quad \frac{\partial M_{BC}}{\partial P} = x$$

$$T_{AB} = \frac{PL}{2} \quad \frac{\partial T_{AB}}{\partial P} = \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{P}{8EI} \int_0^L (L - 2x)^2 dx + \frac{P}{EI} \int_0^L x^2 dx + \frac{PL^2}{2GI_P} \int_0^L dx$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{24EI} + \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^3}{2GI_P}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{EI}$$

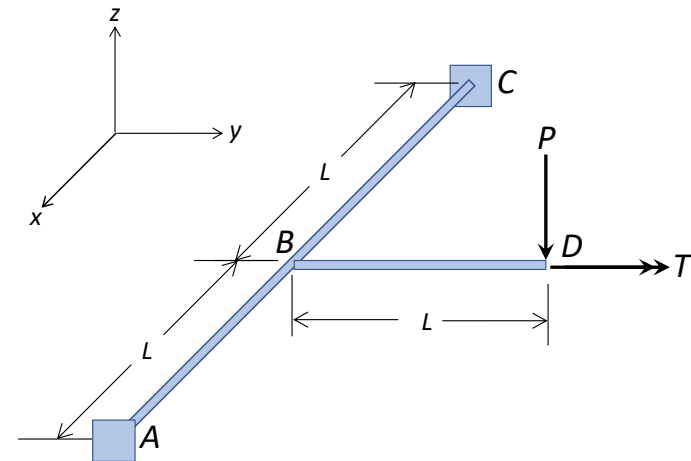


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício:

A estrutura ABCD da figura é horizontal. A barra BD está soldada em B à barra ABC e forma com ela um ângulo reto. A estrutura está engastada nos pontos A e C. Em D estão aplicados uma força vertical P e um torque T . As barras têm mesma rigidez flexional EI e mesma rigidez à torção $GI_P = \frac{4}{5}EI$. Sabendo que a energia complementar devida à força cortante é desprezível, pedem-se:

- a) o deslocamento vertical do ponto D;
- b) a rotação do ponto D em torno da direção y .

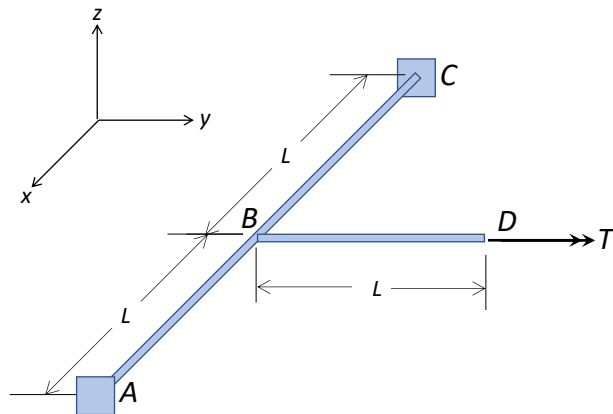




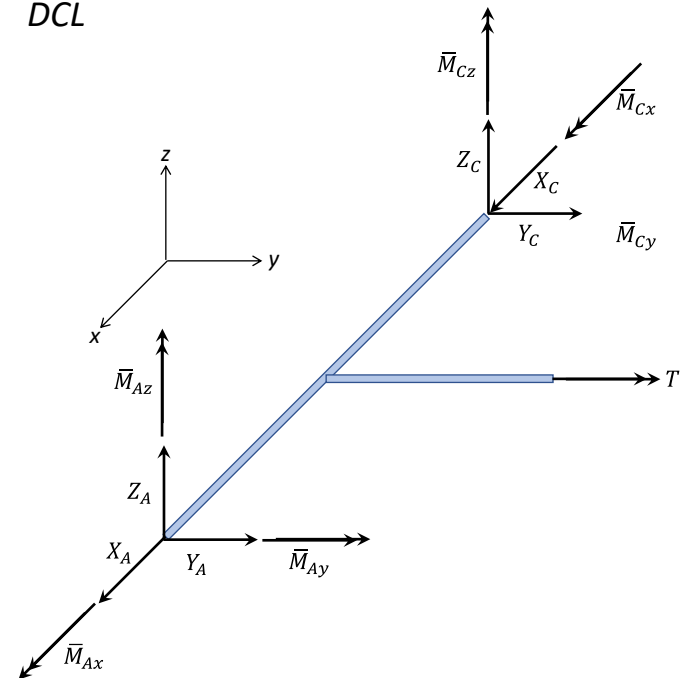
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

b) Cálculo da rotação em D em torno de y

- Somente a parte antissimétrica do carregamento colabora:



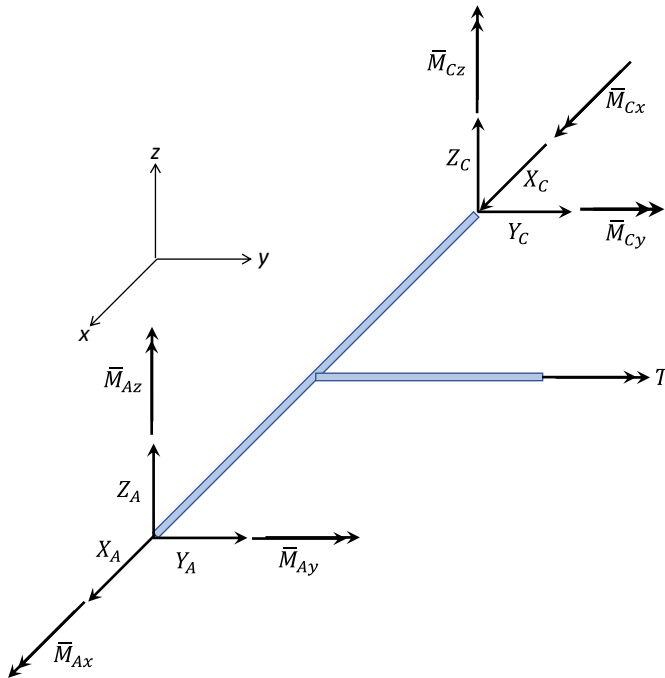
DCL





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica



A estrutura é simétrica e está submetida a um carregamento antissimétrico

⇒ As reações tem que ser antissimétricas

• Equilíbrio:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow X_A + X_C = 0$$

Não há nenhum esforço aplicado na direção de x ⇒ $X_A = X_C = 0$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_C = 0$$

$$\Rightarrow Y_A = -Y_C = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow Z_A + Z_C = 0$$

$$\Rightarrow Z_A = -Z_C = F \text{ (incógnita)}$$

$$\Sigma M_{Cx} = 0 \Rightarrow \bar{M}_{Ax} + \bar{M}_{Cx} = 0$$

Não há nenhum torque para resistir na direção x ⇒ $\bar{M}_{Ax} = \bar{M}_{Cx} = 0$

$$\Sigma M_{Cy} = 0 \Rightarrow \bar{M}_{Ay} + \bar{M}_{Cy} - Z_A 2L + T = 0$$

Antissimetria ⇒ $\bar{M}_{Ay} = \bar{M}_{Cy} = -\bar{T}$ (incógnita)

$$\Sigma M_{Cz} = 0 \Rightarrow \bar{M}_{Az} + \bar{M}_{Cz} + Y_A 2L = 0$$

Não há nenhum esforço aplicado que faria a estrutura girar em torno de z ⇒ $\begin{cases} \bar{M}_{Az} = \bar{M}_{Cz} = 0 \\ Y_A = 0 \end{cases}$

• Grau de hiperestaticidade considerando a simetria:

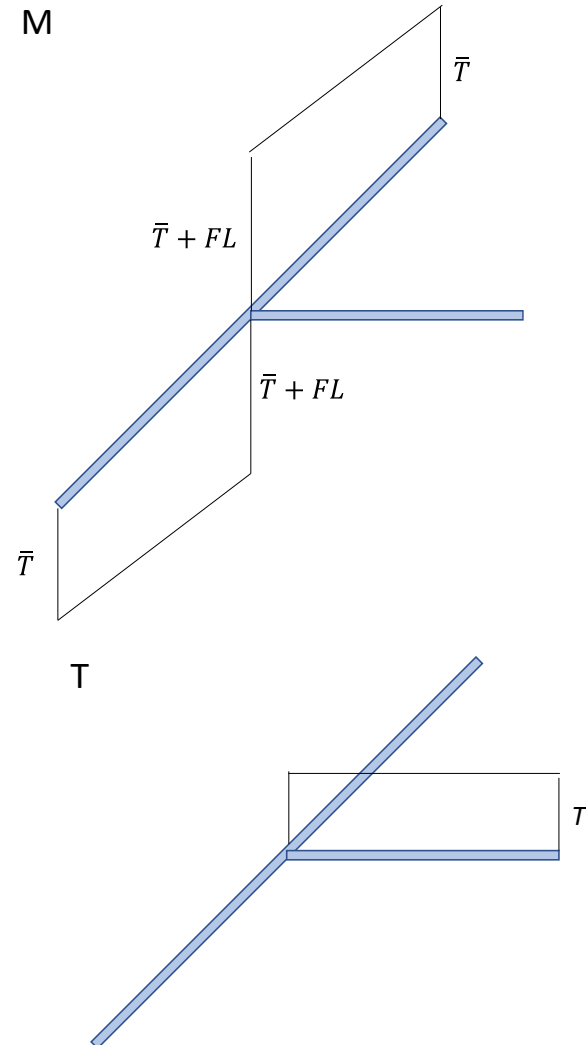
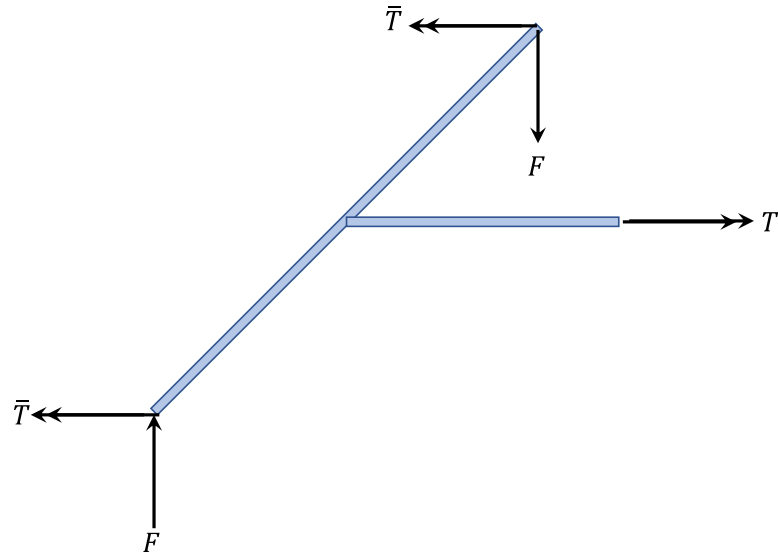
$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ equação: } 2\bar{T} + F2L = T \\ 2 \text{ incógnitas (} F \text{ e } \bar{T} \text{)} \end{array} \right\} g = 1$$

• Incógnita hiperestática:

Vamos adotar F



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



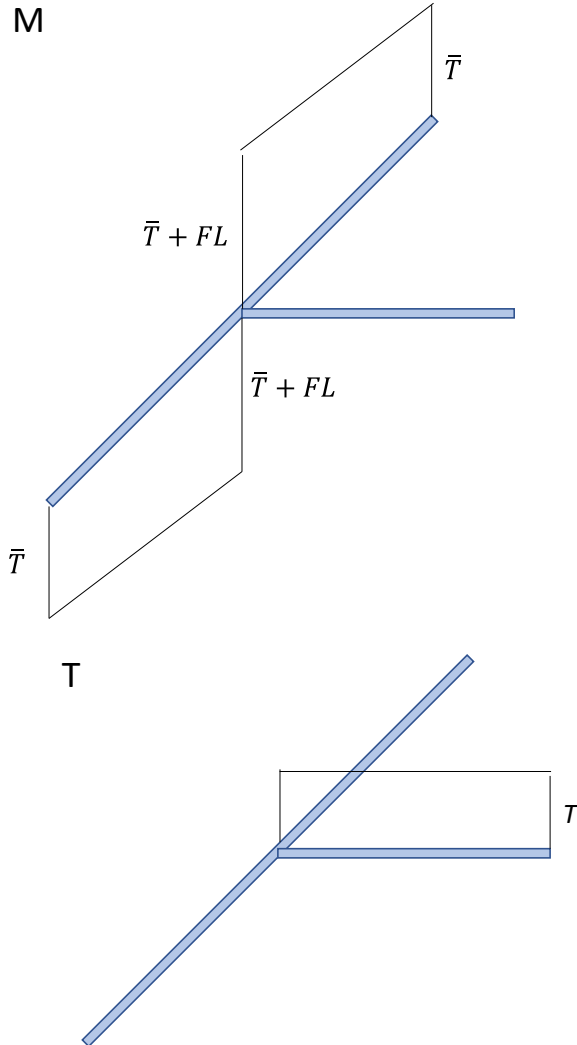
- Princípio da Energia Complementar Mínima

$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = 0$$

$$U^* = U_{flexão}^* + U_{torção}^*$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



- Energia complementar

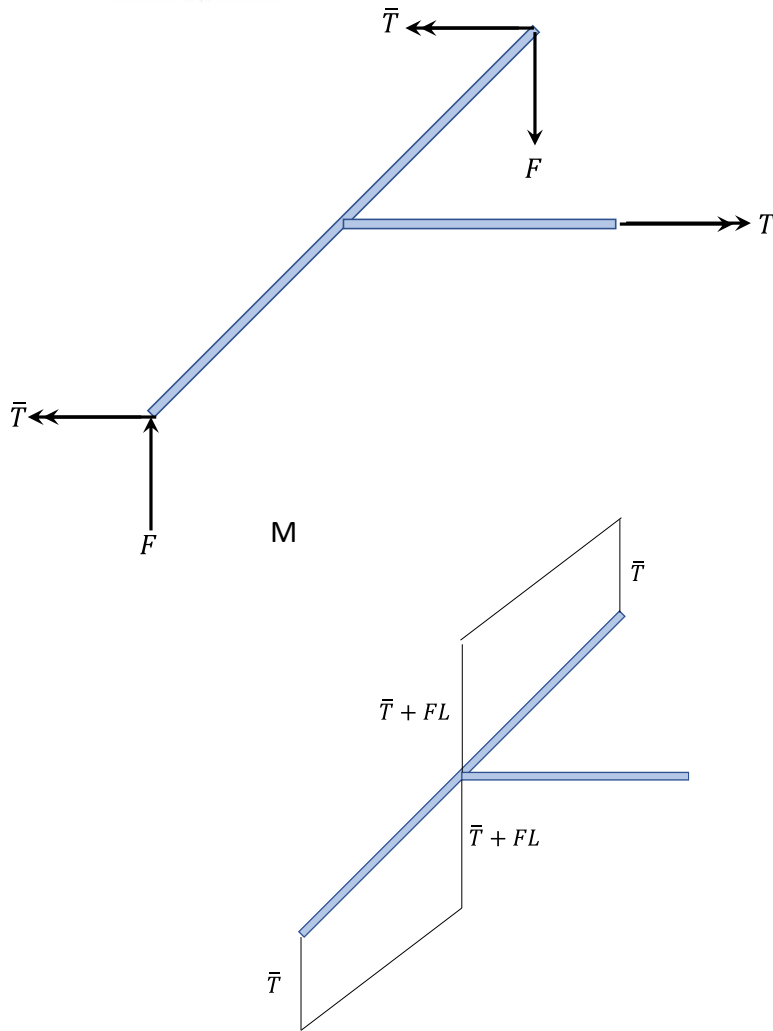
$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial F} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial F} dx \\ & + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BD} \frac{\partial M_{BD}}{\partial F} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{AB} \frac{\partial T_{AB}}{\partial F} dx \\ & + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BC} \frac{\partial T_{BC}}{\partial F} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L T_{BD} \frac{\partial T_{BD}}{\partial F} dx = 0 \end{aligned}$$

- Várias dessas parcelas são nulas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial F} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial F} dx \\ & = \frac{2}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial F} dx = 0 \end{aligned}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial F} dx = 0$$

$$M_{AB} = \bar{T} + Fx = \frac{T}{2} + F(x - L)$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial F} = x - L$$

$$\Rightarrow \int_0^L \left(\frac{T}{2} + F(x - L) \right) (x - L) dx = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{TL^2}{4} + \frac{FL^3}{3} = 0$$

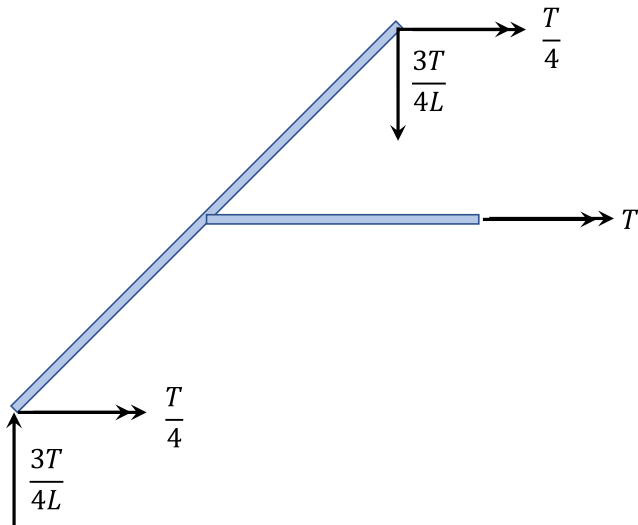
$$\Rightarrow F = \frac{3T}{4L}$$

$$\Rightarrow \bar{T} = -\frac{T}{4}$$

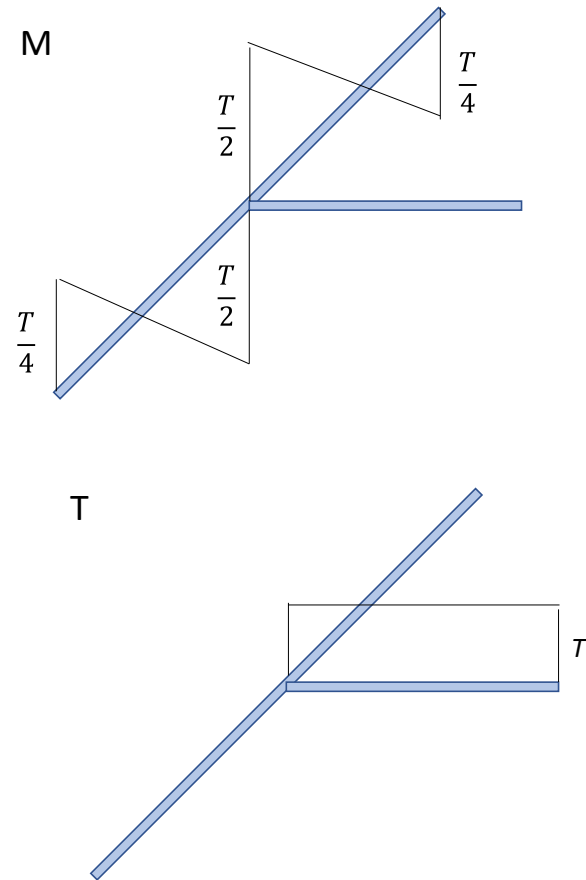


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Após a resolução do problema hiperestático ficamos com o *DCL*:



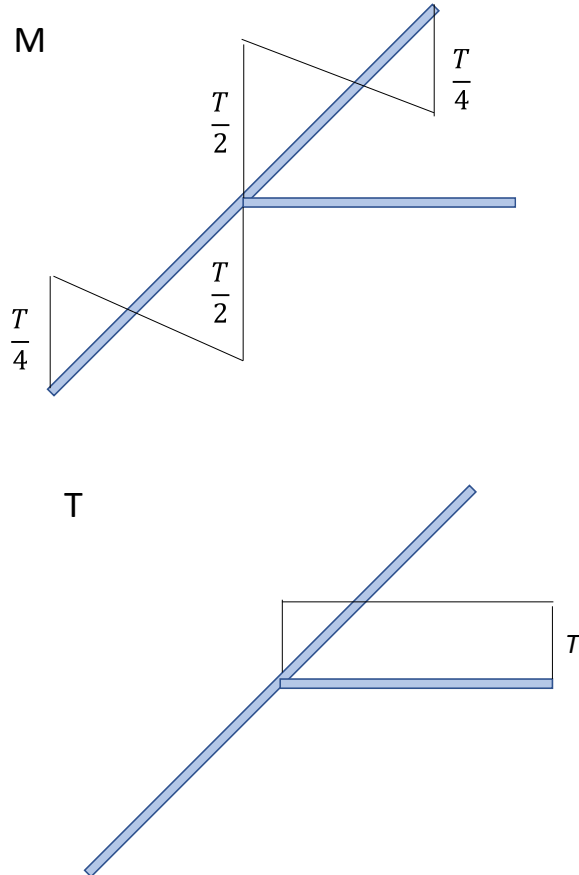
- E com os diagramas de esforços solicitantes:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica



- A rotação do ponto D na direção do eixo y é calculada usando o Teorema de Crotti-Engesser

$$\theta = \frac{\partial U^*}{\partial T}$$

- ou, na forma modificada do Segundo Teorema de Castigliano:

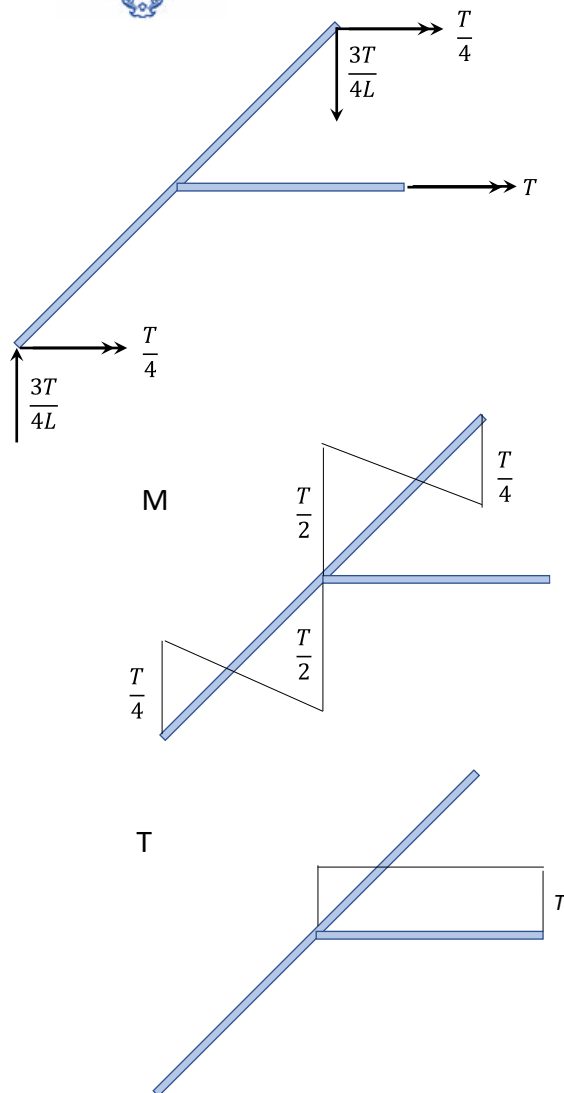
$$\begin{aligned} \theta = & \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial T} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial T} dx \\ & + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BD} \frac{\partial M_{BD}}{\partial T} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{AB} \frac{\partial T_{AB}}{\partial T} dx \\ & + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BC} \frac{\partial T_{BC}}{\partial T} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BD} \frac{\partial T_{BD}}{\partial T} dx \end{aligned}$$

- ou, eliminando parcelas nulas e considerando simetrias:

$$\theta = \frac{2}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial T} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BD} \frac{\partial T_{BD}}{\partial T} dx$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\theta = \frac{2}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial T} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BD} \frac{\partial T_{BD}}{\partial T} dx$$

$$M_{AB} = \frac{T}{4} \left(\frac{3x}{L} - 1 \right) \quad \frac{\partial M_{AB}}{\partial T} = \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{L} - 1 \right)$$

$$T_{BD} = T \quad \frac{\partial T_{BD}}{\partial T} = 1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{T}{8EI} \int_0^L \left(\frac{3x}{L} - 1 \right)^2 dx + \frac{T}{GI_P} \int_0^L dx$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{TL}{8EI} + \frac{TL}{GI_P}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{11 TL}{8 EI}$$



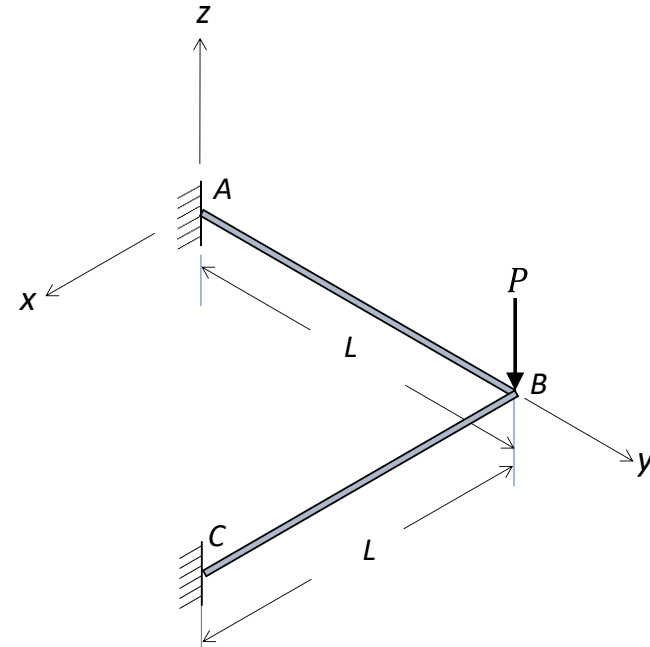
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício:

A estrutura ABC da figura está contida em um plano horizontal. Ela é formada por uma barra dobrada em ângulo de 90° , de comprimento $2L$, engastada em A e em C. Essa barra tem rigidez flexional EI e rigidez à torção GI_P . Pede-se calcular o deslocamento vertical sofrido pelo ponto B quando a ele é aplicada uma força vertical P .

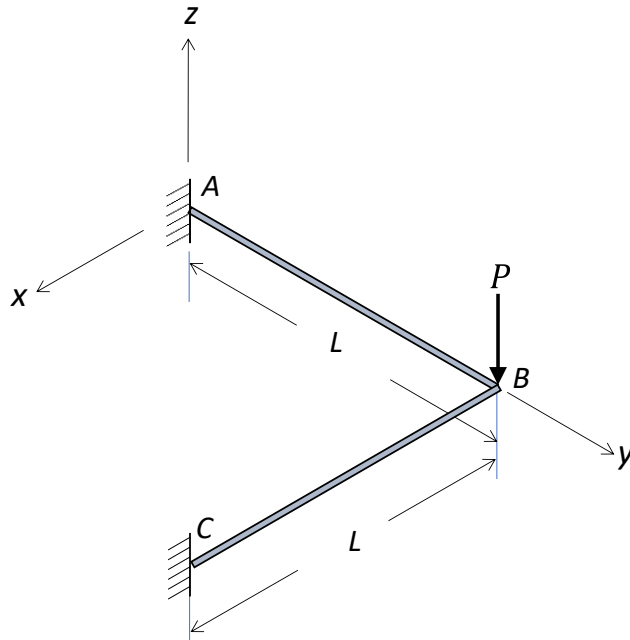
Notas:

- 1) Despreze a contribuição das forças cortantes à energia complementar.
- 2) Adotar $GI_P = \frac{4}{5}EI$

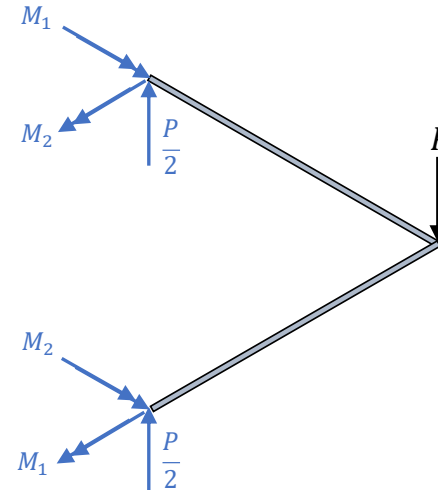




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



DCL



Equilíbrio:

$$\Sigma M_{Ax} = 0 \Rightarrow M_1 + M_2 = \frac{PL}{2}$$

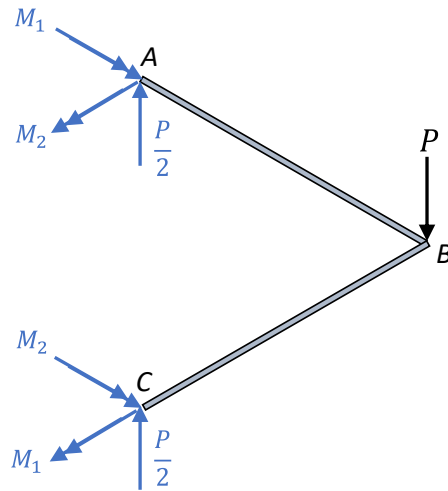
$$\Sigma M_{Ay} = 0 \Rightarrow M_1 + M_2 = \frac{PL}{2}$$

Grau de hiperestaticidade: $g = 1$

Vamos escolher M_1 como incógnita hiperestática.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\frac{\partial U^*}{\partial M_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \int_0^L M_{CB}(x) \frac{\partial M_{CB}}{\partial M_1} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{CB}(x) \frac{\partial T_{CB}}{\partial M_1} dx = 0$$

$$M_{CB}(x) = \frac{P}{2}x - M_2 = \frac{P}{2}x + M_1 - \frac{PL}{2} \Rightarrow \frac{\partial M_{CB}}{\partial M_1} = 1$$

$$T_{CB}(x) = M_1 \Rightarrow \frac{\partial T_{CB}}{\partial M_1} = 1$$

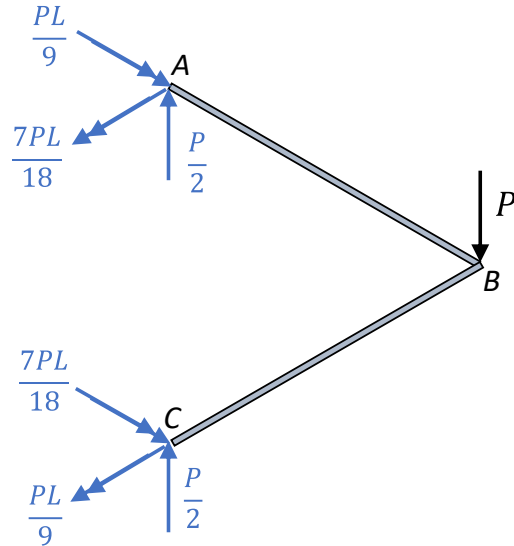
$$\Rightarrow \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{P}{2}x + M_1 - \frac{PL}{2} \right) dx + \frac{5}{4EI} \int_0^L M_1 dx = 0$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{PL}{9} \Rightarrow M_2 = \frac{7PL}{18}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

DCL final



$$\frac{\partial U^*}{\partial P} = \delta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{EI} \int_0^L M_{CB}(x) \frac{\partial M_{CB}}{\partial P} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{CB}(x) \frac{\partial T_{CB}}{\partial P} dx = \frac{\delta}{2}$$

$$M_{CB}(x) = \frac{P}{2}x - \frac{7PL}{18} \Rightarrow \frac{\partial M_{CB}}{\partial P} = \frac{x}{2} - \frac{7L}{18}$$

$$T_{CB}(x) = \frac{PL}{9} \Rightarrow \frac{\partial T_{CB}}{\partial P} = \frac{L}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{P}{2}x - \frac{7PL}{18} \right) \left(\frac{x}{2} - \frac{7L}{18} \right) dx + \frac{5}{4EI} \int_0^L \frac{PL}{9} \frac{L}{9} dx = \frac{\delta}{2}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{9EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo da Flambagem de Barras*. Disponível no Moodle